Chaos Chaos Chaos

Make your own chaos. Just a little math. Some programming.

German version: 15. Oktober 2026 (first version Sep 16th, 2022)

© Thomas Schulmeister, Berlin, Germany

https://thschulm.de/Rahmentext.html
thschulm@web.de

The frame text

Inhaltsverzeichnis

1. Die Einleitung
   Worum geht es und warum die gewählte Form.
   Was ist die Idee und wie lautet der Ansatz.
2. Das Basissystem
   Einführung des Basissystems.
   Untersuchung des Basissystems
3. Das Chaossystem
   Die Einführung und Untersuchung des Chaossystems.
   Eine Auflistung von Routen ins Chaos.
4. Die Beispiele (Extrateil)
   Die Formulierung der Differentialgleichungen.
   Angabe der Parameter einer Route ins Chaos.
   Phasenplots zum betrachteten Chaos-Intervall.
5. Diskussion und Galerie
   Ein Fazit der aktuellen Version dieser Schrift.
   Eine Galerie der betrachteten chaotischen Attraktoren.
   Ein Ausblick, wie man weiter machen könnte.
6. Das Literaturverzeichnis

1. Die Einleitung

Chaos ist (unter anderem) eine Bezeichnung, die sich seit den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts für ein bestimmtes Verhalten von dynamischen Systemen etabliert hat. Damals verursachte dieses Verhalten bei fast allen Beobachtern oder gar Beteiligten eine regelrechte Euphorie.

Die Entdeckung (besser gesagt, die Wiederentdeckung) dieser exotischen zeitlichen Verhaltensweise von bestimmten dynamischen Systemen übte zu Recht eine Faszination aus, die zum Teil bis heute anhält.

Insbesondere die Tatsache, dass man chaotisches Verhalten in schönen Abbildungen darstellen kann, trug zum medialen Erfolg der Chaos-Theorie bei.

Und dann kam die stürmische Entwicklung der Rechentechnik.
Jeder kann Chaos erzeugen, wenn er etwas programmieren kann. Wirklich.

Hinzu kommt, dass Chaos selten ist, zumindest das Chaos von dem hier die Rede sein soll. Seltene Dinge haben auch in der Mathematik ihren Reiz.

Denn um Mathematik geht es.

Das Problem.

Ein Problem dabei ist, mit 3 Sätzen kann man Chaos nicht mathematisch korrekt und zugleich allgemein verständlich erklären.

Zahlreiche Bücher sind über Chaos erschienen, viele gute, aber auch Arbeiten, die aus dem Auftauchen des Modebegriffes Chaos schnelle Rendite erwirtschaften wollten (und es zum Teil auch taten).

Insbesondere Nicht-Mathematiker und Nicht-Physiker glaubten manchmal, dass ein grobes Verständnis der theoretischen Grundlagen ausreicht, um mitreden (also auch mitschreiben) zu können.

So entstanden viele Wiederholungen bereits mehrfach publizierter Einführungen und spekulative Interpretationen der Bedeutung dieser zeitlichen Verhaltensweise bis hin zu schlichtweg falschen Übertragungen der Ergebnisse auf andere Fachgebiete (z.B. die Sozial- und die Wirtschaftswissenschaften).

Immer wieder wurde der arme Schmetterling bemüht, dessen Flügelschlag in Brasilien über das Entstehen eines Tornados in Texas entscheiden würde (zumindest aber könnte).

Die Losung ”Jeder kann Chaos” soll (nur wenig übertrieben) sagen, dass mit Ausdauer und etwas Glück jeder Leser in der Lage sein sollte, ein noch nicht publiziertes 3-dimensionales autonomes dynamisches System zu finden, das chaotisches zeitliches Verhalten zeigt. Davon gibt es nach über 50 Jahren nämlich immer noch nicht so sehr viele (außer denen von J.C. Sprott)

Das wäre dann ihr, werter Leser, wissenschaftliches Eigentum, ihre Entdeckung. Und wenn dieses dynamische System dann auch noch einen Mehrwert für andere Interessierte einbringt, und sei es nur als weiteres Studienobjekt zum Thema Chaos, wäre das doch die Mühe wert.

Das toppen würde es natürlich, wenn ihr System ein Stück Realität (zumindest grob) abbildet (modelliert, wie man sagt) und es so einen kleinen Beitrag zum Verständnis vom Chaos in Natur und Gesellschaft leisten könnte.

Denn um die mathematische Modellierung der realen Welt geht es bei den besonders interessanten dynamischen Systemen. Auch beim Chaos.

Aber das ist der Idealfall, kein Muss. Fangen wir also mit der Zielstellung an: Wir (und, wenn sie wollen, später sie) wollen maximal einfache (und bisher unbekannte) dynamische Systeme formulieren, die für bestimmte Parameterwerte chaotisches zeitliches Verhalten zeigen. Das ist es.

Was ist zu tun?

Wir basteln uns dynamische Systeme von autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit polynomialen rechten Seiten.

Das klingt vielleicht etwas kompliziert, wird es aber gar nicht.

Zugegeben, das Übertragen etablierter (also bereits definierter) mathematischer Begriffe ins einfache Umgangsdeutsch ist riskant und nur mit Verlusten möglich, aber für unsere Zwecke hier nicht unmöglich.

Sie müssen dem Autor dabei manchmal ein Stück folgen oder sich selbst tiefer einarbeiten und die angegebenen Resultate nachrechnen. Beides ist OK.

Diese Schrift ist eine kommentierte Beispielsammlung. Alle Rechnungen wurden sorgfältig durchgeführt. Trotzdem sind sie nicht absolut sicher. Nichtlineare dynamische Systeme sind kein Ponyhof.

Was ist also gemeint? Gehen wir die hier verwendeten Begriffe kurz durch (Fachkundige überspringen bitte die nächsten 7 Seiten).
Es handelt sich dabei nicht um die Auflistung von Definitionen, das bräuchte ein extra Kapitel. Eher mehr. Dieses ist Populärmathematik, kein Fachartikel.

Begriffe (ausführlich z.B. bei Parker & Chua [22], Hirsch [13] und Shilnikov [39])

”dynamisches System”
Ein dynamisches System ist die mathematische Beschreibung des zeitlichen Verhaltens einer Anzahl von voneinander abhängenden Größen, den Variablen.

In unserem Fall wird diese Abhängigkeit durch ein System von drei autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, z)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y, z)$$
$$\frac{dz}{dt} = H(x, y, z)$$

Die Funktionen F, G und H von x, y und z enthalten eine Anzahl von reellen Parametern $a, b, c, d, e, f \ldots$, die variiert werden, um Chaos zu finden.

Die Aufstellung (Formulierung) eines dynamischen Systems ist der erste Schritt bei der Modellierung realer Prozesse. Aber auch ohne einen realen Hintergrund (eine Modellierung) kann man sich mit dynamischen Systemen beschäftigen.

”maximal einfach”

Wir machen die Sache so einfach (und damit klein) wie möglich, aber so groß wie für das Auftreten von Chaos erforderlich.
Im zwei-dimensionalen autonomen Raum (also der Ebene) ist chaotisches Verhalten nicht möglich. Das liegt am Satz von Picard-Lindelöf für gewöhnliche Differentialgleichnungen, der (vereinfacht) besagt, dass jede Lösungskurve (eine Trajektorie) in einer gewissen Umgebung jedes ihrer Punkte eindeutig ist.

Also können sich 2 Trajektorien nicht in einem Punkt schneiden und also in der Ebene auch nicht das Verhalten erzeugen, das als chaotisch bezeichnet wird.

Im drei-dimensionalen Raum können Trajektorien sich kompliziert verhalten ohne sich zu schneiden (denken sie an ein Wollknäuel). Genau das suchen wir.

”bestimmte Parameterwerte”
Wir formulieren unsere Systeme mit reellen Parametern. Durch die Variation der Parameterwerte haben wir die Möglichkeit, Parameterbereiche zu finden, in denen chaotisches Verhalten auftritt. Dazu gibt es analytische und numerische Methoden. Oft muss man aber einfach probieren.

”autonome gewöhnliche Differentialgleichungen”

In unseren Differentialgleichungen tritt die Zeit nicht explizit auf. Das reduziert die Anzahl möglicher Systeme stark, macht aber die mathematische Analyse leichter. Damit sind auch retardierte Differentialgleichungen (Differentialgleichungen mit nacheilendem zeitlichen Argument) ausgeschlossen.

Und es sind auch keine partiellen Differentialgleichungen zugelassen. Das ist auch ein hochinteressantes Gebiet, aber nicht hier.

”polynomiale rechten Seiten”
Die Ausdrücke, die das Verhalten der 3 Variablen beschreiben, sollen Polynome in den 3 Variablen sein. Das ist für das Auftreten von Chaos nicht notwendig, schränkt die Suche sogar ein, macht aber die Untersuchungen wesentlich einfacher. Nicht einmal stückweise polynomiale rechte Seiten sind zugelassen.

Brüche, Wurzeln, Exponentialterme, trigonometrische, komplexe Funktionen usw. sind nicht erlaubt. Auch keine absoluten Beträge, keine Zufallsgrößen, kein Rauschen usw. Unser Chaos ist hausgemacht, nicht eingeschleppt.

Diskrete dynamische Systeme (die sich in diskreten Zeit-Schritten verändern) werden hier ebenfalls nicht betrachtet. Sie bilden einen schönen und erfolgreichen Teil der Chaos-Theorie, sind aber hier auch nicht das Thema.

”Chaos”

Der Schlüsselbegriff dieser kleinen Abhandlung verdient eigentlich eine lange Erklärung. Es gibt mehrere Definitionen. Uns genügt folgende Beschreibung:

Deterministisches Chaos als stationäres Verhalten der Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichnungen in einem beschränkten Gebiet liegt vor, wenn jede noch so kleine Abänderung des Anfangswertes einer Trajektorie mit der Zeit zu einem exponetiell abweichenden Verhalten (als Maß dient der Abstand der abgeänderten zur Original-Trajektorie) führt.

Ein chaotischer Attraktor ist ein Gebiet im (hier 3-dimensionalen) Phasenraum, das den zeitlichen Endzustand des betrachteten Systems darstellt und dabei selbst keine ganzzahlige Dimension besitzt.
In dieser Schrift werden chaotische Attraktoren aus praktischen Gründen unterteilt. Für kompakte chaotische Attraktoren wird als Abkürzung der Begriff ”Chaos” verwendet, in Abgrenzung zum Begriff ”Chaos-Band”, das einen aufgeschnittenen chaotischen Attraktor bezeichnet.
Sie werden sehen (im wörtlichen Sinn), dass das hilfreich ist.

Zum Auffinden von Chaos, d.h., eines chaotischen Attraktors, durch numerische Simulationen ist es hilfreich, wenn man Anzeichen auf nahes Chaos kennt und erkennt. Und genau das wollen wir. Wir suchen Routen ins Chaos.

”stationäres Verhalten (siehe auch ’limit sets’)”

Damit wird das Verhalten der Trajektorien in der (positiven) unendlichen Zeitachse bezeichnet. Bis zur Wiederentdeckung der jetzt als Chaos bezeichneten Langzeit-Verhaltensweise galten stationäre Zustände und geschlossene Trajektorien (Schwingungen, periodische Orbits) als die einzigen stationären Verhaltensweisen von Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (bei Fachkundigen noch die quasi-periodischen).

”stationäre Zustände”
Ein ’stationärer Zustand’ ist (hier) ein Punkt im drei-dimensionalen Raum, an dem die drei Bewegungsgleichungen den Wert Null haben, die Variablen sich also nicht mehr verändern. Die Berechnung dieser Zustände und die Bestimmung ihrer Stabilität bilden die Basis der Untersuchung aller dynamischen Syteme. Die Mathematik dazu ist komplett ausgearbeitet.

”(asymptotische) Stabilität” von stationären Trajektorien
Stationäres Verhalten wird (vereinfacht) als asymptotisch stabil bezeichnet, wenn jede hinreichend kleine Abweichung eines Phasenpunktes von einer stationären Trajektorie mit fortschreitender Zeit wieder gegen diese strebt (der Abstand zur ursprünglichen Trajektorie sich also zunehmend verringert). Das gilt, verallgemeinert auf Mengen von Trajektorien, auch für chaotische Attraktoren.

”beschränktes Gebiet”

Unser Chaos findet in der Endlichkeit statt. Man kann also Grenzen für die drei Variablen angeben, die von den stationären Trajektorien nicht verletzt werden. Das ist mathematisch sinnvoll. Es erleichtert die mathematische Analyse und die numerischen Simulationen.
In den hier betrachteten Systemen wird der Spielraum der Variablen oft (aber nicht immer) sogar auf ein Teilgebiet des positiven Oktanten eingeschränkt.

”Bifurkation”
Wenn sich das qualitative Verhalten eines dynamischen Systems bei Abänderung eines Parameters an einem Parameterwert schlagartig verändert, spricht man von einer Bifurkation und einem Bifurkationspunkt.
Es gibt zahlreiche unterscheidbare Arten von Bifurkationen.

Wenn oben gesagt wurde, dass es so einfach wie möglich sein soll, so heißt das nicht, dass jemand nicht noch einfachere Wege zum Aufstellen von dynamischen Systemen der hier betrachteten Art angeben kann, die auch Chaos erzeugen können.

Es geht bestimmt auch anders, aber wie hier angegeben geht es auch.
Und eine vollständige Theorie zur Vorhersage von Chaos in dynamischen Systemen ist bisher nicht bekannt.

”Lyapunov-Exponenten”

Die Lyapunov-Exponenten beschreiben das asymptotische Verhalten der Abstände benachbarter Trajektorien in dynamischen Systemen (hier also in Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen) durch reelle Zahlen.

Die Lyapunov-Exponenten stellen die durchschnittliche (mittlere) exponentielle Wachstumsrate von kleinen Störungen um eine Referenzlösung dar. In dieser Schrift sind die Referenzlösungen die stabilen stationären Lösungen.

Für ein n-dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt es n Lyapunov-Exponenten λ_i. Es gibt viele Arbeiten zum Thema (z.B. bei Pikovsky [23] und Vallejo [47]). Die Berechnung der (geordneten) Lyapunov-Exponenten erfolgt durch numerische Methoden. Entscheidend für Chaos ist der maximale Lyapunov-Exponent λ_1. Für $n = 3$ werden 4 (geordnete) Fälle unterschieden:

$\lambda_1 > 0, 0, -$	exponentielles Auseinanderlaufen der Trajektorien: Chaos
$\lambda_1 = 0, -, -$	stabiler Grenzzyklus (”-” steht für negative Werte)
$\lambda_1 < 0, 0, 0$	stabiler stationärer Torus (quasi-periodische Trajektorien)
$\lambda_1 < 0, -, -$	exponentielle Konvergenz (stabiler stationärer Zustand)

Lyapunov-Exponenten sind auch für diskrete dynamische Systeme und Zeitreihen von Daten (zum Beispiel Messwerten) definiert.

Die zwei Meilensteine in der Geschichte des Chaos.

Edward N. Lorenz [17] ist der Urvater des kontinuierlichen Chaos.
Mit ihm begann um 1963 die zunehmende mathematische Forschung des Verhaltens, das später unter dem Schlagwort ’Chaos’ berühmt wurde.
Sein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist heute Teil der Geschichte der Wissenschaft.

Etwas später, ab 1976, veröffentlichte Otto E. Rössler [27], [28] seine Chaos-produzierenden Differentialgleichungen, eine starke Fortführung und wichtige Erweiterung des Chaos-Materials.

Die Systeme von Lorenz und Rössler gelten heute als die Prototypen, die vielfach benutzten Lehrbeispiele des deterministischen Chaos.

Und man (wieder-)entdeckte ältere Systeme mit Chaos, die zu ihrer Zeit nicht erkannt worden waren, zum Beispiel das Rikitake Dynamo System [26].

Kurz danach kamen noch einige Publikationen zum Thema (z.B. 1979 das System von Rabinovich-Fabrikant [25] und, einige Etagen tiefer, das hier behandelte ’Chaossystem’ des Autors dieser Zeilen von 1978 [30]), das aber bei Weitem nicht mehr die gleiche Resonanz fand. Insgesamt also wenig.

Bis um 1990 änderte sich daran nicht viel. Neue dynamischen Systeme mit Chaos erhielten weiter den Namen ihrer ”Entdecker” (Shimizu-Morioka [40], Burke-Shaw [37], Nosé-Hoover [24] , Chua [20], Sprott [44]). Mit der rasanten Entwicklung der Computer erhielt die Chaos-Forschung dann einen Schub.

Neue Beispiele wurden publiziert, viele Chaos-Bücher erschienen. Einer der führenden Akteure (Julian C. Sprott) brachte es 2020 auf den Punkt [42]: ”Brauchen wir (noch) mehr Chaos-Beispiele?” titelte er. Und antwortete selbst: ”vielleicht doch” (beides frei übersetzt).

Neue Wettbewerbsziele wurden anvisiert: Chaos-Systeme mit der geringsten Nichtlinearität, Chaos-Systeme mit der geringsten Anzahl an Monomen (Termen), Systeme mit mehreren chaotischen Attraktoren, Chaos ohne erkennbare Herkunft (basins of attraction), d.h., ohne instabile stationäre Zustände oder Grenzzyklen im Einzugsgebiet. Die Vokabel dazu lautet ”hidden attractors”. Wir werden dazu Beispiele zeigen.

Die Anzahl der numerischen Studien stieg. Eine aktuelle Liste der Chaos zeigenden Systeme steht unter [15]. Eine umfassende Darstellung schrieb 2009 T. Vialar [48]. Die definitiven Übersichten lieferte 2010 J.C. Sprott [43] und 2022 (mit W.J. Thio) [46]. Der dritte Meilenstein.

Die Einordnung dieser Schrift.

In dieser Schrift geht es um eine kleine Teilmenge der 3-dimensionalen dynamischen Systeme. Im gerade genannten Buch von J.C. Sprott ist die vielfältige Welt des Chaos umfassend dargestellt. Aber wenn man darin die Systeme von drei polynomialen autonomen gewöhnlichen Differential-gleichungen herausfiltert, sind das gar nicht so viele. Und sinnvolle Modellierungen noch weniger.

Es gibt etablierte Wege zur Erzeugung von chaotischen dynamischen Systemen. Zum Beispiel durch Verwendung von trigonometrischen Funktionen. Chaos kann bekanntlich als unregelmäßige Schwingung interpretiert werden. Da liegt die Verwendung von periodischen Funktionen auf der Hand.
Aber das ist nicht das, was wir hier wollen. Unser Chaos soll nicht erzwungen werden, es soll aus dem Inneren kommen. Unsichtbar, jedenfalls durch einen Blick auf die drei Gleichungen nicht erkennbar. Zauber der Mathematik.

Man kann auch Chaos erzeugen, indem man die Differentialgleichungen von zwei in der Ebene schwingenden Systemen geeignet verkoppelt (coupled oscillators). Aber das ist eine andere Spielwiese, eine 4-dimensionale. Sie wird am Ende dieser Schrift kurz behandelt. Mehr aber nicht.

Unsere Voraussetzungen sind streng. Wir betrachten (jedenfalls am Anfang) nur einen Spezialfall, nämlich Differentialgleichungen vom Typ:

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) - F_2(x,y,z)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$
$$\frac{dz}{dt} = f \cdot F_2(x,y,z)$$

Die Funktionen $F(x,y), F_2(x,y,z)$ und $G(x,y)$ seien Polynome in x, y und z und f ist ein positiver reeller Parameter.

Zugegeben, das ist eine heftige Einschränkung, aber um allgemeine Aussagen geht es hier ja nicht. Später werden wir das Polynom $F_2(x,y,z)$ in die zweite Differentialgleichung einbinden. Noch später werden wir $F_2(x,y,z)$ in $\frac{dx}{dt}$ auch addieren. Oder in $\frac{dy}{dt}$. Es wird bunt.

Aber am Anfang wird es sogar noch spezieller (das müssen sie später alles nicht mitmachen, jetzt aber bitte doch):

Wir betrachten vorerst nur Differentialgleichungssysteme vom Typ:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - bx - xy^2 - F_2(x, y, z)\\ \frac{dy}{dt} &= a \cdot (xy^2 + d - y)\\ \frac{dz}{dt} &= f \cdot F_2(x, y, z)\end{aligned}$$

im positiven Oktanten und mit den vier reellen Parametern a, b, d, f .
Die Parameter a und f sind sinnvollerweise positiv, die anderen beiden nicht-negativ. In späteren Beispielen dürfen die Parameter b und d auch negativ sein. In $F_2(x, y, z)$ können weitere Parameter auftreten. Bei uns e.

Das Polynom $F_2(x, y, z)$ ist vorerst der Unterschied zwischen den Systemen. Wir beschränken den Grad des Polynoms $F_2(x, y, z)$ und damit des ganzen dynamischen Systems auf maximal drei. Noch eine Einschränkung.

Wir werden an zahlreichen Beispielen zeigen, dass es Polynome $F_2(x, y, z)$ gibt, für die Chaos auftritt. Danach sind sie dran.

Warum diese extreme Einschränkung? Auch, weil die wichtige Berechnung der stationären Zustände dadurch ziemlich einfach wird. Wir haben nämlich:

$$0 = 1 - bx - xy^2 - F_2(x, y, z)$$
$$0 = a \cdot (xy^2 + d - y)$$
$$0 = f \cdot F_2(x, y, z)$$

Und das bringt uns sofort zu:

$$0 = 1 - bx - xy^2$$
$$0 = xy^2 + d - y$$

Und zwar für jedes $F_2(x, y, z)$. Das macht die Suche nach weiteren Systemen mit Chaos viel einfacher. Man kann die Ergebnisse dazu immer wieder vollständig für jedes neue System übernehmen. Das ist ein beachtlicher Vorteil.

Aber der Hauptgrund für diesen Ansatz geht noch weiter. Das ganze zugehörige zwei-dimensionale Differentialgleichungssystem ist schon fertig untersucht.

2. Das Basissystem

Der Ausgangspunkt dieser Schrift ist, ein System mit zwei Variablen zu betrachten, das vergleichsweise kompliziertes dynamisches Verhalten besitzt. Und dieses System dann durch eine dritte Variable gezielt so zu erweitern, dass Chaos entsteht. Das geht natürlich nicht immer. Manchmal aber doch.

Ein solches dynamisches System haben wir bereits. Es ist eine Verallgemeinerung des Sel'kov-Systems [35] durch den Autor [31]:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bx - xy^2$$
$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (xy^2 + d - y)$$

im positiven Quadranten und mit den drei reellen Parametern a, b, d .
Die Parameter b und d seien vorerst nicht-negativ, später frei.

Eine vereinfachte Version (der Spezialfall $b = 0$) wurde ein Jahr später auch von J. Schnakenberg [29] formuliert, nicht behandelt.

Die folgenden 25 Seiten zeigen exemplarisch, wie man bei der Vorbereitung einer Chaos-Suche vorgehen kann. Sie können sie aber auch überspringen.

Das System, wir nennen es ab jetzt das 'Basissystem', ist also weitgehend untersucht und wir werden relevante Resultate hier kurz darstellen.
Zuerst ist festzuhalten, dass der erste Quadrant von den Trajektorien des Basissystems nicht verlassen werden kann. Betrachten wir also:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bx - xy^2$$
$$\frac{dy}{dt} = a(xy^2 + d - y)$$

Für alle Werte auf der y-Achse $(x \equiv 0, y > 0)$ gilt $dx/dt = 1 > 0$ und für alle Werte auf der x-Achse $(y \equiv 0, x > 0)$ gilt $dy/dt = ad \geq 0$. Man wächst.

Mehr noch. Auf der Vertikalen $x \equiv 1/b$ gilt $dx/dt = -y^2/b < 0$. Und auf der Hyperbel $xy^2 + d + 1 - y = 0$ gilt $dy/dt = -a < 0$. Man kann so für das Basissystem stückweise ein attraktives Gebiet des ersten Quadranten nachweisen (es fehlt hier der etwas längere Nachweis, dass $(0, \infty)$ instabil ist).

Die Trajektorien "von außen" und von den instabilen stationären Zuständen müssen also mit der Zeit im positiven Quadranten "irgendwo hin".

Dieses stationäre Verhalten betrachten wir im nächsten Schritt:

Die stationären Zustände des Basissystems sind die Lösungen von

$$y^3 - (1+d)y^2 + by - bd = 0 \qquad \text{mit} \quad x = 1/(b+y^2)$$

Das erhält man durch Addition der beiden stationären Gleichungen und geeignete Umstellung. Die Gleichung kann man in der d-b-Ebene betrachten.

Die Theorie der Polynome dritten Grades liefert Formeln für die Existenz der Parametergebiete mit einer, zwei oder drei Lösungen (mehr geht nicht).

Uns interessieren besonders die Parameterbereiche mit drei stationären Zuständen und die Grenzen, an denen sich das ändert. Diese Grenzen existieren für $d \leq 0.125$ und sind explizit berechenbar als:

$$y_1 = (1 + 4d + w)/4 \qquad \text{mit} \quad w = \sqrt{1 - 8d}$$
$$y_2 = (1 + 4d - w)/4$$
$$b_{12,23}(d) = \frac{(1 + 4d \pm w)(5 - 4d \mp 3w)}{16}$$

Die zugehörigen x-Werte ergeben sich wieder aus $x = 1/(b+y^2)$.
Oder, wenn $b \neq 0$, aus $x = (1 + d - y)/b$, was dasselbe ergibt.

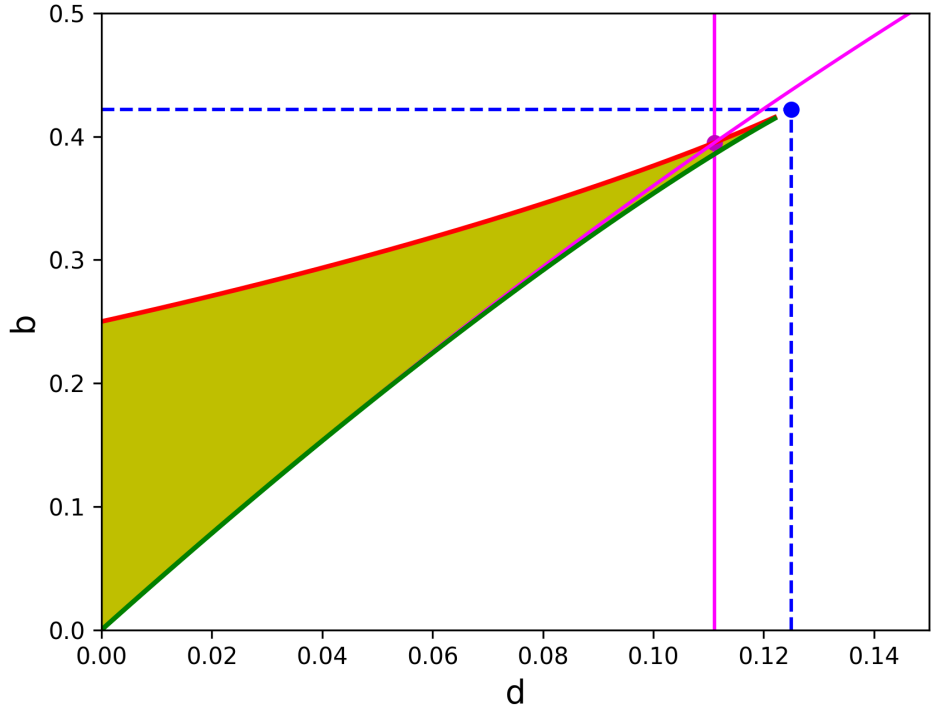
Wenn man das in der d-b-Ebene betrachtet, kann man bei der Suche nach Chaos später eine wertvolle Einschränkung des Parameterbereiches für die numerischen Simulationen erzielen.

Wenn man den Treffpunkt der beiden Kurven $b_{12}(d)$ und $b_{23}(d)$ berechnet (offenbar für $d = 1/8$), dann ergibt sich:

$$\tilde{b} = \frac{27}{64} = 0.421875$$
$$\tilde{d} = \frac{1}{8} = 0.125$$
$$\tilde{y} = \frac{3}{8} = 0.375$$
$$\tilde{x} = \frac{16}{9} \approx 1.7778$$

Der stationäre Zustand zu den Tilde-Parametern ist entartet. Auch er ist nützlich. Wir können den Wertebereich der ”normalen” stationären Zustände einplanen. Und daraus dann die dazu gehörenden interessanten Parameterwerte.

Wir können jetzt die d-b-Parameterebene zeichnen:



Dargestellt sind $b_{23}(d)$ (grün) und $b_{12}(d)$ (rot, mit $b_{12}(0) = 0.25$) und der blaue Tilde-Punkt $(\tilde{d} = 0.125, \tilde{b} = 0.421875)$ mit: $b_{12}(\tilde{d}) = b_{23}(\tilde{d})$.
Im oliven Bereich existieren drei stationäre Zustände, außerhalb einer.

Im Punkt (magenta) $(d^0 = 1/9, b^0 = 32/81)$ gilt: $b_{12}(d^0) = b_{cr}(d^0)$.
Den besonderen Parameter-Wert b_{cr} erklären wir weiter unten. Ebenso d^0 .

Uns interessieren besonders die Grenzen des Parameterbereiches mit drei stationären Zuständen, ihr Verschmelzen und Verschwinden. Die oben genannten Werte mit Tilde sind dafür wichtige Parameter.

Es gelten folgende Aussagen (Lösungen des Polynoms dritten Grades):

- Für $d < \tilde{d}$ und $b_{23}(d) < b < b_{12}(d)$ existieren 3 stationäre Zustände.
- Für $d < \tilde{d}$ und $b > b_{12}(d)$ existiert nur ein stationärer Zustand.
- Für $d < \tilde{d}$ und $b < b_{23}(d)$ existiert nur ein stationärer Zustand.
- Für $d < \tilde{d}$ und $b = b_{12,23}(d)$ existieren jeweils 2 stationäre Zustände.
- Für $d > \tilde{d}$ oder $b > \tilde{b}$ existiert stets nur ein stationärer Zustand.

Im Folgenden werden die drei stationären Zustände wie folgt unterschieden:

Der Zustand mit dem höchsten y-Wert heißt ab jetzt S_1 , der mittlere S_2 und der mit den kleineren y-Werten heißt S_3.

Wir verweisen für alle entsprechenden Untersuchungen auf Andronov et al. [1], N.N. Bautin und E.A. Leontovich [2] und Y.A. Kuznetzov [16].

Die Stablität der stationären Zustände.

Als Nächstes betrachten wir die (asymptotische) Stabilität der stationären Zustände des Basissystems.

Was wir gar nicht wollen, ist Stabilität. Stabile stationäre Zustände im 2-dimensionalen System behindern die Ausbildung von Chaos im auf drei Dimensionen aufgeblähten System mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit.

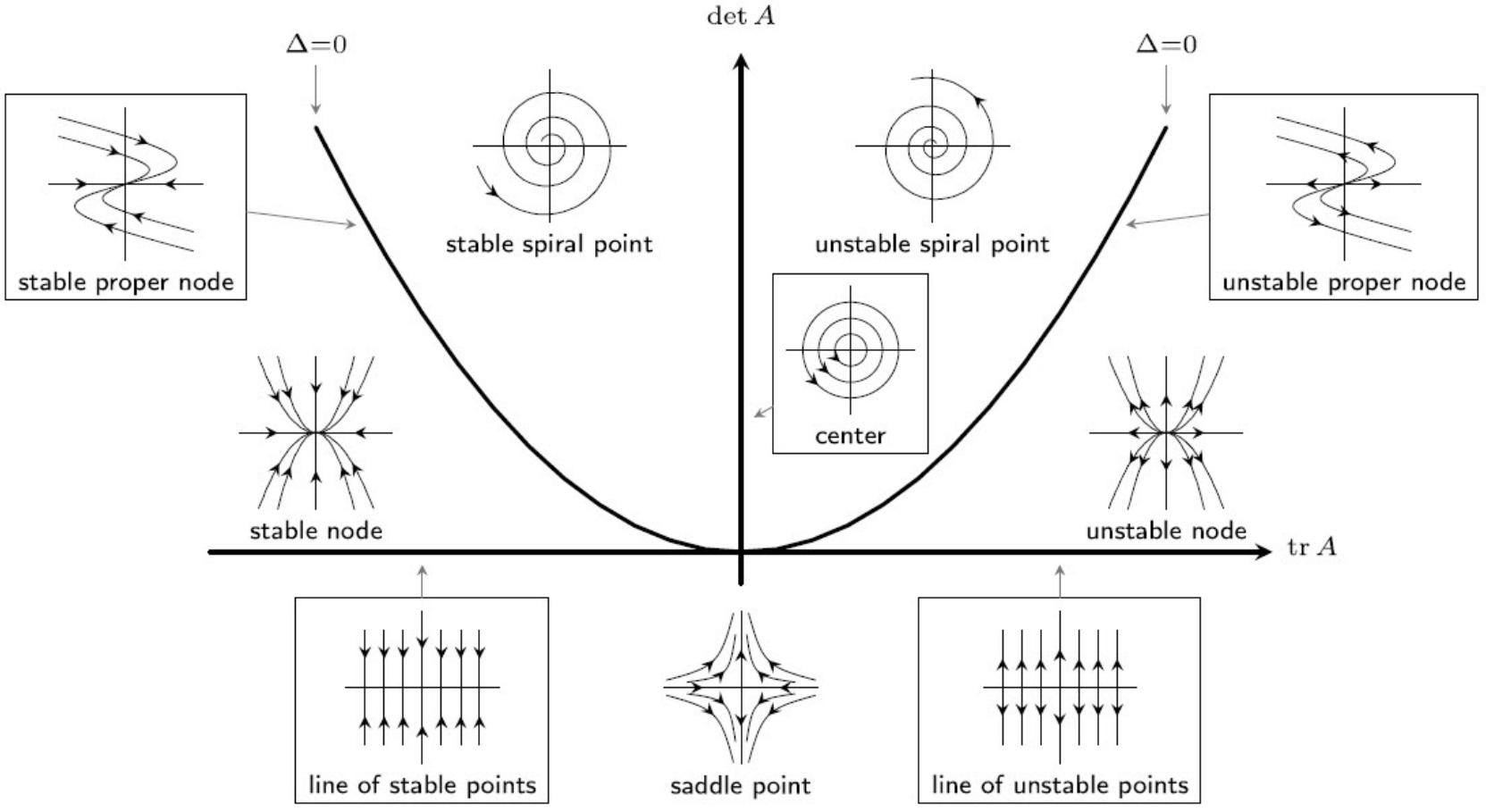
Die qualitative Theorie für stationäre Zustände von zwei-dimensionalen dynamischen Systemen vom vorliegenden Typ von Andronov et al. muss hier nur angewendet werden. Eine neuere Quelle dazu ist von A. Borzì [5].

Die Stabilität der stationären Zustände wird demnach durch die Analyse der Linearisierung des Basissystems an diesen stationären Zuständen S_i bestimmt (Satz von Hartman-Grobman).

Die Linearisierung (die Jacobi-Matrix) A des Basissystems lautet offenbar:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{dG}{dx} & \frac{dG}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b - y^2 & -2xy \\ ay^2 & 2axy - a \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen der Spur $tr(A)$, der Determinante $det(A)$ und der Diskriminate $\Delta = tr(A)^2 - 4 \cdot det(A)$ an einem stationären Zustand bestimmen seine Stabilität und Topologie wie folgt:



Dieses Stabilitätsdiagramm stammt aus der angegebenen Quelle von Borzì.

Die Koordinaten der stationären Zustände waren unabhängig von a.
Jetzt kommt a ins Spiel.

Für das hier betrachtete System gilt offenbar:

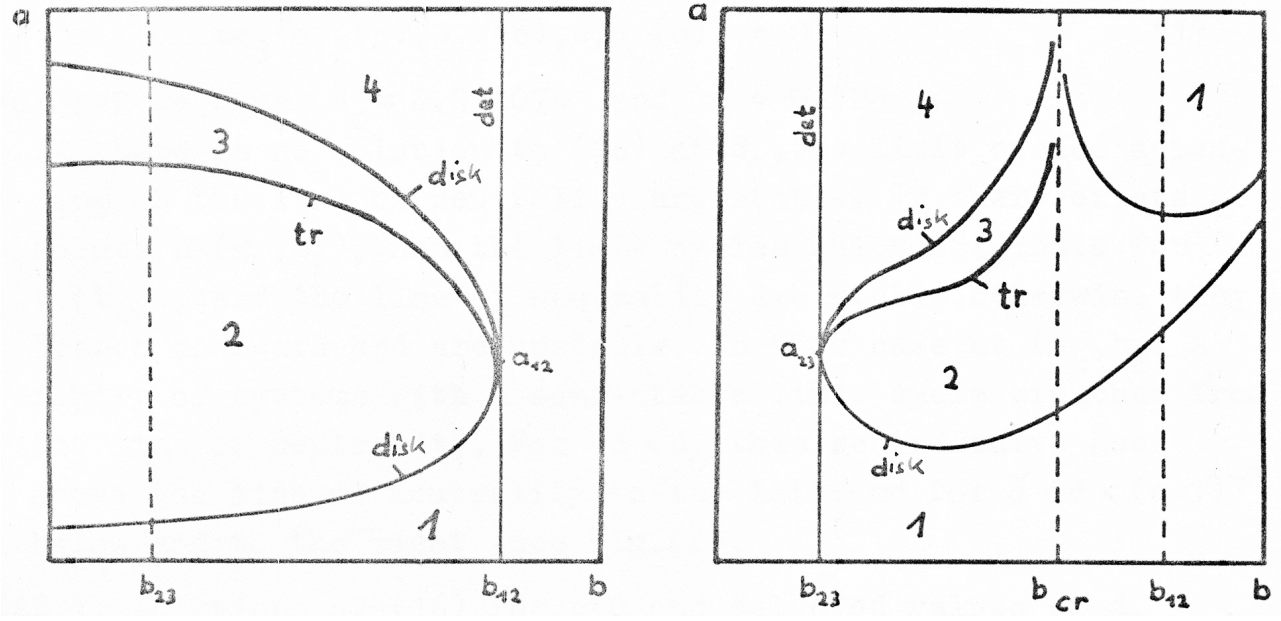
$$tr(A) = -b - y^2 + 2axy - a$$
$$det(A) = a \cdot \left(-2(1+d)y + 3y^2 + b\right)$$
$$\Delta(A) = tr(A)^2 - 4 \cdot det(A)$$

Das erfordert zuerst die Berechnung der 1 bis 3 stationären Zustände (x_i, y_i) für gegebene Werte von b und d und dann die Berechnung der Null-Kurven dieser drei Gleichungen unter Einbeziehung von a als Variablen.

Ohne etwas Programmierung geht das nicht. Wir erhalten letztlich [31]:

1. Für $d > 1$ hat $tr(A) = 0$ keine Lösung und die Spur am einzigen stationären Zustand ist stets negativ. Der Zustand ist also stets stabil. Das wollen wir nicht. Es behindert die Ausbildung von Chaos.
2. Für $\tilde{d} < d < 1$ und für $b < b_{cr}(d) = 4d(1-d)$ existiert genau eine Lösung von $tr(A) = 0$. Für hinreichend große Werte von a wird die Spur positiv, der eine existierende stationäre Zustand ist also instabil. Immerhin.

3. Für $\tilde{d} < d < 1$ und $b > b_{cr} = 4d(1-d)$ existiert ein stabiler stationärer Zustand. Uninteressant. Chaos wäre ziemlich unwahrscheinlich.
4. Der Fall $d < \tilde{d}$ erzeugt, wie oben beschrieben, im Interval $(b_{23}(d), b_{12}(d))$ drei stationäre Zustände. In der b-a-Ebene können die Kurven $tr(A) = 0$ und $disk = \Delta(A) = 0$ für zwei von ihnen dargestellt werden, der dritte ist stets ein (instabiler) Sattel S_2 und wird deshalb nicht weiter diskutiert [31]:



Links der b-a-Plot der Null-Kurven von S_1 und rechts der von S_3 für $d < \tilde{d}$. Die Gebiete 1 und 2 bezeichnen jeweils stabile Knoten und Fokusse und die Gebiete 3 und 4 instabile Fokusse und Knoten. Zu b_{cr} kommen wir gleich.

Die beiden Bilder zeigen schematisch die Null-Kurven von Spur (tr), Determinante (det) und Diskriminante (disk) für die beiden Nicht-Sättel, d.h., den Fall mit 3 stationären Zuständen.

Wenn man die beiden Bilder übereinanderlegt, muss ein Gebiet entstehen, wo sich die Gebiete 3 und 4 überschneiden, d.h., 3 instabile stationäre Zustände vorliegen. Einer davon ist ein Fokus und Chaos hat etwas mit Verdrehen zu tun.

Aber auch ein einzelner instabiler Fokus (aus Gebiet 3) kann Ausgangspunkt der Suche nach Chaos sein. Hier sind wir richtig.

Zur weiteren Einschränkung des Parameterraumes geben wir die Formeln der a-Werte für die verschwindende Spur an den Grenzen des Bereiches mit 3 stationären Zuständen an. Dazu benutzen wir die oben angegebenen expliziten Formeln für y, b und x für gegebene Werte von d und die Spur-Gleichung:

$$a_{12}(d) = (b_{12} + y_{12}^2)/(2x_{12}y_{12} - 1)$$

$$a_{23}(d) = (b_{23} + y_{23}^2)/(2x_{23}y_{23} - 1)$$

$$\tilde{a} = a_{12}(\tilde{d}) = a_{23}(\tilde{d}) = \frac{27}{16} = 1.6875$$

Da ist noch eine Sache offen: der kritische Parameter b_{cr} .
Auch scheinbar einfache dynamische (nur 2-dimensionale) Systeme haben manchmal spezielle Stellen. Das ist in unserem Fall der Wert $b_{cr} = 4d(1-d)$, an dem die Null-Kurve der Spur gegen Unendlich geht.

Was ist da los? Die Null-Kurve der Spur lautet nach a umgestellt:

$$a = \frac{b + y^2}{2xy - 1}$$

Da sieht man sofort, dass $x \cdot y = 1/2$ eine Polstelle erzeugt. Setzen wir das in die zweite Gleichung für die stationären Zustände ein, erhalten wir:

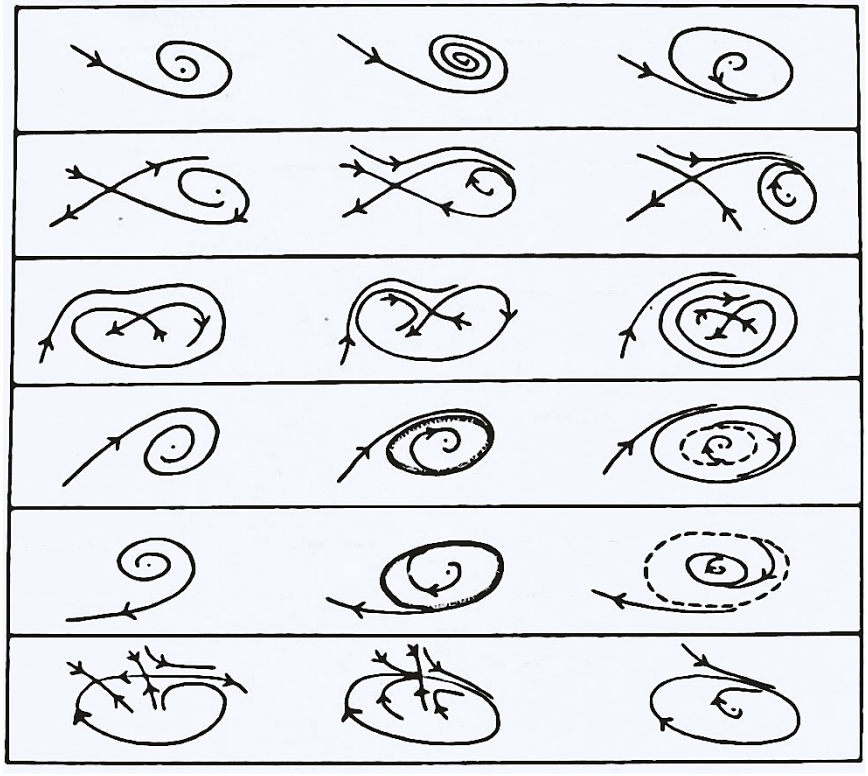
$$0 = y/2 + d - y$$

Daraus folgt $y = 2d$ und das in die erste Gleichung eingesetzt, ergibt:

$$0 = 1 - bx - d$$

Also $x = (1-d)/b$ und das beides zusammengeführt: $1/2 = 2d(1-d)/b$
Das ergibt b_{cr} . Den d-Wert mit $b_{cr} = b_{12} = 32/81$ nennen wir $d^0 = 1/9$.

Der nächste Schritt ist die Suche nach stabilen Grenzzyklen. Man kann sechs Arten ihrer Entstehung (als Bifurkationen) unterscheiden (siehe [1], [2], [32]):



Links ist jeweils die Phasenebene vor der Bifurkation und rechts nach der Entstehung eines Grenzzyklus dargestellt. Zeile 1 illustriert die Hopf-Bifurkation, die Zeilen 2 und 3 zeigen die Varianten der Entstehung aus einer Separatrizenschlinge eines Sattels und die Zeilen 4, 5 und 6 zeigen die Entstehung aus einem semi-stabilen Grenzzyklus (gepunktet) bzw. einer Sattelknotenschlinge.

Die Suche nach Parameterbereichen mit stabilen Grenzzyklen erfolgt durch die Suche nach den Grenzen solcher Bereiche, d.h., den Kurven der entsprechenden Bifurkationen in der Parameterebene (bzw. dem -raum).

Bei der Hopf-Bifurkation wirft ein stabiler Fokus einen kleinen stabilen Grenzzyklus ab und wird selber instabil. Dafür gibt es Bedingungen.

Neben dem Vorzeichenwechsel der Spur muss auch die Bautin'sche Fokusgröße α_3 [2] negativ werden (eine schöne, aber lange Formel, die wir hier übergehen).

Man muss also im Parameterraum untersuchen:

$$y^3 - (1+d)y^2 + by - bd = 0$$
$$-b - y^2 + 2axy - a = 0$$
$$\alpha_3(y, d, b, a) = 0$$

Für $\alpha_3 < 0$ verzweigen (siehe [1]) von der Spur=0-Kurve stabile Grenzzyklen.

Aber für S_3 gilt stets $\alpha_3 > 0$, d.h., es gibt keinen Umschlag der Richtung und Stabilität der durch die Hopf-Bifurkation entstehenden Grenzzyklen. Sie sind instabil und verzweigen an der Spur=0-Kurve in der b-a-Ebene nach unten.

Anders sieht die Sache an S_1 aus. Für $d < d_0 \approx 0.098076$ und auch für $\tilde{d} \leq d \leq 1/3$ hat das obige Gleichungssystem (genau) eine Lösung (a_k, b_k):

d	a_k	b_k
0.05	0.8924	0.2582
0.098076	1.0192	0.3707
0.125	1.6875	0.4219
0.15	2.4762	0.4792
0.2	5.1414	0.5944
0.3	37.7507	0.8172
1/3	∞	8/9

Wobei der Wert d_0 durch $\alpha_{\mathbf{3}}(d_0, b_{12}, a_{12}) = 0$ definiert ist.

Wenn das obige Gleichungssystem für S_1 keine Lösung hat, verzweigen an der Spur=0-Kurve nur stabile Grenzzyklen. Wenn es eine Lösung (a_k, b_k) hat, dann verzweigen für $b < b_k$ von der Spur=0-Kurve stabile Grenzzyklen nach oben und sonst (also in der b-a-Ebene rechts) instabile Grenzzyklen nach unten.

Und mehr noch: Vom Punkt (a_k, b_k) verzweigt in der b-a-Ebene zusätzlich ein Gebiet mit semi-stabilen Grenzzyklen. Ein interessanter Parameterbereich.

Aber auch die anderen Arten der Entstehung eines Grenzzyklus kommen im Basissystem vor. Es ist ein dankbares Studienobjekt (siehe [31]).

Allerdings sind für globale Verhaltensweisen wie die Herausbildung einer Separatrizenschlinge keine analytischen Methoden bekannt. Man muss den Computer bemühen und in der b-a-Parameterebene (wir fixieren jeweils den Parameter d) Gebiete gleichen dynamischen Verhaltens bestimmen.

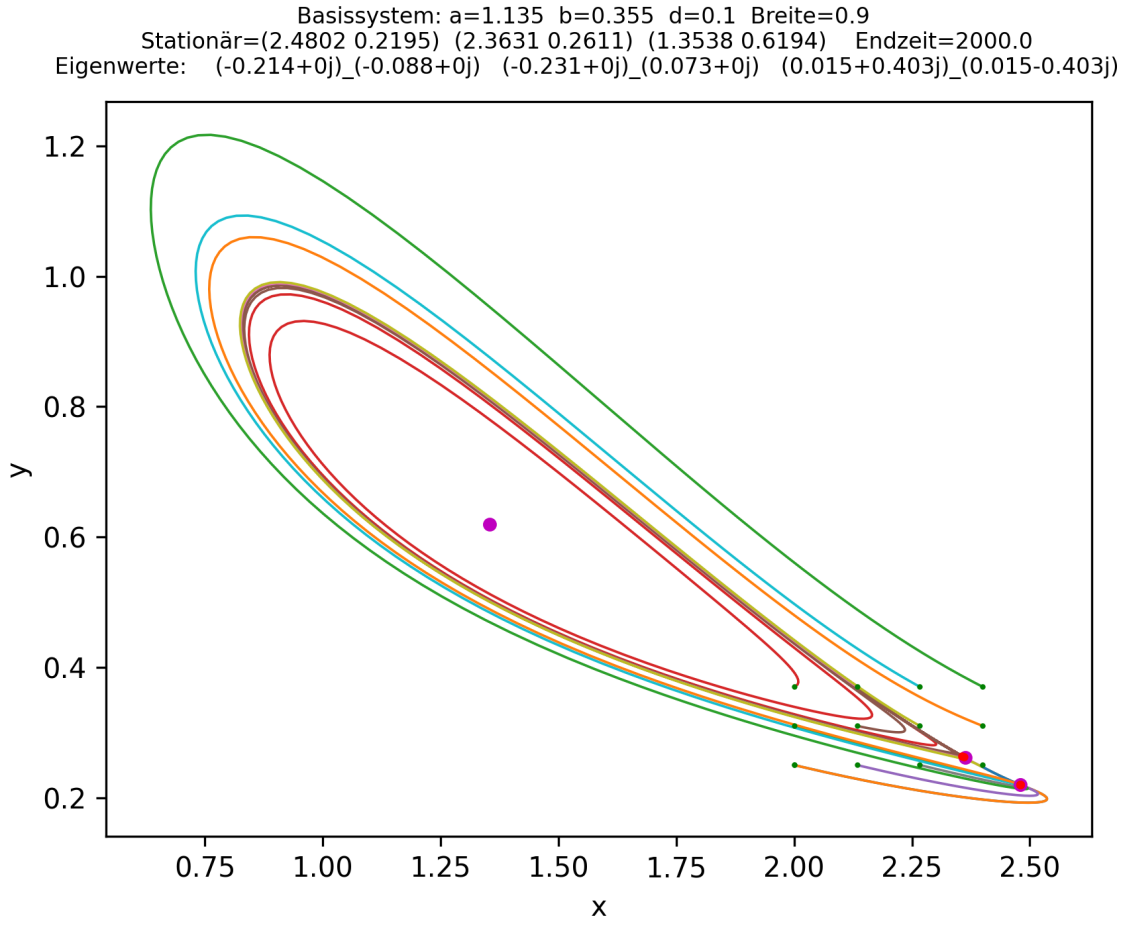
Beispiel:

Seien $d = 0.1, b = 0.355$.
Die drei stationären Zustände sind (unabhängig von a):
$S_1 \approx (1.3538,\ 0.6194),\ S_2 \approx (2.3631,\ 0.2611),\ S_3 \approx (2.4803,\ 0.2195)$

Dann entstehen Grenzzyklen aus Separatrizenschlingen an S_2 für:

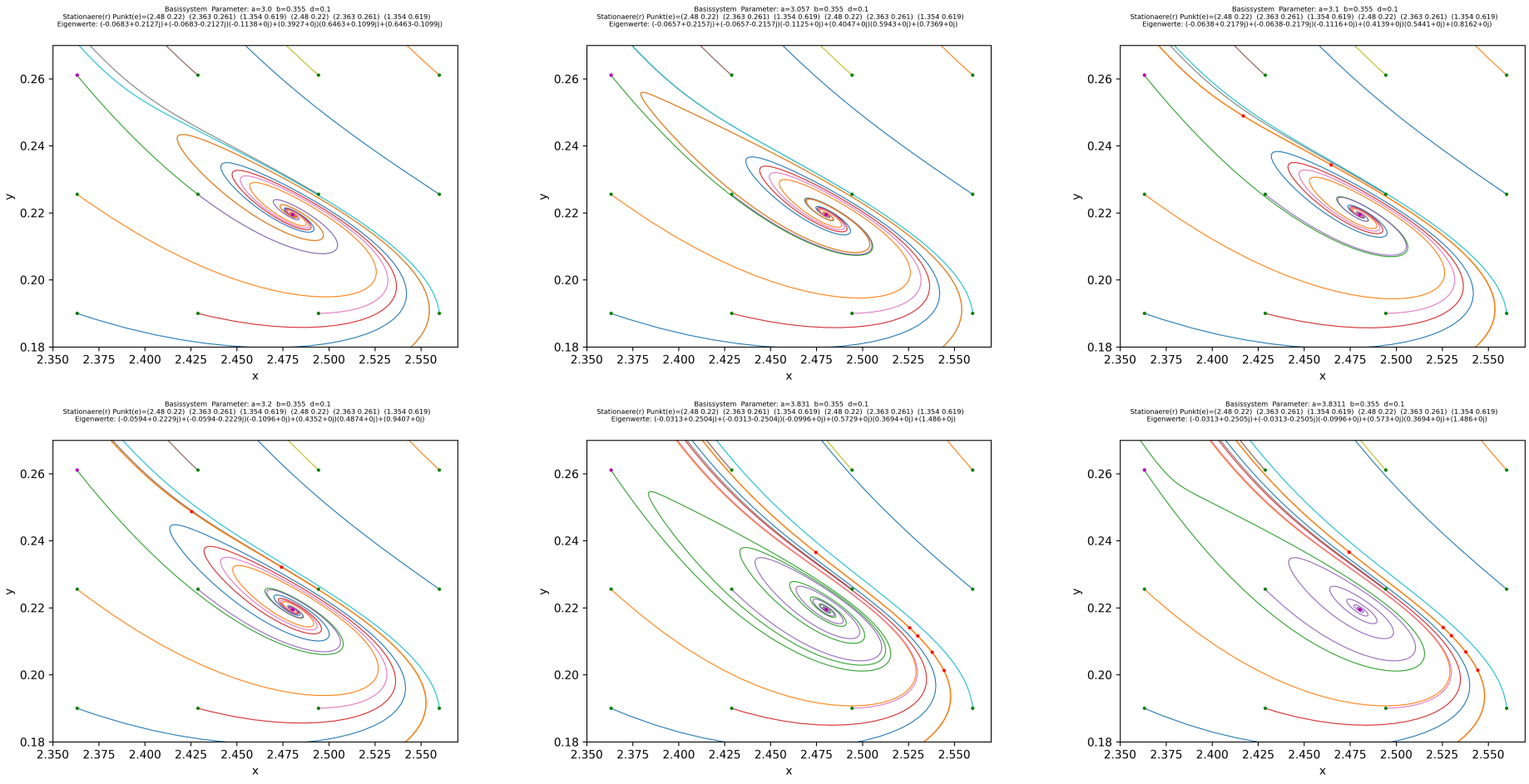
a	Bifurkation (numerisch bestimmt, Wert angenähert)
1.135	Schlinge um den instabilen Fokus S_1
3.057	Schlinge um S_1, S_3 und die anderen 2 Separatrizen von S_2
3.831	Schlinge um den stabilen Fokus S_3

An $a_0 \approx 1.808$ wechselt die Spur an S_2 nach positiv, folglich ist der um S_1 entstehende Grenzzyklus stabil, der um S_3 instabil (siehe [1]).



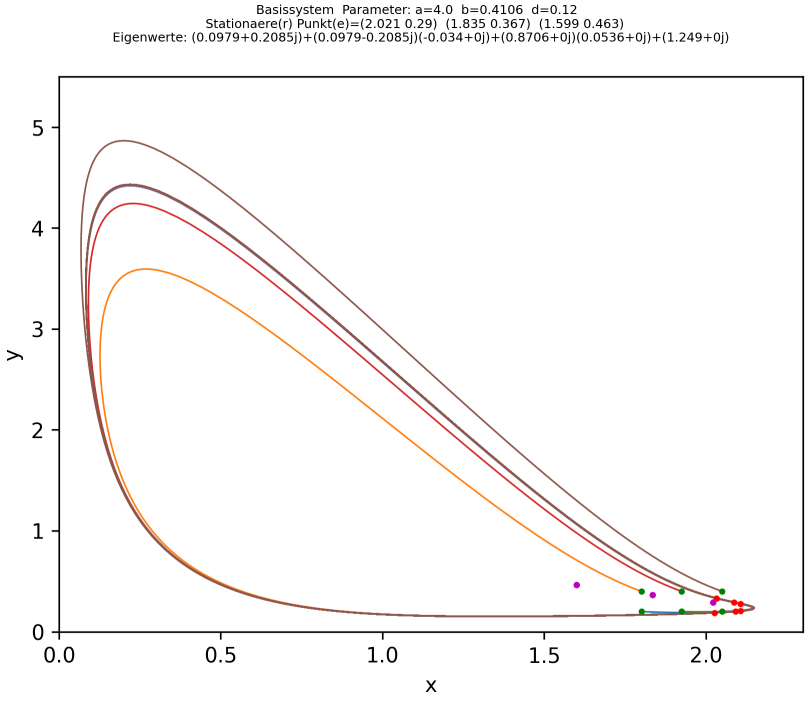
Legende: x-y-Plot zur Separatrizenschlinge am Sattel S_2 um den instabilen Fokus S_1 . Die Parameter sind $a = 1.135, b = 0.355$ und $d = 0.1$.

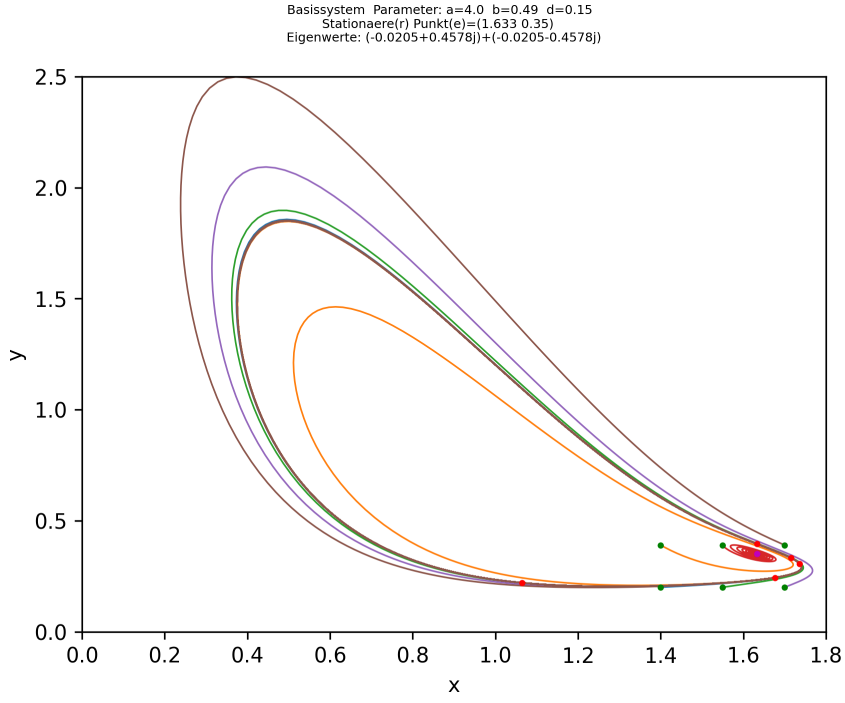
Die Startpunkte der 12 ausgewählten Trajektorien sind durch grüne Punkte, die Endpunkte durch rote Punkte hervorgehoben. Die drei stationären Zustände sind magenta Punkte. Es entsteht ein stabiler Grenzzyklus (braun). Der dritte stationäre Zustand S_3 ist ein stabiler Knoten (unten rechts).



Legende: Phasen-Plots für $b = 0.355$ und $d = 0.1$ um S_2 und S_3 (magenta).
Die Werte von a sind (von links oben) : $3.0, 3.057, 3.1, 3.2, 3.831$ und 3.8311.

Oben entsteht ein großer Grenzzyklus (braun) aus einer großen Separatrizenschlinge.
Unten entsteht ein instabiler Grenzzyklus aus einer Schlinge um S_3 (grün).
Durch einen Maus-Klick in ein kleines Bild wird es vergrößert bzw. wieder verkleinert.





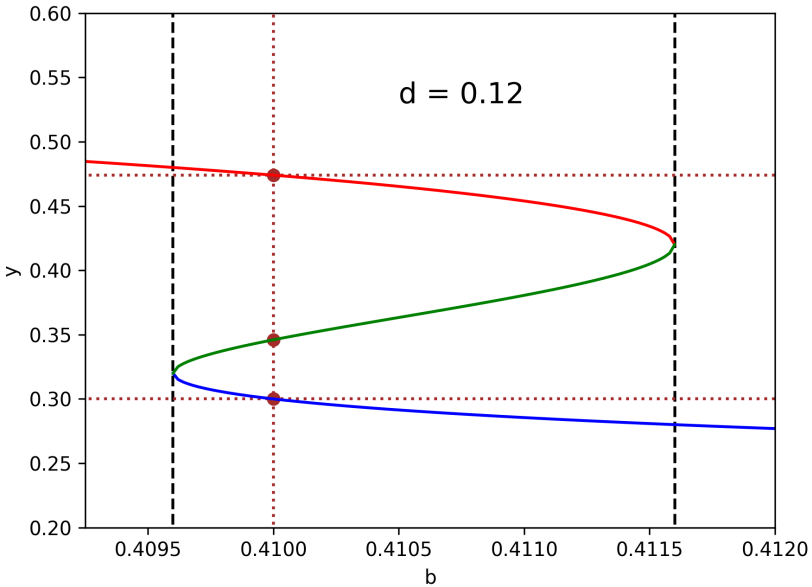
Legende: Das linke Bild zeigt einen Grenzzyklus (braun) in der x-y-Ebene um alle 3 existierenden stationären Zustände (magenta), einen instabilen Knoten (links), einen Sattel und einen instabilen Fokus (rechts). Parameter: $a = 4.0, b = 0.4106, d = 0.12$.

Das rechte Bild zeigt einen kleinen instabilen Grenzzyklus (unsichtbar um die rote Spirale) um einen stabilen Fokus und um beide herum einen großen stabilen Grenzzyklus (braun). Parameter: $a = 4.0, b = 0.49, d = 0.15$.

Auch diese Werte können als Ausgangspunkt für die Suche nach Chaos dienen.

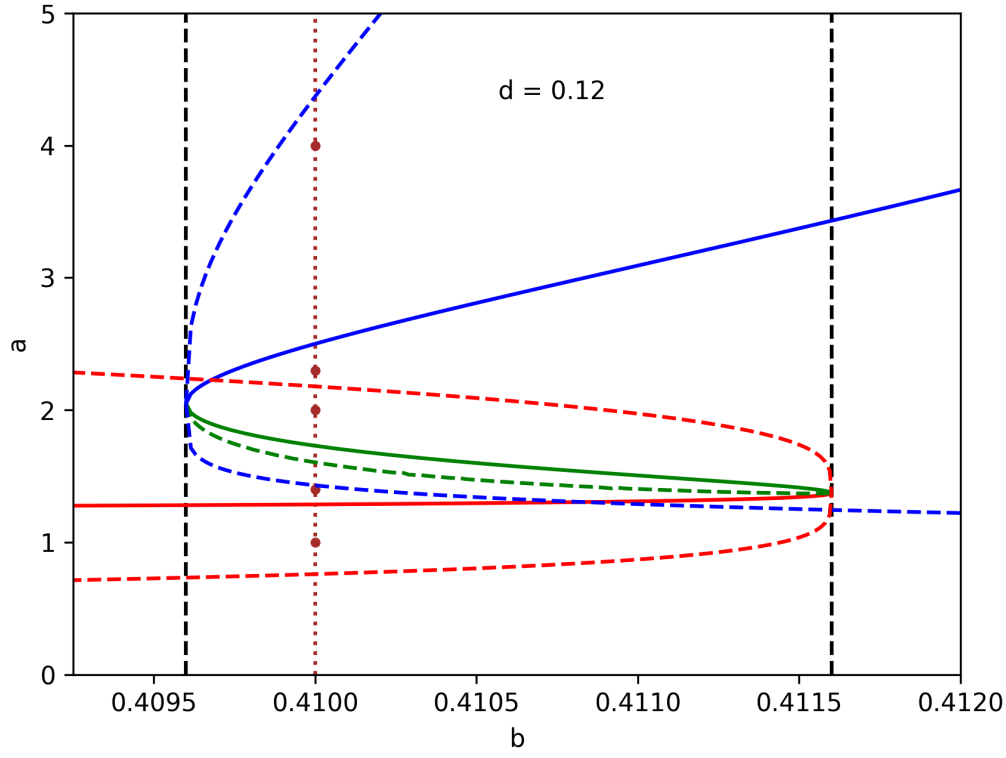
Es folgt ein größeres Beispiel: $d = 0.12$. Das hat seine Besonderheiten.

- Wegen $d < \tilde{d} = 0.125$ können wir einen (wenn auch kleinen) Bereich mit drei stationären Zuständen erwarten. Da passiert also etwas. Siehe unten.
- Wegen $d > d^0 = 1/9$ liegt $b_{cr} = 0.4228$ (rechts) außerhalb des Intervalls $[b_{23}, b_{12}] = [0.4096, 0.4116]$. Die erwünschte Hopf-Bifurkation (Grenzzyklen sind gut für die Chaossuche) kann also ohne den Einfluss der Polstelle der Spur=0-Kurve bei mittelgroßen Werten von a stattfinden.
- Wegen $d_0 \approx 0.098076 < d < \tilde{d}$ können wir auf der Spur=0-Kurve von S_1 keinen Wert mit $\alpha_3 = 0$ erwarten. Aber stabile Grenzzyklen.



Legende:
Plot der stationären y-Werte um das Intervall $[b_{23}, b_{12}]$ für S_1 (rot), S_2 (grün), S_3 (blau)

Der Fall $b = 0.41$ (braun) mit $y_1 \approx 0.4740$ und $y_3 = 0.3$ wird unten ausführlicher untersucht.

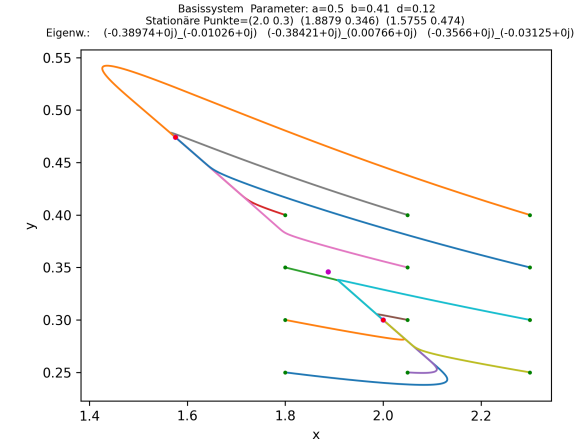


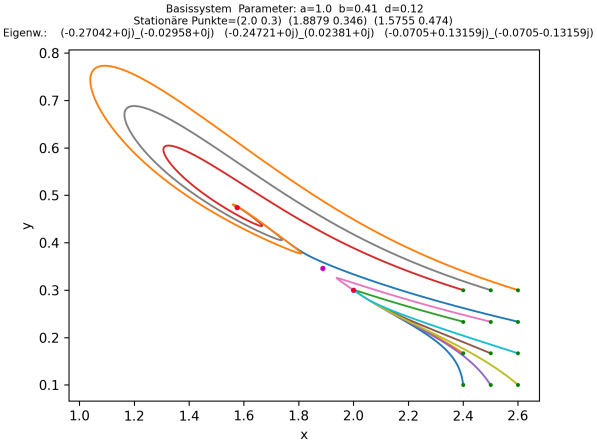
Legende: Qualität der stationären Zustände S_1 (rot) und S_3 (blau) in der b-a-Ebene. Gezeigt wird der Bereich zwischen den Existenzgrenzen von 3 stationären Zustände (gestrichelt schwarz). Dazu wurden die Nullkurven der Spur (durchgehend) und der Diskriminate (gestrichelt) numerisch berechnet.

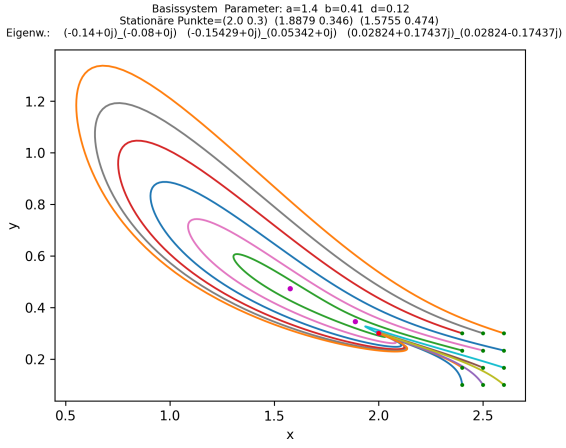
Das Passieren der Nullkurve der Spur erzeugt einen Stabilitätsumschlag, das Passieren der Nullkurve der Diskriminante den Wechsel von Fokus zu Knoten. Typische Werte von a an $b = 0.41$ sind $4.0\,, 2.3\,, 2.0\,, 1.4$ und 1.0 (braun).

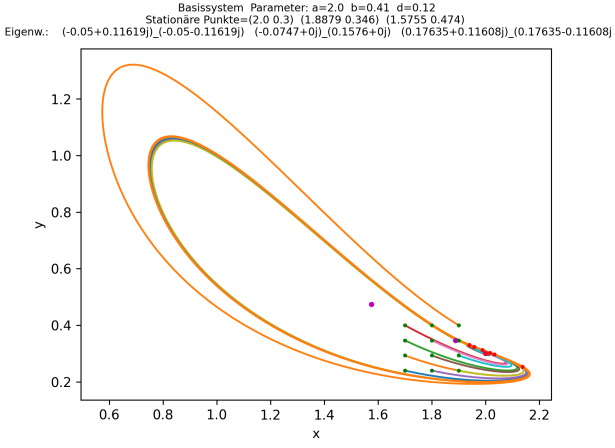
a	S_1 ($y_1 \approx 0.4740$)	S_3 ($y_3 = 0.3$)	globale Dynamik
4.0	instabiler Knoten	instabiler Fokus	stab. GZ um alles
2.500	instabiler Knoten	inst. Fokus, kein GZ	stab. GZ um alles
2.499	instabiler Knoten	stab. Fokus + inst. GZ	stab. GZ um alles
2.347	instabiler Fokus	stab. Fokus + inst. GZ	stab. GZ um alles
2.346	instabiler Fokus	stab. Fokus + Schlinge	stab. GZ um alles
2.0	instabiler Fokus	stabiler Fokus	stab. GZ um alles
1.954	instabiler Fokus	stabiler Fokus	stab. GZ um alles
1.953	instabiler Fokus	stabiler Fokus	große Schlinge
1.431	instabiler Fokus	stabiler Fokus	
1.430	instabiler Fokus	stabiler Knoten	
1.335	inst. Fokus + Schlinge	stabiler Knoten	
1.334	inst. Fokus + stab. GZ	stabiler Knoten	
1.286	inst. Fokus + stab. GZ	stabiler Knoten	
1.285	stab. Fokus, kein GZ	stabiler Knoten	
1.0	stabiler Fokus	stabiler Knoten	

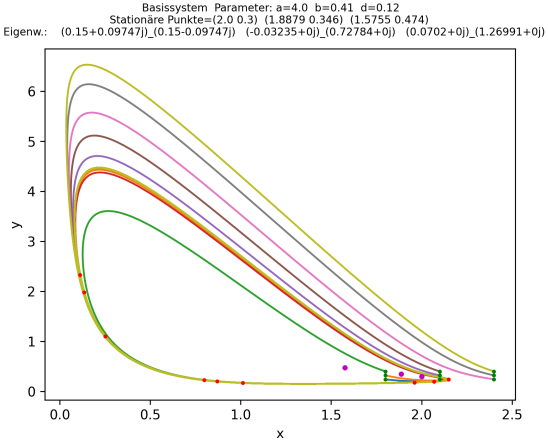
Legende: Bifurkationen am Parameter a für $b = 0.41$, $d = 0.12$.
Hopf-Bifurkation (grün), Separatrizen-Schlinge (rot), große Separatrizen-Schlinge (blau), Knoten-zu-Fokus-Bifurkation (hellblau).

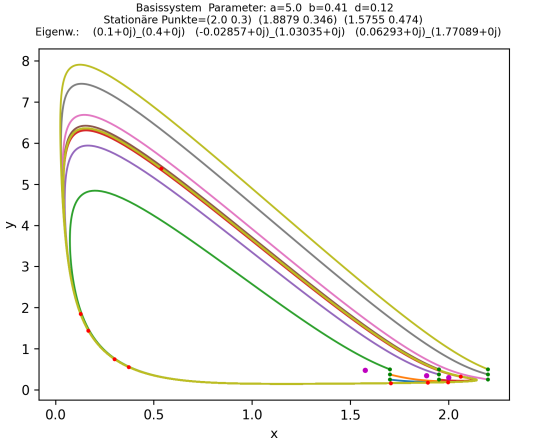








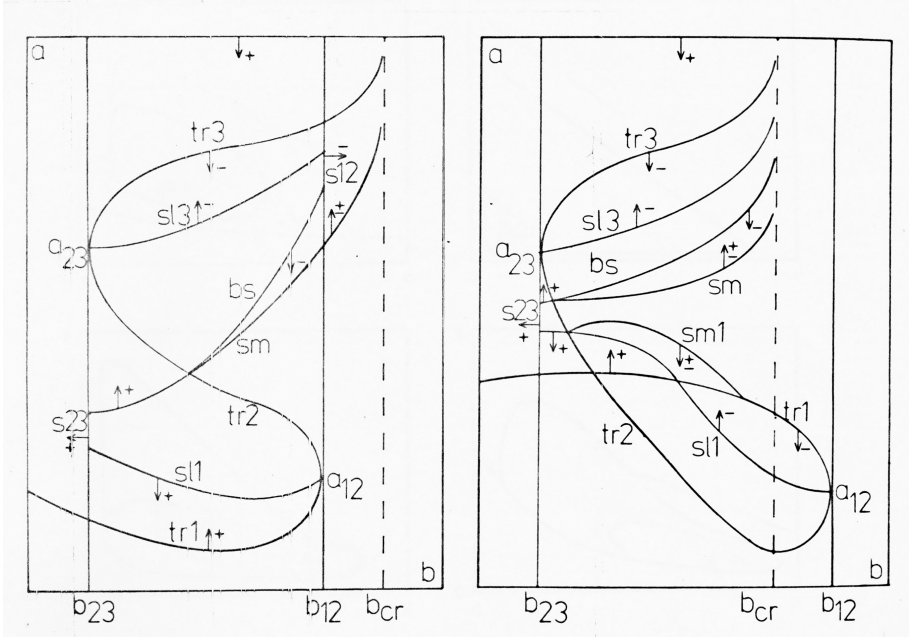




Legende: Phasen-Plots für $b = 0.41$ und $d = 0.12$ (siehe Tabelle).

Die Werte von a sind (von links oben): 0.5, 1.0, 1.4, 2.0, 4.0 und 5.0 .
Die Plots zeigen typisches Verhalten des Basissystems zwischen den Bifurkationen.
Durch einen Maus-Klick in ein kleines Bild wird es vergrößert bzw. wieder verkleinert.

Wenn wir die bisherigen Betrachtungen in der b-a-Ebene für 2 charakteristische Fälle des Parameters d zusammenfassen, ergibt sich [31] :



Links: $d_0 < d < \tilde{d} = 0.125$ und $b_{12}(d) < b_{cr}(d)$ (z.B. $d = 0.12$).
Rechts: $d < d_0 \approx 0.098076$ und $b_{12}(d) > b_{cr}(d)$ (z.B. $d = 0.05$).

Die Kurven tr{i} sind Lösungen von $tr(A) = 0$ an den stationären Zuständen.
Die Kurven sl{i} bzw. bs bezeichnen das Auftreten einer Separatrizen-schlinge vom Sattel S_2 um den stationären Zustand S_1 bzw. S_3 bzw. beide.
Die Kurven sm1 bzw. sm bezeichnen das Auftreten eines semi-stabilen Grenzzyklus um den stationären Zustand S_1 bzw. alle drei.
Die Symbole '+' bzw. '-' geben die Stabilität der entstehenden Grenzzyklen an.

Was bedeutet das alles für unser kleines Chaos-Projekt?

- Wir merken uns $d \leq \tilde{d}$ und $b_{23}(d) < b < b_{12}(d)$ und $b < b_{cr}$.
  Denn da existieren 3 stationäre Zustände, z.B. die b-Intervalle:

d	b_{23}	b_{12}	b_{cr}
0.05	0.1894052	0.3055948	0.19
d_0=0.098076	0.3480756	0.3730666	0.35383
0.1	0.3538197	0.3761803	0.36
d^0=1/9	0.3858	32/81	32/81
0.12	0.4096	0.4116	0.4224
$\tilde{d}$=0.125	27/64	27/64	7/16

- Und die dazu passenden Spur=0-Bereiche des Parameters a:

d	a_{23}	a_{12}
0.05	3.3611793	0.6888207
d_0=0.098076	2.5980803	1.0192357
0.1	2.5602631	1.0397369
d^0=1/9	2.3148148	1.1851852
0.12	2.048	1.372
$\tilde{d}$=0.125	27/16	27/16

- Ein Vorschlag für die Chaos-Suche: $d \approx 0.1, b \approx 0.35, a \approx 4.0$

Eine Simulation des Basissystems in Python (mit Standard-Bibliotheken):

```
import scipy, numpy
import matplotlib.pylab as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.optimize import fsolve
from scipy.linalg import eig
def basis(t,state):
    x = state[0];  y = state[1]; vau = x*y**2
    return[1.0 - b*x - vau, a*(vau + d - y)]
def Jacobi(q):
    x,y=q;  xy=x*y;  yy=y**2;
    return([-b-yy, -2.0*xy],[a*yy, 2.0*a*xy-a])
def Poly(y):
    return y**3 - (1.0+d)*y**2 + b*y - b*d
a=4.0; b=0.35; d=0.1; end=1000.0; start=[1.0,1.0]; Y0=d;
Y = fsolve(Poly, Y0, xtol=1.0e-7, maxfev=400, factor=1.0)[0]
X = solve_ivp(basis,(0.0,end),start, rtol=1.0e-9, atol=1.0e-10)
```

Poly dient der Berechnung der stationären Zustände (Aufruf mit fsolve).
Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix kann man mit eig aus scipy bestimmen.
Das Programm solve_ivp aus scipy löst das Anfangswertproblem.
Die Darstellung der Trajektorien kann man mit matplotlib realisieren.

Andere Basissysteme

Mit dem verallgemeinerten Sel'kov System haben wir offenbar ein geeignetes Basissystem als Ausgangssystem für die Suche nach Chaos.

Das 'Basissystem' ist aber nur eines von vielen ebenen dynamischen Systemen mit kompliziertem dynamischen Verhalten. Wenn der hier propagierte Ansatz allgemein zur Chaos-Suche taugt, dann muss er es auch bei ihnen.

Wir werden daher auch Verallgemeinerungen (Erweiterungen) von bekannten ebenen autonomen Systemen untersuchen [8], [13], [34], [21], [10]:

- das Van der Pol-System
- der Brusselator
- Lotka-Volterra-Systeme (Gause-Modelle)
- das FitzHugh-Nagumo-Modell
- Beschreibungen des Kreises
- Kooperation (Symbiose) oder Konkurrenz um Ressourcen
- ein Modell des Wettrüstens

Wir werden diese Systeme manchmal durch neue Parameter verallgemeinern, die 3. Dimension gewinnen wir durch Pendel-Polynome wie beim Basissystem.

Das Basissystem und mechanische Oszillatoren: nur entfernt verwandt.

Die lineare Transformation

$$p = 1 - bx + d - y$$
$$q = x + y/a$$

zeigt die nutzlose Verwandtschaft des Basissystems mit Modellen von mechanischen Oszillatoren. Es ergibt sich das System dritten Grades [33]:

$$\begin{aligned}
\frac{dq}{dt} &= p \\
\frac{dp}{dt} &= a + bd + c(1+d)^3 + \big(-ab - c(1+d)^2(a+2b)\big)q + \\
&\quad + \big(-a - b - 3c(1+d)^2\big)p + c\Big((b+2a)(1+d)bq^2 + \\
&\quad + 2(1+d)(a+2b)qp + 3(1+d)p^2 - ab^2q^3 - \\
&\quad - (b+2a)bq^2p - (a+2b)qp^2 - p^3\Big) \qquad\qquad c = (a/(a-b))^2
\end{aligned}$$

Aus 6 wurden 10 Monome, also deutlich komplizierter. Kein Fortschritt.

Chaos im Basissystem

Wie bereits gesagt, durch Verwendung von trigonometrischen Funktionen kann man auch in ebenen Systemen relativ leicht Chaos erzeugen. Wir wollen das hier aber nicht. Aber zeigen tun wir es trotzdem. Als ”Nicht-Beispiel”.

$$\frac{dq}{dt} = 1 - bx - xy^2$$
$$\frac{dp}{dt} = a\left(xy^2 + d(1 + e \cdot cos(wt)) - y\right)$$

In 1986 wurde gezeigt, dass man an allen Termen des Basissystems durch Multiplikation mit einem trigonometrischen Faktor Chaos erzeugen kann [33].

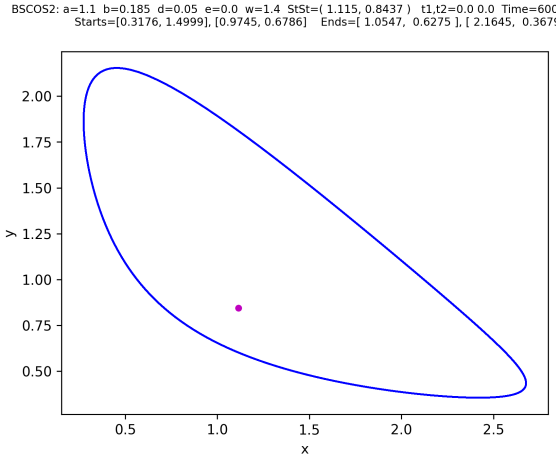
Das wird in den folgenden Bildern für den Parameter d demonstriert.
Im betrachteten Intervall für den Parameter e erkennt man zwei Routen ins Chaos, die uns später wiederbegegnen werden, die Periode-3-Feigenbaum-Route und die Bifurkation eines Attraktors aus einem einfachen Grenzzyklus.

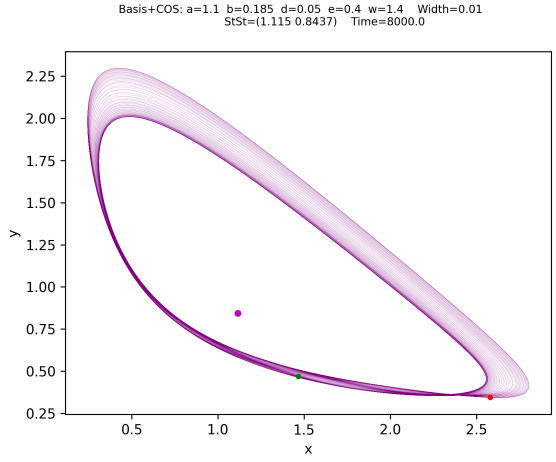
Die Darstellung von Chaos in trigonometrischen Systemen ist etwas speziell. Man kann die Zeit periodisch als dritte Dimension einbauen wie in der zitierten Quelle. Für das ”Nicht-Beispiel” sollten aber auch einfache x-y-Plots reichen:

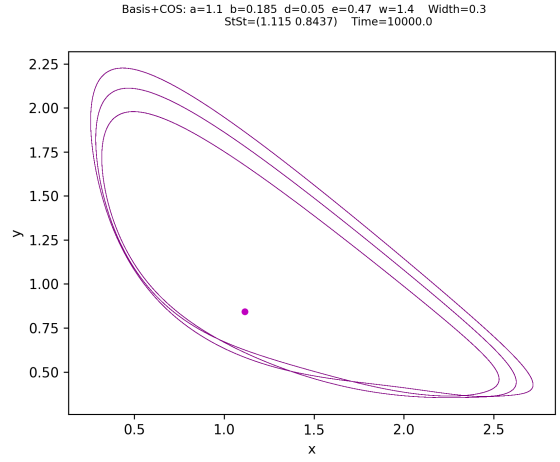
e	Dynamik	$\lambda_1 > 0$
0.00	Ein einfacher Grenzzyklus.	
0.40	Quasi-periodische Trajektorien.	0.000
0.47	Ein dreifacher Grenzzyklus.	
0.82	Ein sechsfacher Grenzzyklus.	
0.84	Ein zwölffacher Grenzzyklus.	
0.85	Ein 24-facher Grenzzyklus.	
0.89	Ein dreifaches Chaos-Band.	0.0145
1.04	Koexistenz von Chaos und einem Grenzzyklus.	0.031
1.08	Ein 6-faches Chaos-Band und ein Grenzzyklus.	0.005
1.18	Koexistenz von Chaos und einem Grenzzyklus.	0.037
1.26	Koexistenz von Chaos und einem Grenzzyklus.	0.040
1.30	Ein einfacher Grenzzyklus.	

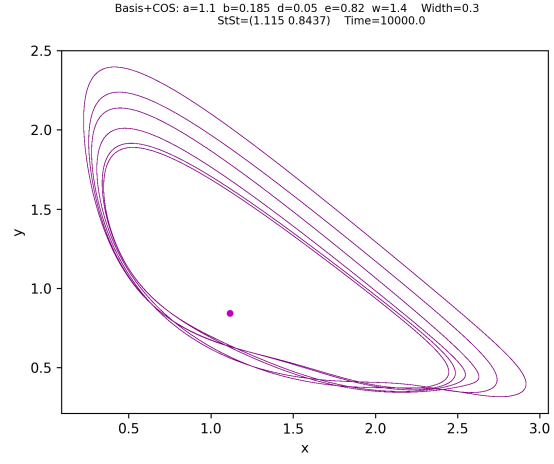
Stationäre Trajektorien des Nicht-Beispiels für
$a = 1.1,\ b = 0.185,\ d = 0.05,\ w = 1.4$ und hochlaufende Werte von e.

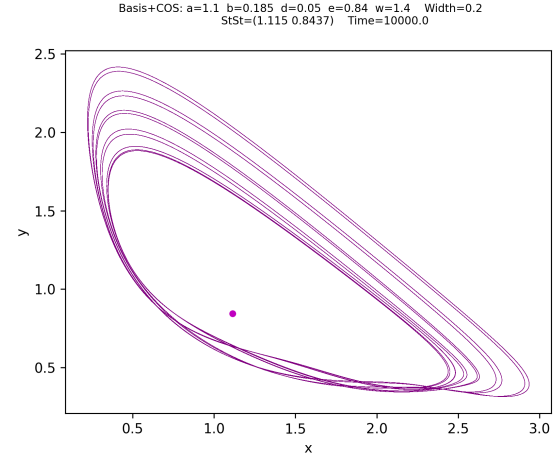
Ein Grenzzyklus bläht sich zu einem Torus mit quasi-periodischen Trajektorien auf. Daraus entsteht ein dreifacher Grenzzyklus, der eine Verdopplungskaskade durchläuft. Über ein dreifaches Chaos-Band führt die Route in kompaktes Chaos. Schlagartig taucht zusätzlich ein Grenzzyklus auf. Die Route endet dann wieder schlagartig mit dem Verschwinden des Chaos.

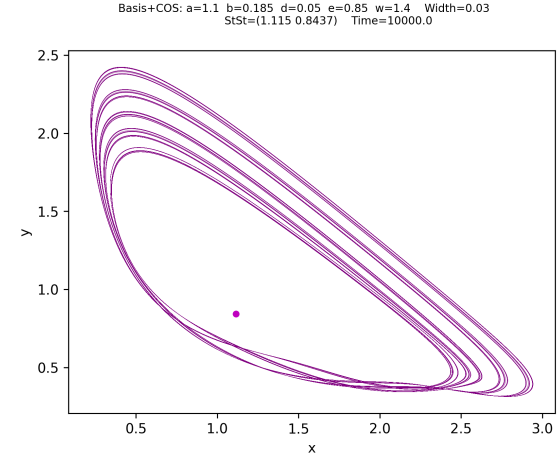






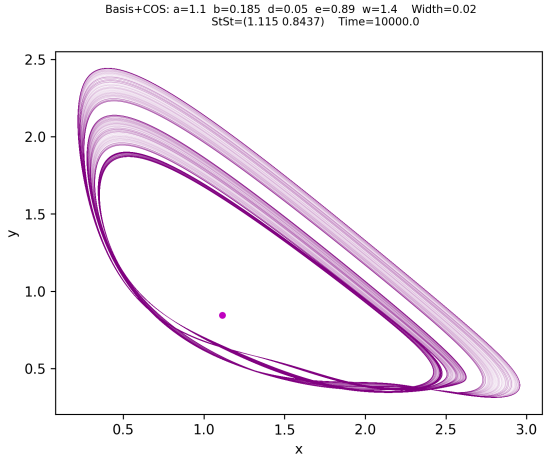


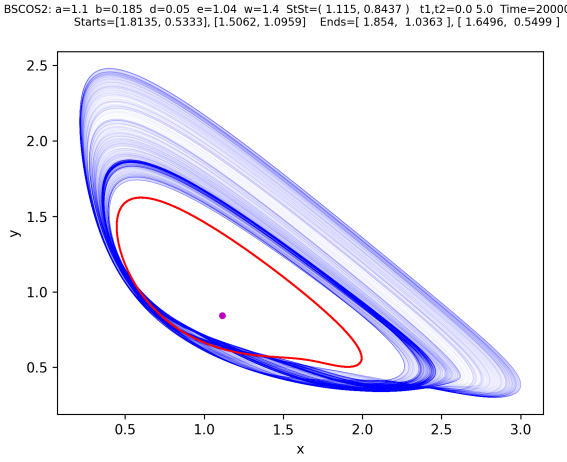


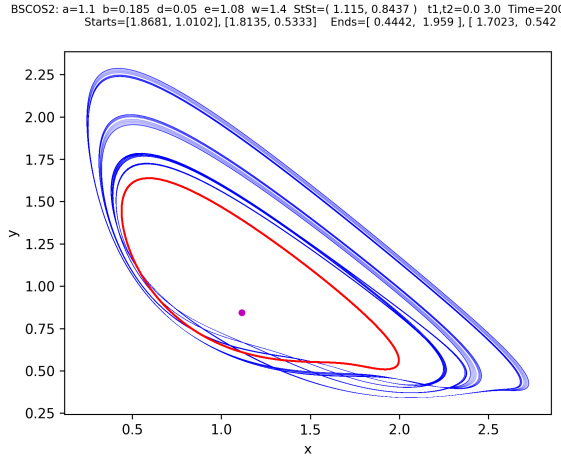


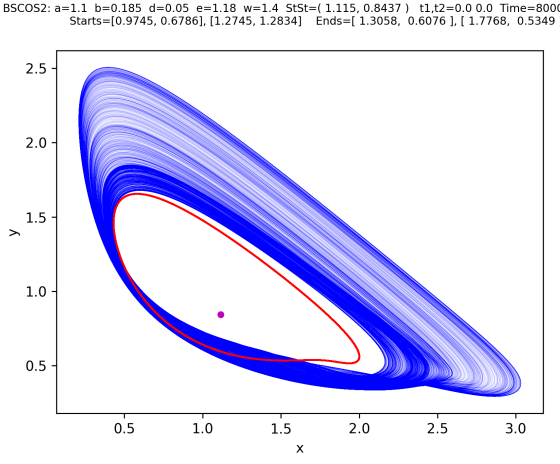
Legende: x-y-Plots zum **Nicht-Beispiel** für $a = 1.1$, $b = 0.185$, $d = 0.05$, $w = 1.4$ und wachsende Werte von e (die oberen sechs Zeilen der Tabelle).

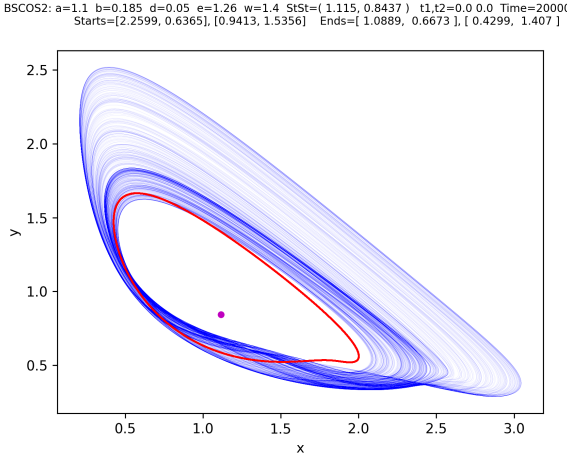
Ein Grenzzyklus erleidet eine verallgemeinerte Hopf-Bifurkation. Dabei entsteht im 3D-Raum mit periodischer Zeit-Achse ein Torus, dann ein dreifacher Grenzzyklus. Dieser durchläuft eine Verdopplungs-Route. Er wird zuerst 6-fach, dann 12-fach und 24-fach (Bilder 3 bis 6). Details zu Routen ins Chaos folgen im nächsten Kapitel.

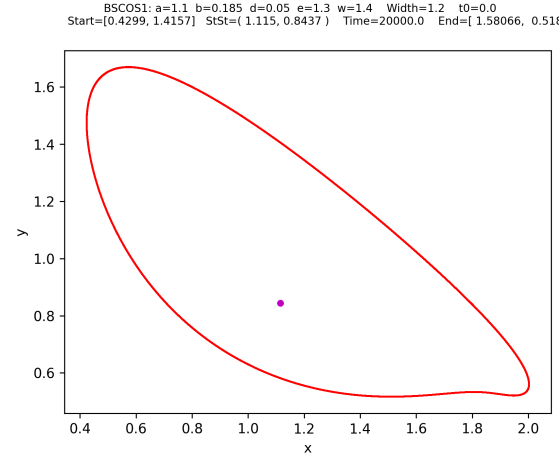












Legende: x-y-Plots zum **Nicht-Beispiel** für $a = 1.1$, $b = 0.185$, $d = 0.05$, $w = 1.4$ und wachsende Werte von e (die unteren sechs Zeilen der Tabelle).

Die Feigenbaum-Route setzt sich fort. Wir sehen ein 3-faches Chaos-Band (Bild 1) und kompaktes Chaos. Das Chaos bildet dann einen Grenzzyklus aus (Bild 2, rot), wir haben Koexistenz. Es folgt ein Fenster mit 6-fachen Chaos-Bändern (Bild 3) und wieder Chaos (Bild 4). Dann verschwindet das Chaos schlagartig. Der Grenzzyklus verbleibt (Bild 6).

3. Das Chaossystem

Jetzt kann die Bewegungsgleichung für die dritte Variable formuliert werden. Die Idee ist: Wir zerreißen das Basissystem geeignet in die dritte Dimension. Und zwar so, dass eine nicht-triviale stabile Struktur zerrissen wird.

Also, weg von der z=0-Ebene mit einer komplizierten Struktur des Basissystems (z.B. einem Grenzzyklus) und woanders wieder zurück. Und wieder weg. Usw. Im hier betrachteten ersten Fall ist das die Differentialgleichnung aus [30]:

$$\frac{dz}{dt} = f \cdot F_2(x, y, z) = f \cdot (exy - z)$$

In der dritten Dimension z wächst die Bewegung in z-Richtung mit exy , aber nur bis z durch sein negatives Vorzeichen die Trajektorie wieder in Richtung der x-y-Ebene ($z \equiv 0$) zurückschickt. Da überwiegt wieder exy. Und so weiter.

Und gleichzeitig taucht $F_2(x, y, z)$ auch in der ersten Differentialgleichnung auf. Dadurch wird ein zweiter Pendel-Mechanismus erzeugt, jetzt aber für x.

Der neue Parameter f gestattet (durch kleine Werte) ein langsames Anschalten der dritten Dimension. Die Pendel-Parameter e und f sind oft unsere Arbeitspferde. Sie werden variiert. Aber nicht nur.

Wir untersuchen also das System (und nennen es ab jetzt das ”Chaossystem”):

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bx - xy^2 - (exy - z)$$
$$\frac{dy}{dt} = a\,(xy^2 + d - y)$$
$$\frac{dz}{dt} = f\,(exy - z)$$

Mit einfacher Rechentechnik wurde es vom Autor dieser Schrift bereits 1978 untersucht [30]. Jedenfalls weitgehend.

Wir suchen dazu im Parameterraum nach bekannten Bifurkationen ins Chaos (die gibt es, siehe weiter unten). Ohne Programmierung geht das nicht.

Wir können dabei mit Parameterbereichen beginnen, die im Basissystem erfreulich komplizierte Bewegungen erzeugt haben, z.B., wie oben gezeigt: $a = 4.0, b = 0.35, d = 0.1$ (ein instabiler stationärer Zustand und ein stabiler Grenzzyklus drum herum). Aber dabei kann es dann nicht bleiben.

Bei der Suche nach Chaos gibt es allerdings ein prinzipielles Problem:

Per Definition (sensible Abhängigkeit von den Startwerten) kann die numerische Berechnung chaotischer Trajektorien nicht exakt sein.

Jeder Rechenschritt erzeugt einen kleinen Fehler (jede numerische Methode ist nur annähernd exakt und die notwendigen Rundungen im Rechner erzeugen weitere Fehler). Bei stabilen stationären Zuständen und Grenzzyklen wirkt sich das nicht wesentlich aus. Die berechnete Kurve wird durch die asymptotische Stabilität laufend wieder in die ”richtige” Richtung zurück gezwungen.

Ganz anders beim Chaos. Mit jedem Rechenschritt wächst die Abweichung von der korrekten Kurve. Keine berechnete Trajektorie ist korrekt. Das bedeutet:

- Vertrauen sie der Numerik nicht (blind). Auch nicht dem optischen Eindruck.
- Vertrauen sie den stabilen Trajektorien, die es im Umfeld des Chaos gibt.
- Vertrauen sie den stationären Zuständen und ihrer Stabilität.
- Vertrauen sie den bekannten Routen ins Chaos. So muss es aussehen.
- Benutzen sie die Lyapunov-Exponenten. Das ist numerisch aufwendig, aber lohnend. Wenn der größte Lyapunov-Exponent λ_1 erkennbar (reproduzierbar) positiv ist (es gibt Faustregeln), ist es Chaos.

Die Lyapunov-Exponenten sind das A und O der Chaos-Suche. Das bedeutet Programmierung. Wir kommen darauf zurück. Mehrfach.

Das dynamische Verhalten des Chaossystems wird hier als Projektion in die x-y- oder andere Ebene dargestellt. Es werden zumeist stationäre Trajektorien gezeigt. Das heißt, es wird zwar stets das Einlaufen in ein stationäres Verhalten vorberechnet, aber nicht angezeigt. Manchmal aber doch.

Zur Unterstützung werden manchmal Phasenpunkte farbig hervorgehoben:

- grün für die Anfangspunkte einer Trajektorie (nur wenn es sinnvoll ist)
- rot für die berechneten Endpunkte von Trajektorien (Endzeit erreicht)
- magenta für stationäre Zustände (nur wenn es sinnvoll ist)

Bitte beachten sie für den gesamten Text: Durch einen Maus-Klick in ein kleines Bild wird es vergrößert, durch einen Klick in das große Bild wird es wieder an seine Stelle im Text verkleinert.

Bitte beachten sie weiterhin: Die kleinen Legenden oben in den etwa 5000 gezeigten Plots dienen nur zur notwendigen Orientierung für den Autor. Sie sind nicht einheitlich, sie sind kein Teil des Textes. Sie können überlesen werden.

Es macht Sinn, stabile stationäre Zustände zu vermeiden. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, dass Chaos parallel zu stabilen stationären Zuständen oder Grenzzyklen auftritt (siehe Beispiele), aber die Simulationen des Systems werden deutlich schwieriger, weil man stets versuchen muss, Anfangswerte zu vermeiden, die zu einem stabilen stationären Zustand oder Grenzzyklus führen.

Die Idee dieser Abhandlung ist ja: ohne langwierige Analysen in den Beispielen durch einen einfachen Ansatz schnell und viel Chaos zu finden.

Trotzdem ein paar Anmerkungen zur Mathematik drei-dimensionaler Systeme.

Wir betrachten dazu jetzt exemplarisch das Chaossystem des Autors [30].

Die Stabilität der stationären Zustände wird auch hier durch die Analyse der Linearisierung des Chaossystems an den stationären Zuständen S_i ($i = 1, 2, 3$) bestimmbar (Stichwort Jacobi-Matrix). Der Aufwand kann sich lohnen.

Unter den vielen Chaos-Büchern sind dabei das Buch von Magnitskii und Sidorov [19] und das Internet-Kapitel von Magnitskii in [18] besonders zu empfehlen.

Die Jacobi-Matrix A des Chaossystems lautet offenbar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b - y^2 - ey & -2xy - ex & 1 \\ ay^2 & 2axy - a & 0 \\ efy & efx & -f \end{pmatrix}$$

Nach den Hurwitzkriterien [14] ist ein stationärer Zustand (gemeint ist, asymptotisch) stabil, wenn gilt:

$$h_1 > 0\,, \qquad h_3 > 0\,, \qquad h_1 \cdot h_2 - h_3 > 0$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} h_1 &= -a_{11} - a_{22} - a_{33} \\ h_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \\ h_3 &= -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Die Ähnlichkeit zu Spur und Determinante im Basissystem ist auffallend.

Im Fall des Chaossystems gilt:

$$h_1 = b + y^2 + ey - 2axy + a + f$$
$$h_2 = a\,(b + ey + y^2 + f)(1 - 2xy) + 2axy^3 + f(b + y^2) + aexy^2$$
$$h_3 = a\,f\,(b + y^2 - 2bxy)$$

Es gibt mehrere Arten von stabilen und instabilen stationären Zuständen im drei-dimensionalen Phasenraum. Wir hätten es gern instabil.

Für uns sind deshalb zwei Grenzflächen im Parameterraum interessant:

$h_3 = 0$	Zwei stationären Zustände verschmelzen und verschwinden.
$h_1 h_2 - h_3 = 0$	Ein stationärer Zustand ändert seine Stabilität.

Im Chaossystem ist das, wie versprochen, relativ einfach.

Die Gewinnung der stationären Zustände x, y können wir nämlich vom Basissystem übernehmen. Hinzu kommt die Gleichung für den stationären z-Wert:

$$z = e\,x\,y$$

Auch die Grenzen der Existenz der 1 bis 3 stationären Zuständen in der d-b-Ebene können übernommen werden (a, e, f spielen keine Rolle).

Der stationäre Zustand mit den höheren y-Werten soll ab jetzt wieder S_1 heißen, der mit den kleineren Werten S_3 und der mittlere S_2 . Und wie gehabt:

S_1 existiert nur für $0 \leq b \leq b_{12}(d)$ und S_3 existiert nur für $b \geq b_{23}(d)$.

Die Null-Kurven (bei Analyse in einer Parameterebene) für die Spur h_1 , die Determinante h_3 und die Diskriminate $h_1 h_2 - h_3 = 0$ müssen und können numerisch berechnet werden.

Das erfolgt z.B. für fixierte Werte von d, e, und f in der b-a-Ebene (oder in der b-e-Ebene mit a fixiert). Dabei ist für den Stabilitätsumschlag nur zu lösen:

$$y^3 - (1+d)y^2 + by - bd = 0$$
$$h_1 h_2 - h_3 = 0$$

mit y und a als Variablen und den oben aufgeführten Formeln für x und z .

Das ergibt unter anderem folgende Resultate:

- S_2 existiert für $b_{23}(d) \leq b \leq b_{12}(d)$ und ist wegen $h_3 < 0$ stets instabil (und zwar vom Satteltyp).
- Für S_1 und S_3 gilt stets $h_3 > 0$ Die sind also nie vom Sattel-Typ.
- Für S_3 und $b(d) > b_{cr}(d)$ gilt $h_1 > 0$.
- S_1 ist für kleine Werte von e stets instabil und wird stabil, wenn e hinreichend groß wird.
- S_3 ist stabil mit Ausnahme eines kleinen Parametergebietes an der Geraden $b = b_{23}(d)$, das durch $h_1 h_2 - h_3 = 0$ begrenzt wird.

Die Interpretation erfolgt nach der qualitativen Theorie stationärer Zustände in drei-dimensionalen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Eine umfassende Darstellung der Bifurkationen im Raum findet man in [39].

Bitte beachten sie, dass die Literaturliste am Ende dieser Schrift nur der notwendigen Unterstützung des vorliegenden Textes dient, also keine Referenz zum Thema Chaos darstellt.

Routen ins Chaos

Einen definitiven Besteckkasten gibt es für das 3-D-Chaos noch nicht, aber Teile. Einige Routen ins Chaos sollen hier kurz aufgelistet werden [18].

Wichtig dabei ist, zu verstehen, dass, wenn gerade Chaos entstanden ist, man es schon nicht mehr durch die Bifurkation klassifizieren (benennen) kann, durch die es entstanden ist. Denn es kann (und wird) an der anderen Seite des Parameter-Intervalls mit Chaos durch eine andere Bifurkation entstanden sein.

Routen ins Chaos werden deshalb im Zusammenhang mit der Bifurkations-geschichte im betrachteten Parameter-Intervall betrachtet. Dabei können charakteristische Folgen von Bifurkationen unterschieden werden, die mit einfachen Grenzzyklen beginnen und im Chaos enden.

Die einzelnen Bifurkationen auf diesen Wegen ins Chaos gelten nicht als Routen ins Chaos. Die schlagartigen Bifurkationen, bei denen das Chaos durch eine einzige Bifurkation aus einem Grenzzyklus oder sogar scheinbar ”aus dem Nichts” entsteht, werden allerdings auch als eine Route anerkannt.

Eine ordnende Liste von Routen findet man zum Beispiel bei Magnitskii [18] und [19]. Es gibt sehr häufige und ziemlich seltene Routen ins Chaos:

1. **Die Verdopplungskaskade (Feigenbaum-Route)**

Feigenbaum ist die einfachste und mit Abstand häufigste Route ins Chaos. Sie verkörpert exemplarisch das Zerreißen, von dem hier laufend die Rede ist.

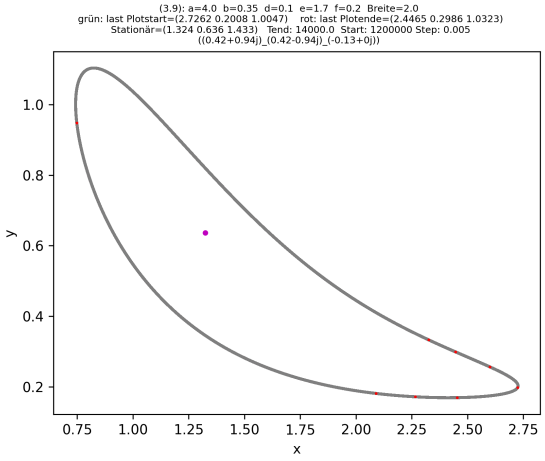
Ein stabiler Grenzzyklus macht sich breit (bzw. wird zerrissen) zu einem Möbius-Band. In der Mitte des verdrehten Flachbandes entsteht dabei ein sattelartig instabiler Grenzzyklus und der Rand des Möbius-Bandes ist der alte Grenzzyklus, der jetzt immer noch stabil, aber gefaltet, also doppelt so lang ist.

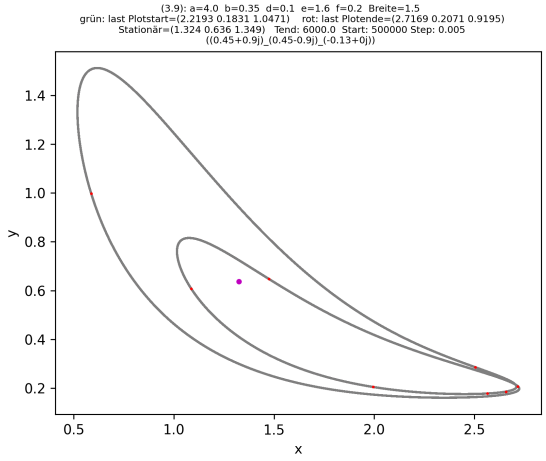
Ein so verdoppelter Grenzzyklus ist leicht zu erkennen. Und wenn sich dieser, durch die nächste Verdopplung weiter verdoppelt, haben wir einen vierfachen Grenzzyklus, dann einen achtfachen usw. Und genau das kann passieren.

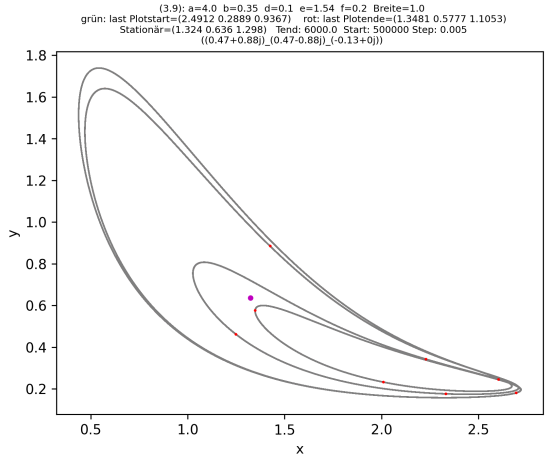
Letztlich entsteht ein unendlich gefalteter Grenzzyklus umgeben von unendlich vielen endlich bis unendlich gefalteten instabilen Grenzzyklen: Chaos [11].

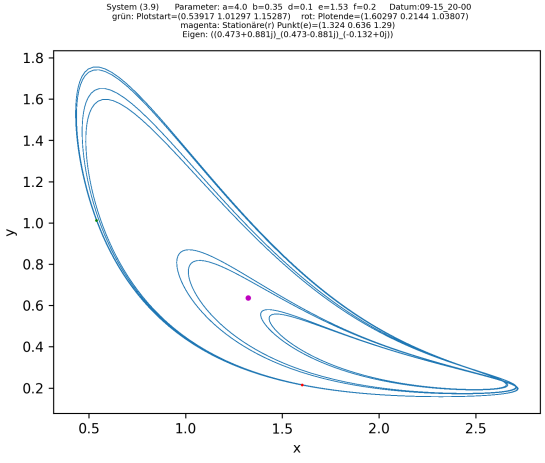
Diese Bifurkation kommt ohne stationären Zustand aus. Bekannt geworden ist sie durch ihr Analogon bei den diskreten dynamischen Systemen unter dem Namen Heugabel-Bifurkation (auf Englisch: pitchfork).

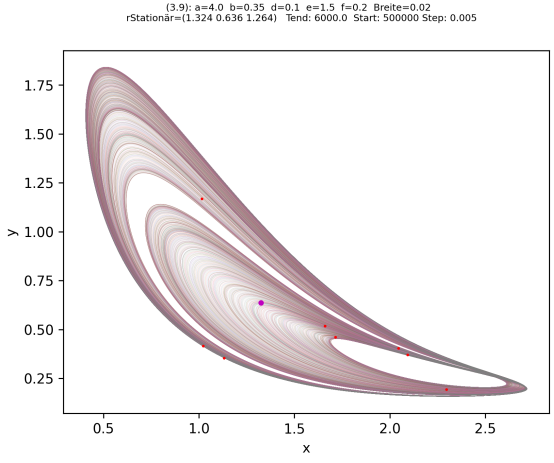
Die Chaos-Suche erfolgt dann sinnvollerweise in (Parameter-)Richtung der zunehmenden Verdopplungen. Wie im folgenden Beispiel:

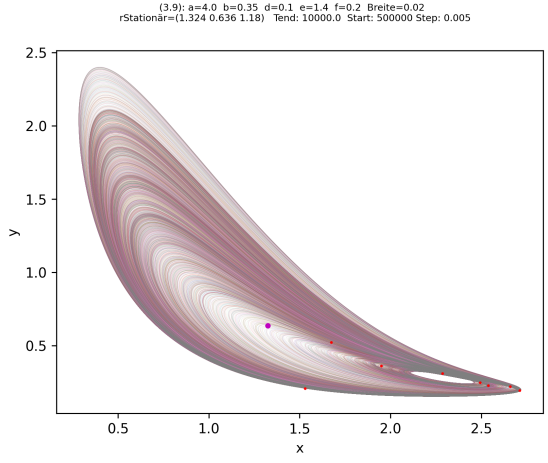












Legende: x-y-Plots des **Chaossystems** für $a = 4.0, b = 0.35, d = 0.1, f = 0.2$
Die Werte von e sind (beginnend links oben) : 1.7, 1.6, 1.54, 1.53, 1.5, 1.4

Die Bilder zeigen einen Grenzzyklus, der sich mehrfach faltet (Verdopplungskaskade) bis zum Chaos, zu sehen in Bild 5 und Bild 6: $\lambda_1(1.5) \approx 0.028$ und $\lambda_1(1.4) \approx 0.047$.
Der instabile Fokus S_1 (magenta) ist offenbar nicht direkt beteiligt.

Zur Numerik der Verdopplungsbifurkation

Bei einer Verdopplungsbifurkation verbleibt ein (gefalteter) stabiler Grenzzyklus und es entsteht dazu ein sattelartig-instabiler Grenzzyklus. Nach n solchen Bifurkationen existieren zu dem einen 2^n-fach gefalteten stabilen Grenzzyklus bis zu n sattelartig-instabile Grenzzyklen um ihn herum. Es wird eng.

Und zwar für jeden Rechner (mit technisch-bedingter Rundung) und jede Software (mit methodisch bedingten Näherungen) zu eng.

Jede (!) berechnete Trajektorie verlässt schon nach einem Schritt die korrekte Lösungskurve. Es ist daher sinnlos, die Anzahl der Stellen der reellen Zahlen im Rechner zu erhöhen. Oder die Genauigkeit der Integrationsmethode weiter zu verbessern. Im Normalfall genügt ein gutes und schnelles Runge-Kutta-Verfahren. Bei steifen Systemen oder extremen Verdrehungen an einem Sattel-Fokus stehen lineare Mehrschrittverfahren (Backward Differentiation Formulas) in den einschlägigen Programm-Bibliotheken zur Verfügung.

In dieser Beispiel-Sammlung wurde meistens die Dormand-Prince-Methode, ein Runge-Kutta-Verfahren fünfter Ordnung, benutzt.

Chaos-Plots sind eine gute Sache. Aber man darf sie nicht überinterpretieren. Dass numerisch berechnete Phasenpunkte an ”engen” Stellen auf eine andere Trajektorie überspringen können, liegt in der Natur der Sache.

2. **Das Spiralchaos (Shilnikov-Route)**

Spiralchaos kann auftreten, wenn Separatrizen-Schlingen an einem Sattel-Fokus auftreten. Im Phasenraum ist das oft gut zu erkennen:

Eine Separatrix entfernt sich als instabile Mannigfaltigkeit vom Sattel-Fokus, kehrt in einer Schlinge um und strebt als Teil der asymptotisch stabilen Fokusebene spiralförmig gegen den Sattel-Fokus. Eine homoklinische Kurve.

Bei Abänderung eines System-Parameters verschwindet die Separatrix und eine verdrehte geschlossene Trajektorie entsteht. Und manchmal Chaos [38], [19]. Das Ganze kann natürlich auch umgekehrt stattfinden.

Den Bifurkationspunkt zu bestimmen ist nicht so ganz einfach. Die qualitative Analyse des Sattel-Fokus hilft nur wenig. Das Vorliegen komplexer Eigenwerte ist notwendig, sagt aber nichts über eine Separatrizen-Schlinge aus.
Die Shilnikov-Route tritt in den folgenden Beispielen häufig auf. Man erkennt sie an der Existenz eines Sattel-Fokus, an den vielen engen Verdrehungen der Grenzzyklen in seiner Umgebung und an der Größe dieser Grenzzyklen, da für die Ausbildung einer Separatrizen-Schlinge viel Platz benötig wird.

Die numerischen Berechnungen sind wegen der Verdrehungen schwierig, auch bei den Lyapunov-Exponenten. Wir finden das in den Beispielen.

3. **Die Sharkovsky-Route** (subharmonische Kaskade von Perioden)

Die Sharkovsky-Route ist die große Schwester der Feigenbaum-Route.
Sie beginnt mit einem plötzlich erscheinenden 3-fachen Grenzzyklus [4]:

$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \ldots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd \ldots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd 2^2 \cdot 7 \rhd \ldots$
$\ldots \rhd 2^n \cdot 3 \rhd 2^n \cdot 5 \rhd 2^n \cdot 7 \rhd$...CHAOS...$\rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \ldots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$

Man sieht, dass so alle ganzzahligen Perioden erzeugt werden. Da man aber niemals alle Bifurkationen erwischt, wirkt die Route oft ziemlich gemischt.

Nach unendlich vielen immer kleineren Intervallen beginnt das Chaos.

Das Ganze kann natürlich auch umgekehrt stattfinden.

Die Sharkovsky-Route ist in den Beispielen manchmal zu erahnen, selten mit Sicherheit zu erkennen. Bei Sharkovski gibt es Grenzzyklen mit Perioden, bei Feigenbaum auch Chaos-Bänder.
Da die unendlich vielen Intervalle immer kleiner werden, wird man garantiert unendlich viele Perioden nicht finden, egal wie fein man sucht.
Das ist aber nicht unser Ziel. Wir wollen das Muster, nicht die ganze Route.

Da Periode-3-Grenzzyklen auch in anderen Zusammenhängen auftreten, z.B., durch zunehmende Verdrehung an einem Sattel-Fokus, ist die Erkennung (Einordnung, Unterscheidung) allerdings nicht einfach.

Bei den Periode-3-Grenzzyklen und -Routen muss man unterscheiden:

3a. **Die echte Periode-3-Route** (als Bifurkation, als Nicht-Route)

Aus einem dreifachen Grenzzyklus entsteht schlagartig Chaos. Das ist nur ein Schritt, keine Sharkovsky-Route. Es kommt auch in den Beispielen vor und ist relativ gut zu erkennen und von den anderen Routen zu unterscheiden.

3b. **Die echte Sharkovsky-Route**

Bei allen Verdopplungskaskaden werden die zu den höheren Perioden 2^n gehören Parameter-Intervalle gesetzmäßig exponentiell kleiner. Man findet sie mit numerischen Methoden irgendwann nicht mehr, auch, weil die zugehörigen gefalteten Grenzzyklen optisch nicht mehr voneinander unterscheidbar sind.

Das gilt auch für die Sharkovsky-Route. Das beginnende Periode-3-Intervall ist das größte und meistens gut zu erkennen. Die folgenden Intervalle sind nur anfangs bei gezielter und intensiver Suche und unter Vorbehalt zu finden.

Mehr noch, die Intervalle zu den Perioden 5, 7, 9 usw. werden im Vergleich zur Periode 3 auch zunehmend kleiner. Der Autor hat seine Berechnungen daher eingeschränkt. Komplette Listen von Perioden sind ohnehin unmöglich.

So findet man zwar die unteren Elemente mit den Perioden 3^n, aber nur selten Grenzzyklen mit Perioden $5^n, 7^n, 9^n$ usw.

4. **Das Sattelknoten-Chaos (homoklinische tangentiale Bifurkation)**

Sattelknoten-Chaos kann entstehen, wenn bei Parameter-Änderung ein drei-dimensionaler Knoten und ein Sattel-Knoten verschmelzen, dabei einen speziellen Sattelknoten mit einer Separatrizenschlinge hervorbringen und danach verschwinden.

Die Separatrizenschlinge muss dabei natürlich mitverschwinden, aber sie kann etwas hinterlassen. Wenigstens eine geschlossene Trajektorie, oder mehrere, im besonderen Fall aber auch Chaos [19].

Das Verschmelzen von stationären Zuständen hatten wir schon im Basissystem. Aber jetzt geht das drei-dimensional noch etwas komplizierter.

Diese Bifurkation konnte im Chaossystem nicht gefunden werden, was nichts besagt. Die Leser sind eingeladen, das zu korrigieren.

In der Nähe von homoklinischen Kurven (hier also einer Separatrizenschlinge) können stabile Grenzzyklen existieren, die lange fast konstant erscheinen, sich dann aber eine Zeit lang ziemlich unregelmäßig verhalten ehe sie (am Sattel) wieder lange fast konstant erscheinen.

5. **Die Ruelle-Takens-Newhouse-Route** (Torus breakdown route)

Die Ruelle-Takens-Newhouse-Route ist eine Ein-Schritt-Bifurkation, bei der ein durch quasi-periodische Trajektorien gebildeter stabiler zwei-dimensionaler Torus (mit einem instabilen Grenzzyklus im Inneren) bei Parameter-Abänderung durch eine verallgemeinerte Hopf-Bifurkation ”implodiert” (also verschwindet) und dabei einen stabilen chaotischen Attraktor hinterlässt [19].

Der numerische Nachweis eines Torus (als Mannigfaltigkeit) ist schwierig. Die Trajektorien in der Umgebung verhalten sich extrem träge. Die Lyapunov-Exponenten sind winzig. Man kann durch lange Simulationen gegen die Zeit den dann stabilen Grenzzyklus finden (siehe Beispiele 58 und 59). Immerhin.

Einige Literatur-Beispiele mit einem Torus benutzen Terme, die wir hier ausgeschlossen haben, z.B. explizit zeitabhängige periodische Funktionen. Oder eine vierte Dimension. Es gibt aber auch Torus-Beispiele mit Polynomen, die hier zugelassen sind ([41], [45]). Und die Beispiele 58, 59 und 275.

Die beste Methode zum Nachweis dieser Route ist die Berechnung der drei Lyapunov-Exponenten. Die ersten beiden müssen bei einer Torus-Trajektorie Null sein, bei einer Chaos-Trajektorie ist der maximale Exponent positiv.

6. **Die Grenzzyklus-Verschmelzung** (Shilnikovs Grenzzyklus-Route)

beschreibt das Verschmelzen eines sattelartigen mit einem stabilen Grenzzyklus. Dabei verschwinden beide Grenzzyklen schlagartig und hinterlassen nichts. Oder Chaos [19]. Man erkennt diese Bifurkation am vorherigen Nebeneinander des stabilen Grenzzyklus mit einer 'instabilen Seitenrichtung'. Den parallel verlaufenden sattelartigen Grenzzyklus kann man numerisch nicht festmachen. Einige Plots hier erinnern an diese Bifurkation.

7. **Die homoklinische Sättel-Verschmelzung**

ist das Verschmelzen und Verschwinden von zwei sattel-artigen stationären Zuständen, die durch zwei Separatrizen miteinander verbunden sind. Mit dem Verschwinden der Sättel muss auch die Separatrix verschwinden (ähnlich dem Sattelknoten-Chaos). Es kann Chaos übrig bleiben [19].

8. **Die homoklinische Grenzzyklus-Schlinge**

Die instabilen Trajektorien eines sattelartigen Grenzzyklus kehren in einer Schleife um und streben in der stabilen Mannigfaltigkeit gegen den gleichen Grenzzyklus [19]. Man erkennt diese Route am Verhalten in der Umgebung. Ein verdrehter stabiler Grenzzyklus bildet eine Schleife aus, die umkehrt und "von der anderen Seite" wieder zum relativ groß verdrehten Grenzzyklus verläuft.

9. **Eine heteroklinische Kurve** (heteroklinic orbit)

ist eine Verallgemeinerung von zwei bereits aufgelisteten Routen. In einem Ensemble von sattelartigen Grenzzyklen und stationären Zuständen führt ein gerichteter Weg aus Separatrizen von einem zum nächsten Mitglied, so dass ein geschlossener Weg, eine sogenannte Kontur, entsteht. Bei leichter Abänderung der zugehörigen Parameterwerte kann dann Chaos entstehen [19].

Die Route mit einer Separatrizenschlinge an einem Sattel-Fokus und die Route mit einem sattelartig-instabilen Grenzzyklus wurden hier bereits aufgelistet.
Sie sind die homoklinischen Spezialfälle dieser Route.

Im Chaossystem und den hier präsentierten Varianten mit den maximal drei stationären Zuständen wäre als einfachste heteroklinische Kurve die Kombination eines Sattel-Fokus mit einem sattelartigen Grenzzyklus denkbar, wurde vom Autor aber nicht beobachtet (was aber nichts besagt).

Eine heteroklinische Kurve ist also theoretisch möglich, aber wohl selten.
Sie dürfte auch schwer zu erkennen und nachzuweisen sein.

10. **Die Chaos-aus-Chaos Route** (homoklinisches Kalben)

In unserem Chaossystem wurde die Abspaltung von neuem Chaos aus einem existierenden Chaos beobachtet. Mit verschiedenen Lyapunov-Exponenten und darstellbarem räumlichen Abstand der zwei Attraktoren. Das wird etwas weiter unten gesondert beschrieben. Denn es wäre eine echt neue Route ins Chaos. In der Gegenrichtung ist die Route als Verschmelzen von Chaos zu beobachten.

Eine Quelle dazu kann (bisher) nicht angegeben werden. Dass diese potentiell neue Route nur in einem Fall, ausgerechnet dem Chaossystem des Autors, gefunden wurde, ist natürlich merkwürdig, geradezu verdächtig. Sie wird deshalb hier nur unter Vorbehalt aufgeführt.

Aber ganz unlogisch ist die Sache nicht. Die Verallgemeinerung des oben stehenden Prinzips der homoklinischen Kurven an den sattelartigen stationären Zuständen und Grenzzyklen auf (stationäres) Chaos ist eine Überlegung wert.

Es kann durchaus sein, dass dieser Fall bereits irgendwo beschrieben ist. Der Autor lehnt sich ziemlich weit aus dem Fenster. Und zur Wahrheit gehört auch, dass diese ”Route” vom Autor in [30] noch nicht erkannt wurde.

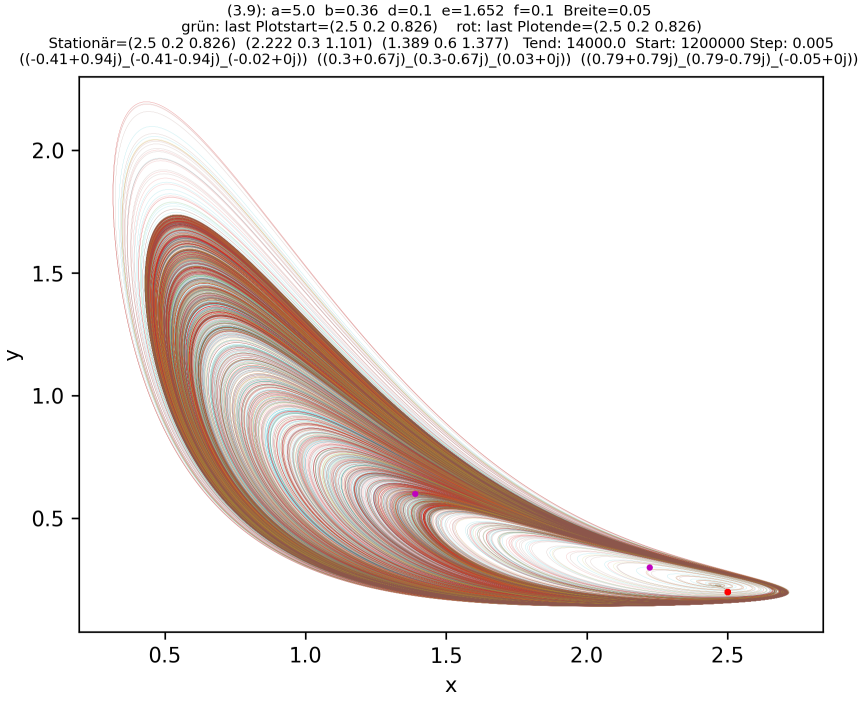
11. **Eine Chaos-Ruine** (crisis route, chaotic transient behaviour, ghosts)

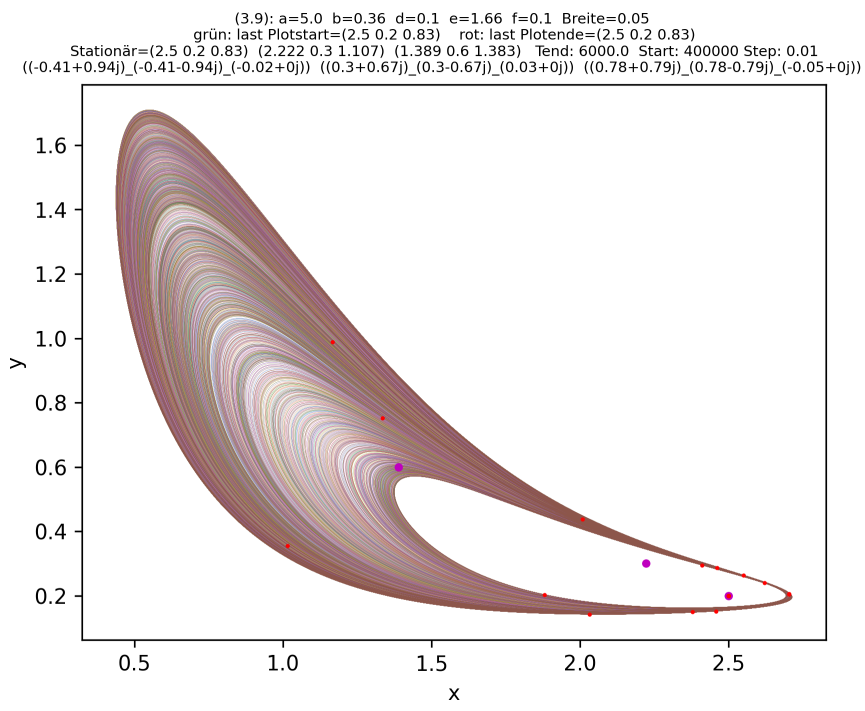
nennt man den Effekt, dass sich nicht-stationäre Trajektorien lange (offenbar sogar beliebig, aber endlich lange) in einem Gebiet des Phasenraumes aufhalten, letztlich aber irgendwann doch zu einem vorhandenen stabilen stationären Attraktor (stationärer Zustand oder Grenzzyklus) weiterziehen. Dieses chaotisch wirkende Übergangsverhalten tritt relativ häufig auf. Eine neuere Quelle [6] nennt es ”transient chaotic region”, wir hier ”Chaos-Ruine”.

Das ist natürlich kein echtes Chaos, kann aber wegen der immer nur endlichen Simulationen nicht mit Sicherheit vom Chaos unterschieden werden.
Und da die Berechnung der Lyapunov-Exponenten auch nur über ein endliches Zeit-Intervall erfolgen kann, kann man mit etwas Pech einen deutlich positiven Wert von λ_1 erhalten, wo (noch) kein Chaos vorliegt.

Hilfreich kann sein, wenn man im Zweifelsfall die Parameter-Umgebung betrachtet. Chaos-Ruinen treten in der Umgebung von echtem Chaos auf.
Ein Beispiel dieses Übergangsverhaltens ist in der Arbeit des Autors [30] enthalten. Weitere Beispiele folgen hier.

In der Gegenrichtung im Parameterraum bildet sich eine Chaos-Ruine scheinbar ”aus dem Nichts”, danach aber entsteht schlagartig echtes Chaos.





Legende: x-y-Plots des **Chaossystems** für $a = 5.0, b = 0.36, d = 0.1, f = 0.1$ sowie $e = 1.652$ (links) und 1.660 (rechts).

Das linke Bild zeigt eine Chaos-Ruine (pre-chaotic behaviour). Nach langem Kreisen streben die Trajektorien stets doch zum stabilen Fokus S_3 (im ”Loch” unten rechts, rot).

Das rechte Bild zeigt echtes Chaos ($\lambda_1(1.66) \approx 0.045$). Im Parameter-Intervall ist das dicht daneben und der Plot ist sehr ähnlich. Der Fokus S_3 ist immer noch stabil, jetzt aber auch magenta, da keine der benutzten Trajektorien von außen gegen ihn strebt.

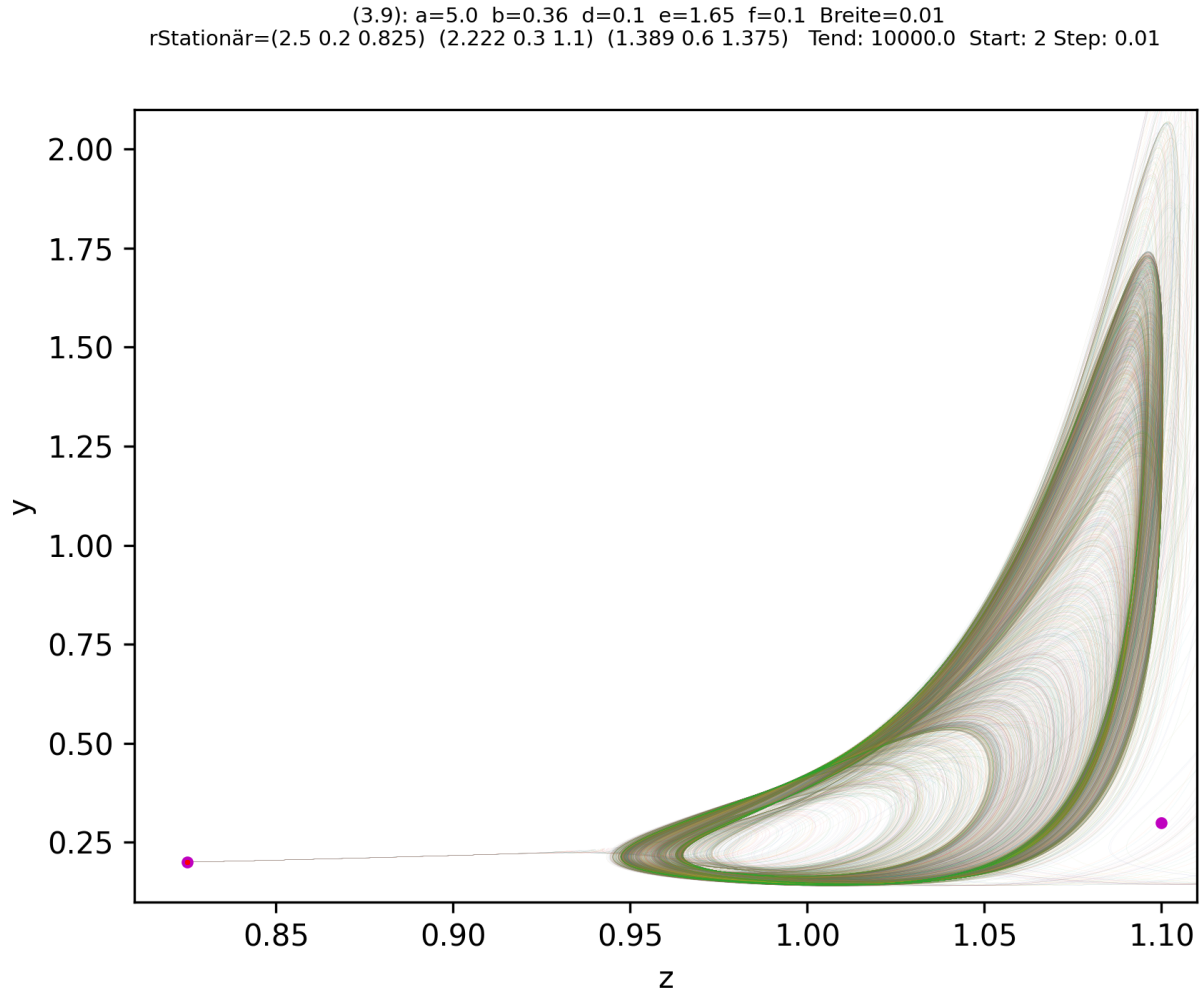
e	transiente Trajektorien	max. λ_1	Bewertung
1.652	27	-0.019	transientes (Nicht-)Chaos
1.653	10	0.053	Chaos
1.654	8	0.051	Chaos
1.655	0	0.049	Chaos

Verhalten des **Chaossystems** für $a = 5.0, b = 0.36, d = 0.1, f = 0.1$ und vier Werte von e. Es existieren drei stationäre Zustände, einer davon ist stabil.

Gezeigt werden die Lyapunov-Exponenten für Parameterwerte am Übergang von transientem zu echtem Chaos. Und das Verhalten von 27 Trajektorien zu Anfangswerten auf einem 0.01-Gitter um den instabilen Sattel-Fokus.

Das Chaos am Übergang vom/zum transienten Verhalten ist sehr sensibel. Schon kleine Abweichungen von einer chaotischen Trajektorie können das Verlassen des Attraktors und das Streben zum stabilen Fokus S_1 bewirken.

Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten ist dementsprechend schwierig. Es gibt Berechnungen mit positiven Werten von λ_1, deren Trajektorien später doch zum stabilen stationären Zustand streben. Es gibt Berechnungen mit negativen Lyapunov-Exponenten, deren Trajektorien aber auch bei extrem langen Simulationen (also scheinbar für immer) im Attraktor verbleiben.



Legende: **Chaossystem** mit $a = 5.0,\ b = 0.36,\ d = 0.1,\ e = 1.65,\ f = 0.1.$

Rechts unten ist der Sattel-Fokus S_2 , links unten der stabile Fokus S_1 .
Alle 27 Trajektorien streben nach etwas Zeit in der Chaos-Ruine doch zu S_1 .

Die Faltung von Grenzzyklen.

Zur Beschreibung von Routen ins Chaos ist es nützlich, die auftretenden stabilen Grenzzyklen in ihrer Form zu unterscheiden.

Die Anzahl der auftretenden Maxima in Richtung einer gewählten Achse bis zum Wiedererreichen des Ausgangspunktes eines Umlaufes (einer Periode) ist eine mögliche Größe zur Beschreibung der Form. Eine andere Möglichkeit ist die Anzahl der Umläufe um eine definierte Achse während einer Periode.

Beides kann und wird hier als n-fache Faltung bezeichnet werden.
Das ist praktisch, aber auch problematisch. Je nach Blickwinkel kann es Mehrdeutigkeiten geben oder Unentscheidbarkeiten.

Es sei deshalb hervorgehoben, dass es sich bei der Faltung nur um eine visuelle Beschreibung, um Erkennbarkeitshilfe, um Unterscheidbarkeit handelt.

In den Beispielen werden Grenzzyklen auftreten deren Faltung so groß ist, dass sie optisch nicht mehr sicher bestimmt (gezählt) werden kann. Und es werden Grenzzyklen mit einer so verworrenen räumlichen Form auftreten, dass der Begriff Faltung alleine nicht mehr hilfreich (eindeutig) erscheint.

Chaos ist numerisch eine Herausforderung. Man muss mit der Bewertung der Simulationen von Chaos-Systemen vorsichtig sein. Das gilt auch für die hier präsentierten Phasenplots. Aber manchmal sind die Rechnungen doch ziemlich überzeugend. Nicht alles kann da falsch sein, insbesondere, wenn sich eine Übereinstimmung mit bekannten Routen ins Chaos zeigt.

Auf den folgenden Seiten sehen sie Verhaltensweisen des **Chaossystems**, das bei der Untersuchung 1978 teilweise nicht erkannt wurde.
Die verfügbare Rechentechnik gab das nicht her. Aber auch der Kenntnisstand des Autors. Chaos war noch wenig erforscht. Das ist jetzt nicht mehr ganz so.

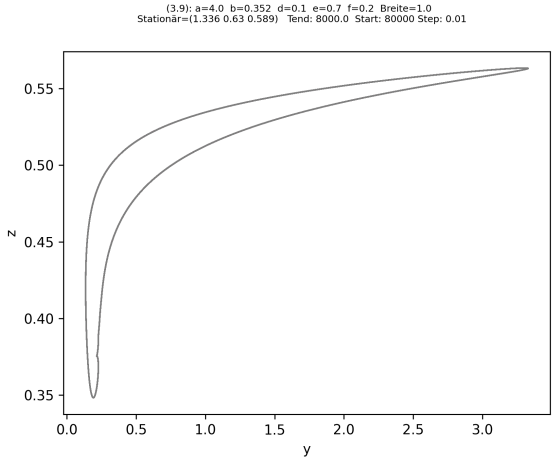
Bei der erneuten Beschäftigung mit dem Chaossystem haben sich neue dynamische Eigenschaften ergeben, neue Fragen sind entstanden.

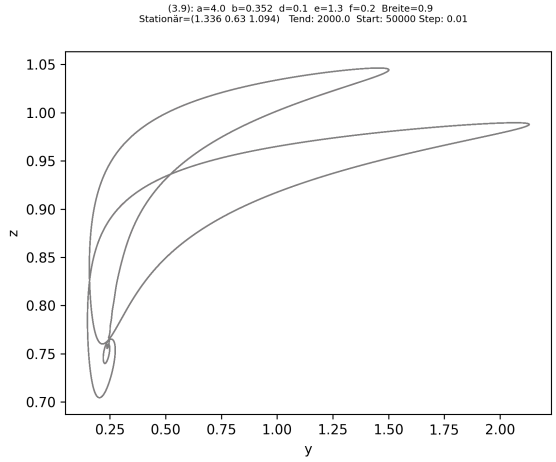
Wir erkennen neben den damals benannten Routen ins Chaos auch offenbar neue Routen, das Verschmelzen von zwei Grenzzyklen (Shilnikov-Verschmelzung) und das Entstehen eines dreifachen Grenzzyklus durch eine Halbierungskaskade auf der einen Seite des Chaos und sein schlagartiges Verschwinden auf der anderen Seite (Sharkovsky-Routen).

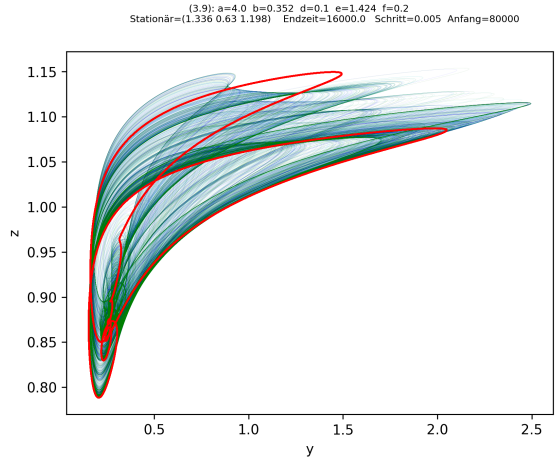
Und die Entstehung eines Chaos-Attraktors um einen Chaos-Attraktor:

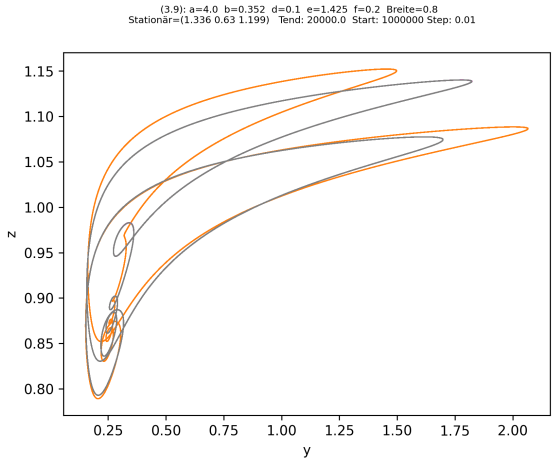
e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
0.70	Ein einfacher Grenzzyklus (Abkürzung: GZ).	
1.30	Ein verdrehter einmal gefalteter Grenzzyklus.	
1.424	Koexistenz von einem gefalteten GZ und Chaos.	0.0326
1.425	Koexistenz von 2 gefalteten Grenzzyklen.	
1.43	Gefaltetes Chaos.	0.026
1.49	Chaos.	0.050
1.525	Elegantes Chaos.	0.047
1.539	Chaos mit einer fünffachen Kontur .	0.026
1.540	Ein 5-facher Grenzzyklus. Ein Fenster im Chaos.	
1.543	Starkes Chaos.	0.037
1.544	Koexistenz von zwei chaotischen Attraktoren.	0.019, 0.038
1.546	Koexistenz eines 12-fachen GZ mit Chaos.	0.036
1.547	Koexistenz eines 6-fachen GZ (blau) mit Chaos.	0.036
1.55	Koexistenz eines 3-fachen GZ (grün) mit Chaos.	0.036
1.56	Ein gefalteter Chaos-Attraktor.	0.023
1.58	Ein zweimal gefalteter 4facher Grenzzyklus.	
1.60	Ein einmal gefalteter 2facher Grenzzyklus.	
1.70	Ein einfacher Grenzzyklus.	

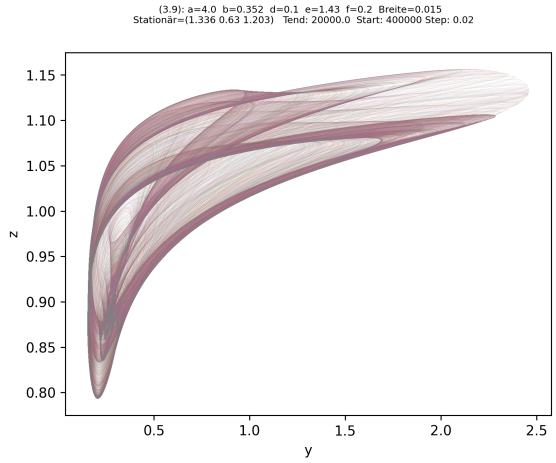
Das **Chaossystem** für $a = 4.0, b = 0.352, d = 0.1, f = 0.2$ und steigende Werte von e.
Die beiden Attraktoren in Zeile 11 haben auch verschiedene Lyapunov-Exponenten.

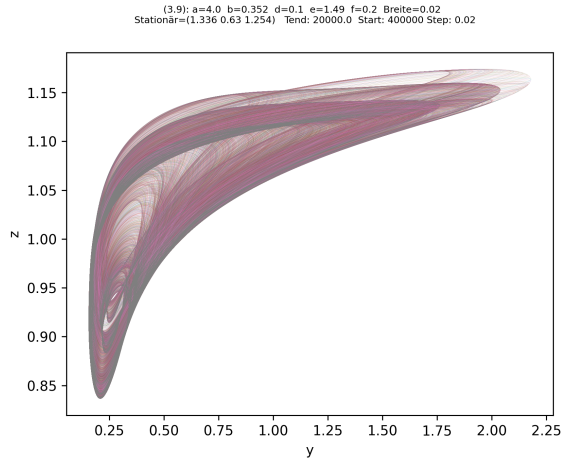






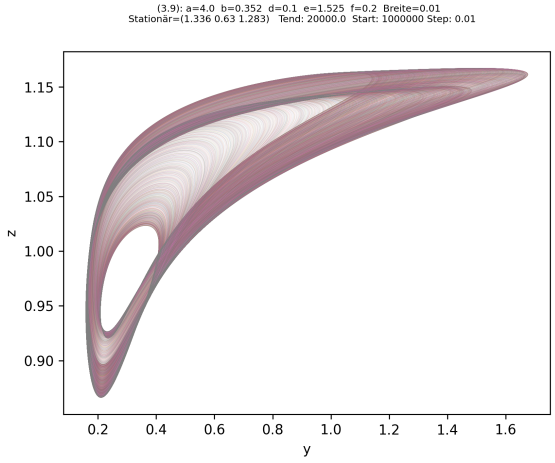


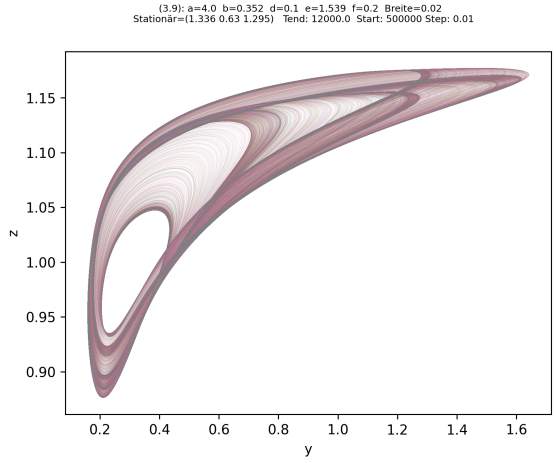


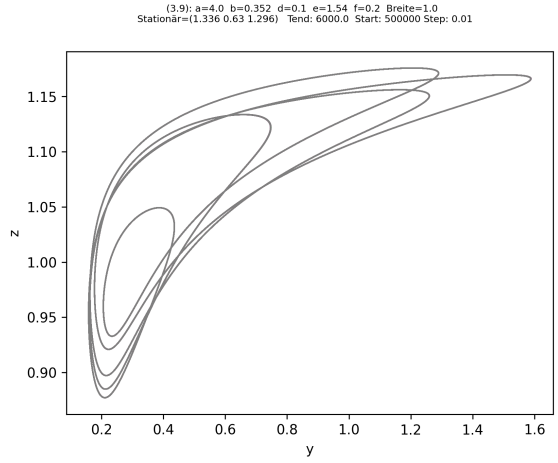


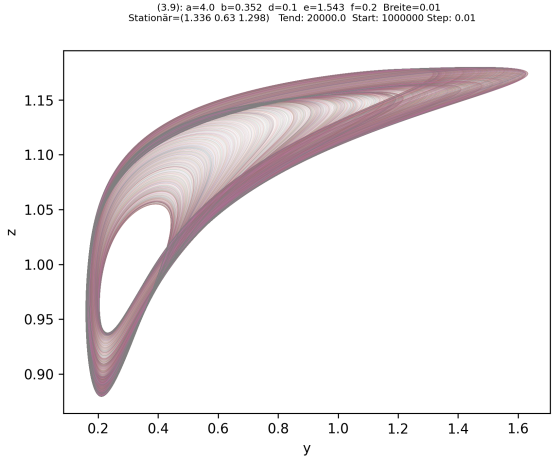
Legende: y-z-Plots des **Chaossystem** für $a = 4.0$, $b = 0.352$, $d = 0.1$, $f = 0.2$.
Die Bilder gehören zu den oberen 6 Zeilen der Tabelle.

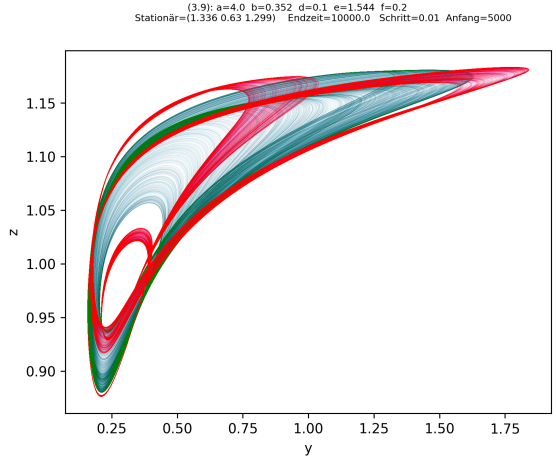
Es beginnt mit einem Grenzzyklus. Der wird gefaltet. Dann das schlagartige Auftreten von Chaos (Bild 3), und zwar in Koexistenz mit dem gefalteten Grenzzyklus (jetzt rot).
Bild 4 zeigt zwei parallele gefaltete Grenzzyklen, aber kein Chaos mehr.
Dann wieder Chaos. Ab Bild 6 hat der Chaos-Attraktor ein deutliches Loch.

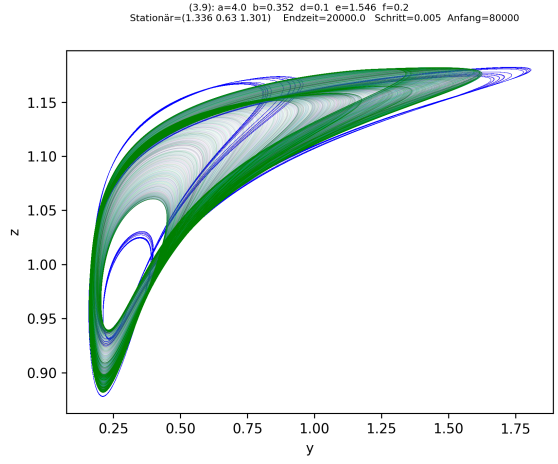






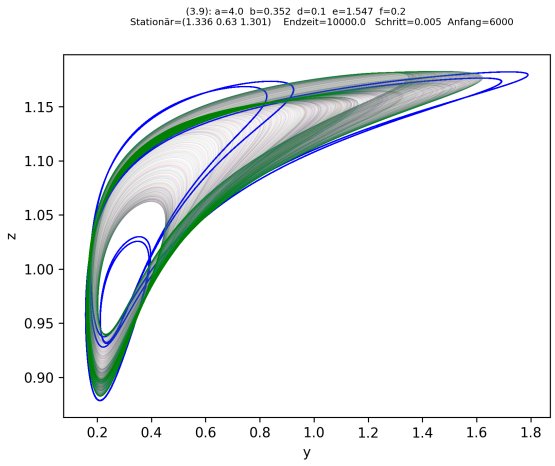


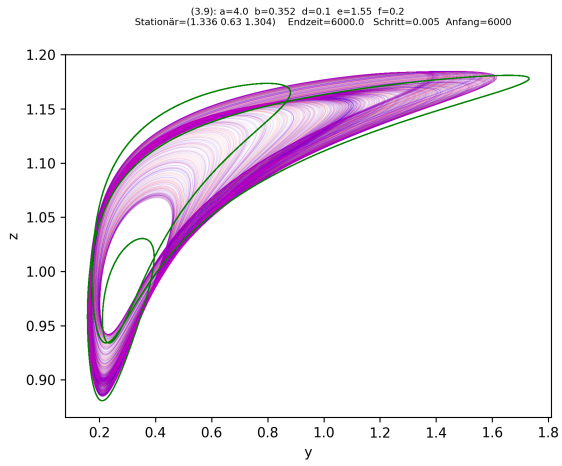


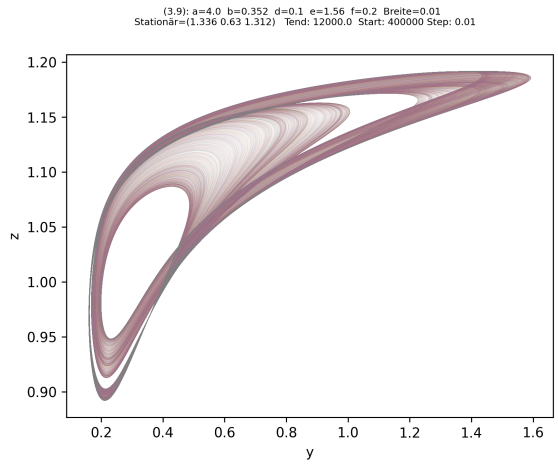


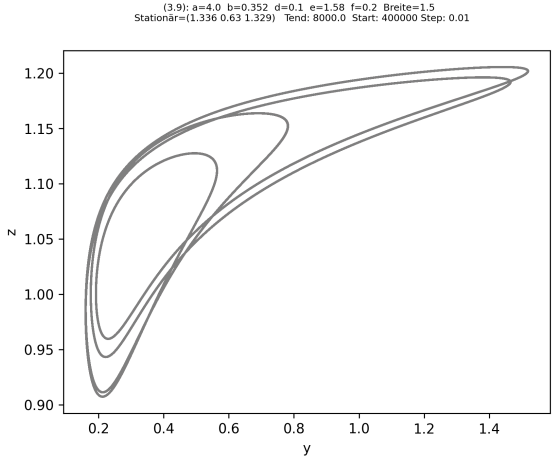
Legende: y-z-Plots des **Chaossystem** für $a = 4.0$, $b = 0.352$, $d = 0.1$, $f = 0.2$ und wachsende Werte von e. Die Bilder gehören zu den mittleren 6 Zeilen der Tabelle.

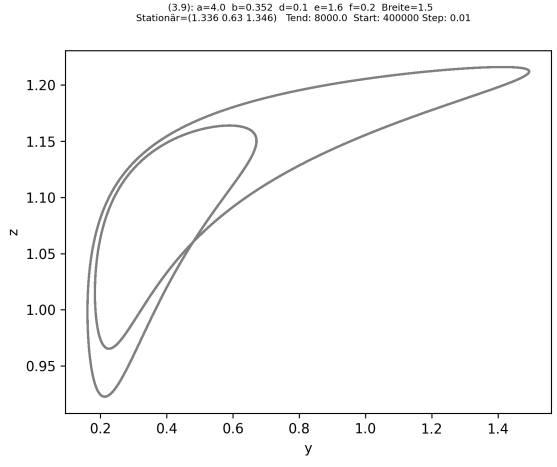
Das Chaos bildet einen Rand aus (Bild 2). Dann entsteht ein Fenster mit einem 5-fachen Grenzzyklus und wieder Chaos. Dann zwei unabhängige, verwobene chaotische Attraktoren (Bild 5). Bild 6 zeigt die Koexistenz von Chaos und einem Grenzzyklus (blau).

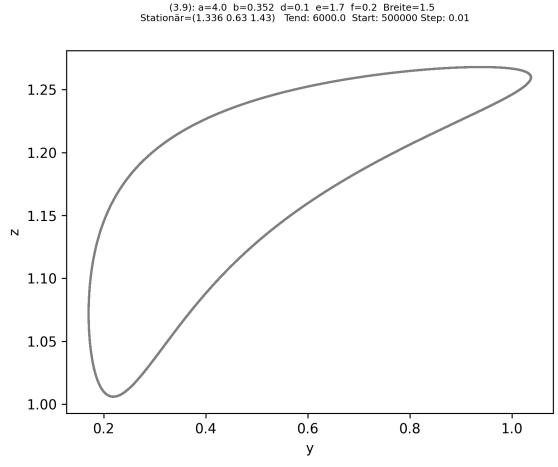












Legende: y-z-Plots des **Chaossystem** für für $a = 4.0$, $b = 0.352$, $d = 0.1$, $f = 0.2$ und wachsende Werte von e. Die Bilder gehören zu den unteren 6 Zeilen der Tabelle.

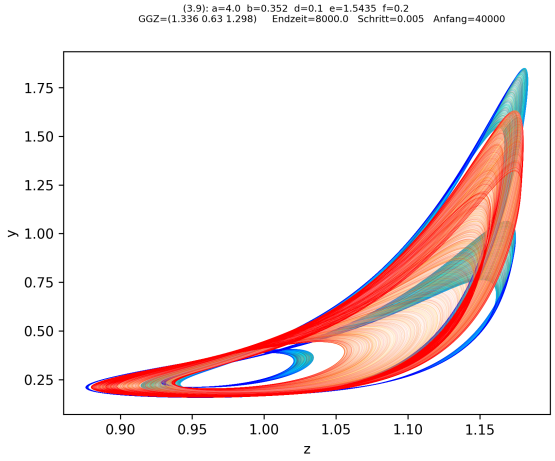
Das Chaos-Band vergeht in einer Periode-3-Kaskade (Bild 1, blau) bis zu einem 3-fachen Grenzzyklus (Bild 2, grün) und der verschwindet schlagartig. Das kompakte Chaos (in Bild 2 violett) vergeht dann auch in einer Verdopplungskaskade rückwärts.

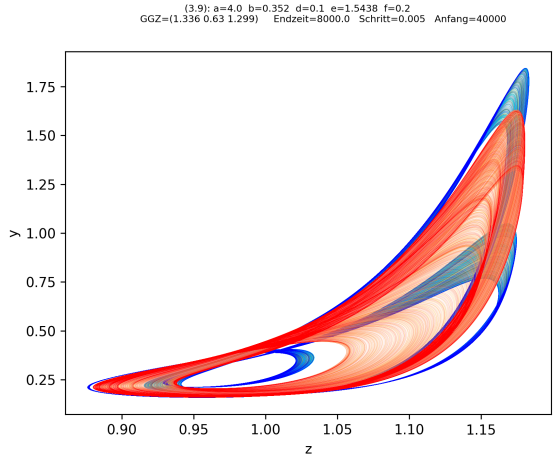
Das Auftauchen eines neuen chaotischen Attraktors um einen bereits existierenden ist bemerkenswert. Der zweite Attraktor entsteht an etwa $e = 1.54345$ um den weiterhin kompakten Kern als ein dreifaches Band. Wir betrachten daher zusätzlich das kleine Teilintervall der Koexistenz:

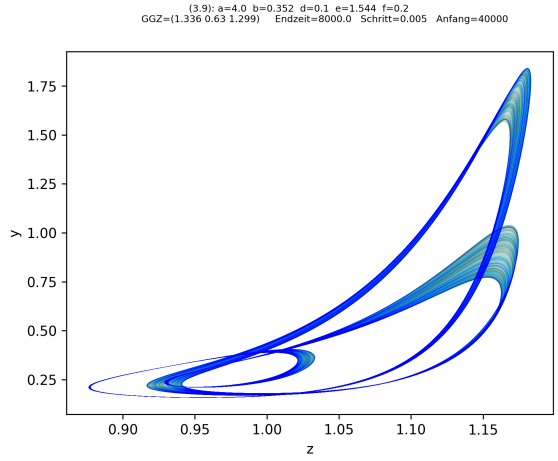
e	λ_1 (Kern)	λ_1 (Chaos-Band)	Anmerkungen
1.5434	0.039	-	Ein Chaos-Attraktor alleine.
1.5435	0.038	0.022	Erste Chaos-Koexistenz.
1.5438	0.038	0.019	
1.5440	0.038	0.019	Siehe auch Haupttabelle.
1.5444	0.038	0.015	
1.5450	0.035	0.014	
1.5455	0.038	0.012	
1.5458	0.037	0.008	Letzte Chaos-Koexistenz.
1.5470	0.037	0.0	Koexistenz mit einem Grenzzyklus.

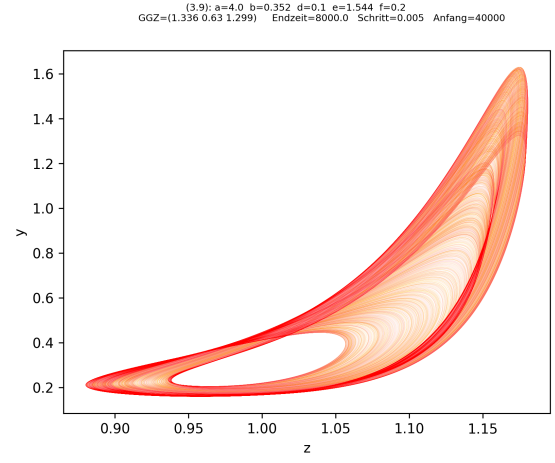
Lyapunov-Exponenten für $a = 4.0, b = 0.352, d = 0.1, f = 0.2$ und steigende e-Werte.

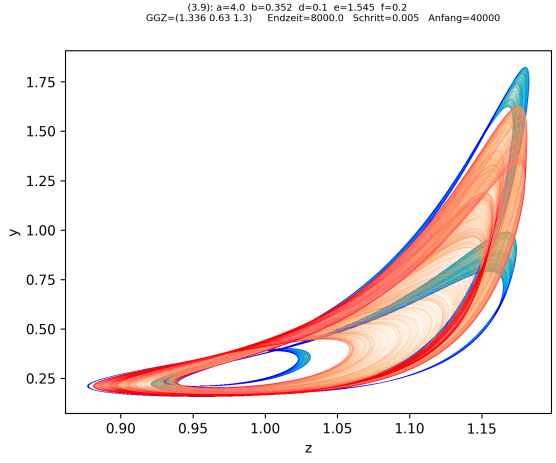
Beide Attraktoren sind verschlungen. Das dreifache Chaos-Band vergeht in einer Periode-3-Route rückwärts (Shilnikov). Das kompakte Chaos besteht noch eine Weile ehe es die Feigenbaum-Route rückwärts durchläuft:

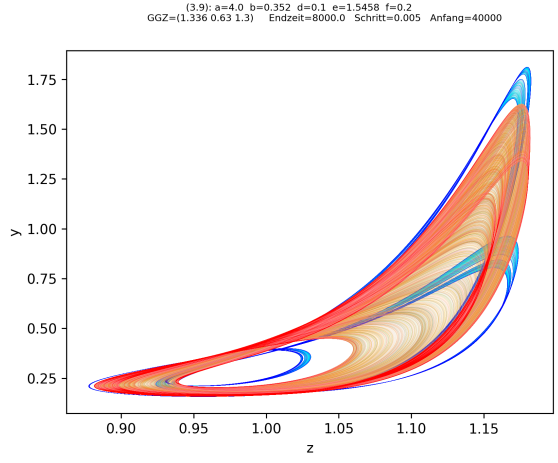










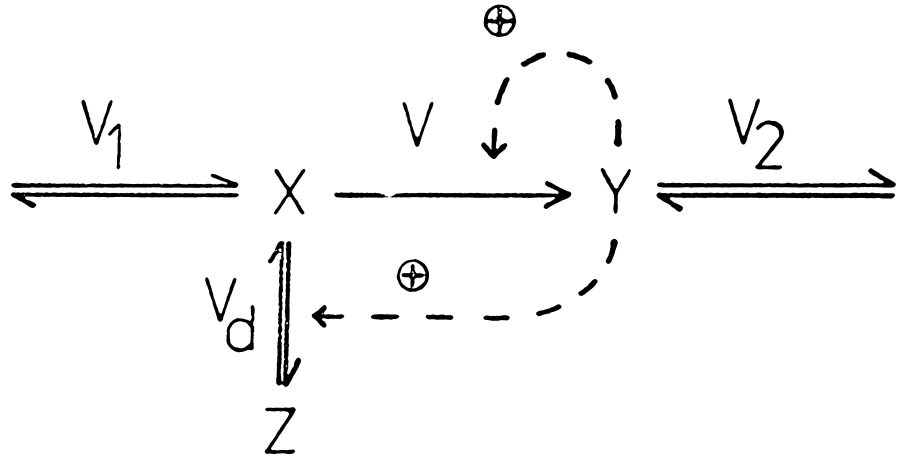


Legende: z-y-Plots des **Chaossystem** für $a = 4.0, b = 0.352, d = 0.1, f = 0.2$ und ausgewählte e-Werte der Tabelle: 1.5435, 1.5438, 1.5440 (zwei mal), 1.5450 und 1.5458.

Die zwei Chaos-Attraktoren zu $e = 1.544$ sind in den Bildern 3 (das dreifache Band) und 4 (der Kern) getrennt dargestellt. Das zerfallende Chaos-Band in Bild 6 ist bereits 6-fach.

Die Einordnung des Chaossystems

Das Chaossystem modelliert (grob) eine autokatalytische Reaktion V eines Substrates X zu einem Produkt Y mit reversibler Produkt-aktivierter Deponierung V_d des Substrates in einer inaktiven Form Z:



Die Depot-Reaktion kann aber auch eine andere Dynamik haben, also durch eine andere Funktion modelliert werden. Nach unseren Annahmen soll $F_2(x, y, z)$ ein Polynom sein, das aus einem Speicher- und einem Rückspeicher-Term jeweils vom maximalen Grad 3 besteht. So kann $F_2(x, y, z)$ theoretisch aus mehr als 30 Gliedern (mit ebensovielen Parametern) bestehen.

Wir beginnen mit Polynomen, die unseres Erachtens eine sinnvolle Modellierung erzeugen. Später werden wir diese Einschränkung aufheben.

4. Die Beispiele (auch als 3 separate Dateien verfügbar)

Zwei Extra-Dateien versammeln je 100 Chaos-Beispiele. Dann folgen weitere. Alle Beispiele erzeugen in den angegebenen Parameter-Intervallen Chaos. Die Reihenfolge ist willkürlich, zufällig, chronologisch entstanden.

Sie können diese Beispiele als Muster verstehen. So kann man Chaos suchen. Sie können die Beispiele auch nachrechnen. Alle Parameterwerte sind angegeben. Die Sammlung enthält auch die Benutzung anderer Basissysteme.

In den Fällen, bei denen das Chaos der einzige Attraktor ist, kann man einfach mit einem beliebigen Anfangswert losintegrieren. Wenn parallel dazu stabile Grenzzyklen oder stationäre Zustände existieren, muss man etwas probieren.

In dieser Arbeit wurden jeweils mehrere (meistens 8) Startpunkte erzeugt und die berechneten Trajektorien erst nach Einlaufen in stationäres Verhalten farbig gezeichnet. Die Wahl der Projektion in die Plot-Ebene ist willkürlich. Sie ist im Plot ersichtlich.

Als hilfreiches Tool hat sich unter Python die Bibliothek ’matplotlib’ erwiesen. Dank auch den Autoren von scipy, numpy, sympy, jitcode und lyapynov und allen Quelltextern in den Foren im Internet.

Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten unter Python

In diesem Text wird oft über die Lyapunov-Exponenten [47] gesprochen. Einmal, weil sie das wichtigste Werkzeug zum Nachweis von Chaos sind. Zum anderen, weil sie nur numerisch anzunähern sind und das Probleme machen kann.

In einigen Foren im Internet kann man extrem vielstellige Resultate der Lyapunov-Exponenten von Chaos-Attraktoren finden. Dem schließen wir uns hier nicht an. Die Benutzung von unterschiedlichen Programmen mit verschiedenen Anfangswerten und Schrittweiten kann manchmal zu unterschiedlichen Werten führen. Es muss dann ein Mittelwert benutzt werden. Das ist in Ordnung, wenn es angegeben wird.

Das Python-Modul Lyapynov [12] wird hier häufig benutzt. Es gibt die Lyapunov-Exponenten mit 3 Nachkommastellen an.
Für die Chaos-Suche ist der maximale Lyapunov-Exponent ausreichend.
Er muss reproduzierbar und erkennbar positiv sein, mehr nicht.

Hier wurde teilweise auch der einfachen Benettin-Algorithmus (mit reorthogonalisierenden Gram-Schmidt-Vektoren) [3] benutzt.

Eines der hier benutzten Python-Programme zur Berechnung des maximalen Lyapunov-Exponenten [7] hat (in einem Beispiel) eine Grenze der Bestätigung von Chaos programmiert und bei 0.01 gezogen.

Eine Faustregel ist manchmal sinnvoll, hat aber auch ihre Grenzen.

Selbst wenn man einräumt, dass diese Grenze für den Fall gemeint ist, dass sich λ_1 bei Verlängerung des benutzten Zeitintervalls und optimaler Integrationsmethode nicht mehr wesentlich verändert, so gibt es doch sehr unterschiedliche Typen von Differentialgleichungen (Grad der Nichtlinearität, Steifheit, Anzahl und Stabilität der stationären Zustände und Grenzzyklen).

In dieser Schrift wird zuerst das Bifurkationsumfeld (die Routen ins Chaos) einbezogen und erst dann als Unsicherheitsgrenze der Wert 0.001 benutzt.

Das muss man nicht teilen. Irrtümer und Fehler bei allen jetzt folgenden Beispielen sind ausdrücklich nicht ausgeschlossen.

Die ersten Beispiele benutzen stets das vorgestellte Basissystem als 2-D-Basis. Danach werden aber auch andere ebene Systeme als Basissystem benutzt um den allgemeinen Charakter der Idee zu demonstrieren.

Unzulässige Beispiele

Man kann jedes robuste dynamische System durch einen zusätzlichen Term verallgemeinern und erhält genau die gleichen dynamischen Verhaltensweisen wie das Original. Wenn der zusätzliche Term nur genügend klein ist. Das kann man leicht durch einen multiplikativen Parameter erreichen. So könnte man aus jedem System mit Chaos beliebig viele neue chaotische Systeme generieren. Das schließen wir aus. Unsere Chaos-Beispiele sollen qualitativ neu sein.

Zur Verdeutlichung des Problems folgt ein solches Nicht-Beispiel. Wir benutzen das Chaossystem und den zusätzlichen Term $-gx^2$ mit dem Parameter g :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 1 - bx - gx^2 - xy^2 - (exy - z) \\
\frac{dy}{dt} &= a\,(xy^2 + d - y) \\
\frac{dz}{dt} &= f\,(exy - z)
\end{aligned}$$

Die stationären Zustände müssen numerisch bestimmt werden aus:

$$y^5 - (1+d)y^4 + by^3 - (bd - g)y^2 - 2dgy + d^2g = 0$$

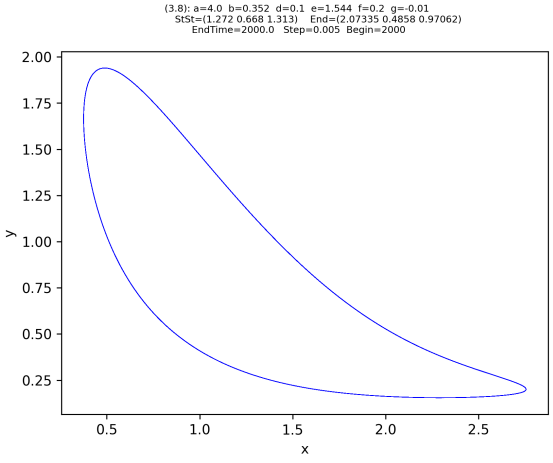
Der Parameter g kann so klein gewählt werden, dass das verallgemeinerte unzulässige System auch Chaos zeigt:

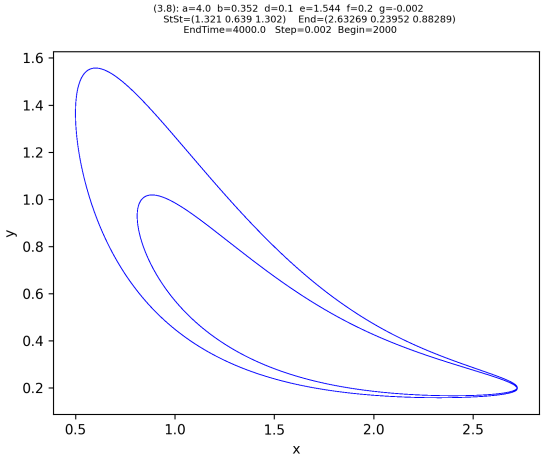
g	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
-0.0100	Ein kleiner Grenzzyklus.	
-0.0020	Der Grenzzyklus faltet sich. Beginn einer Kaskade.	
-0.0008	Ein zweimal gefalteter vierfacher Grenzzyklus.	
-0.0002	Ein einmal gefaltetes Chaos-Band.	0.028
0.0002	Kompaktes Chaos, wie im Chaossystem.	0.042
0.0005	Kompaktes Chaos, wie im Chaossystem.	0.050

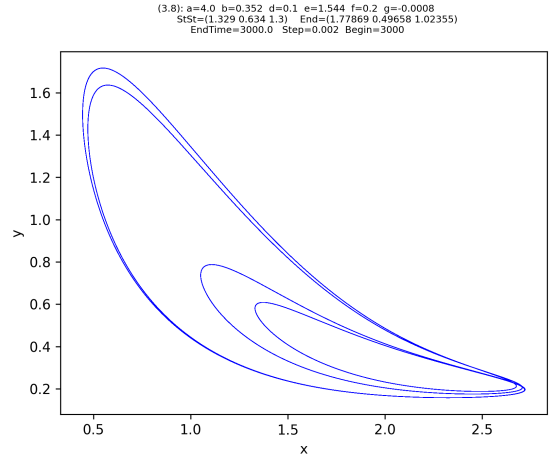
Ausgewählte stationäre Trajektorien des erweiterten **Chaossystems:** für $a = 4.0$, $b = 0.352$, $d = 0.1$, $e = 1.544$, $f = 0.2$ und zunehmende Werte von g.

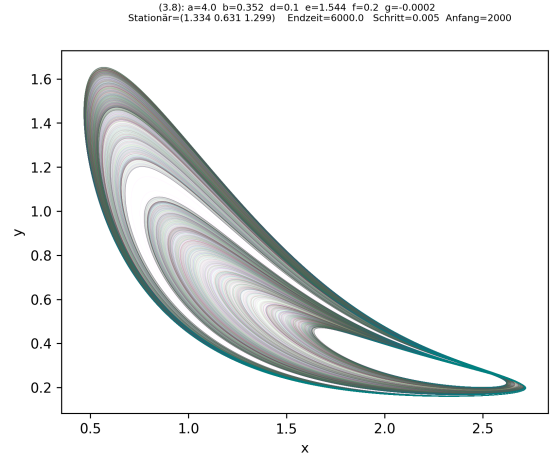
Auf beiden Seiten des bekannten Chaos-Tupels ($g = 0.0$) des Chaossystems existiert Chaos. Das war zu erwarten. Das bedeutet nichts. So sind robuste dynamische Systeme definiert.

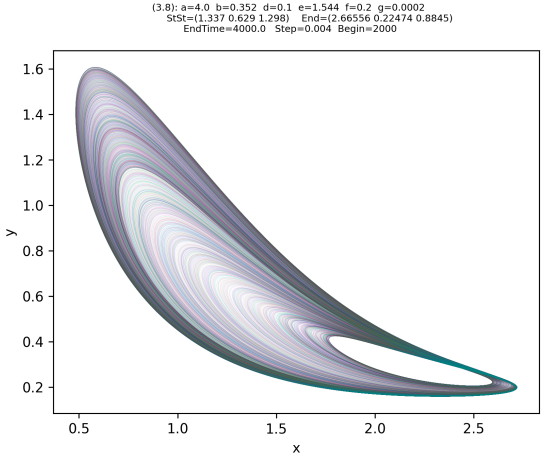
Es ist daher nicht immer leicht zu entscheiden, ob eine neue Variante des Depot-Polynoms mit einem bestimmten Parameter-Tupel zu solchen für uns unzulässigen Chaos-Beispielen führt. Ein Vergleich der Parameter-Werte mit denen des Original-Chaossystems hilft. Wir werden das im Auge behalten.

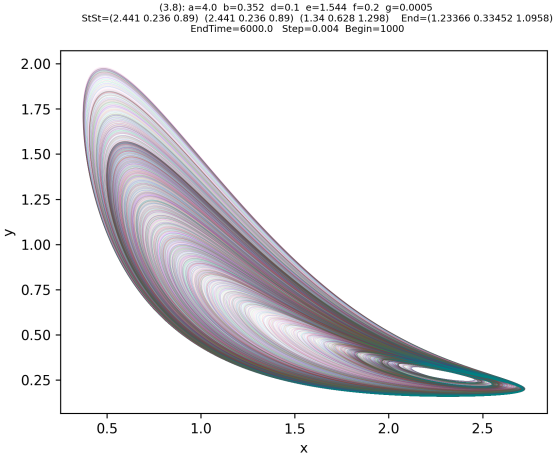












Legende: x-y-Plots des verallgemeinerten unzulässigen **Chaossystem** für $a = 4.0, b = 0.352, d = 0.1, e = 1.544, f = 0.2$ und die g-Werte der obigen Tabelle.

Man sieht eine typische Feigenbaum-Route ins Chaos. Der Plot für $g = 0.0$ steht im Text weiter oben. Der Attraktor sieht genauso aus wie der Chaos-Attaktor des originalen Chaossystems. Trotzdem ist das kein zulässiges (neues) Chaos-Beispiel.

Sind die Beispiele wirklich alle neu?

Es kann nicht völlig ausgeschlossen werden, dass einige der folgenden Beispiele nicht neu sind. Aber bei jedem Beispiel wurde geprüft, ob es ein ”Original” ist. Der Autor wäre für jeden entprechenden Hinweis dankbar.

Es handelt sich bei dieser Frage um ein prinzipielles Problem:

- Jedes System der hier betrachteten Art kann durch lineare Transformationen der Variablen in unendlich viele formal andere aber doch letztlich äquivalente Systeme transformiert werden.
  Eine solche lineare Transformation ist weiter oben beim Bezug zu mechanischen Oszillatoren exemplarisch vorgerechnet worden.

  Das Problem ist also real. Kann es eine Liste der ”echten” Chaos-Systeme geben? Eine Normalform als Referenz-Notation? Die hier praktizierte Begrenzung auf einen maximalen Grad der Polynome auf 3 ist ein Versuch Ordnung zu halten. Wäre die minimale Nichtlinearität der Polynom-Terme ein besseres Kriterium für eine Normalform oder die Anzahl der Polynom-Terme als Minimalform? Offene Fragen.
- Es gibt $\sum_{i=0}^{3} \binom{i+2}{2} = 20$ geordnete Tripel von natürlichen Zahlen, deren Summe maximal 3 beträgt. Ein 3D-System das alle Möglichkeiten enthält hat also $3 * 20 = 60$ Monome vom Grad bis 3. Mit also 60 Parametern!

- Grobe dynamische Systeme haben per Definition im Raum der polynomialen Systeme immer ”Nachbarn” mit gleichem qualitativen Verhalten. Also auch Chaos. Die Addition kleinster Monome ist immer möglich, erzeugt aber kein zulässiges neues Chaos-System. Ein Beispiel solcher, hier unzulässigen, Systeme wurde weiter oben demonstriert.
- Ein Kompromiss bei der Erstellung einer Liste von ”neuen” chaotischen Systemen könnte das Datum der Erstveröffentlichung sein, selbst wenn das betreffende System eigentlich minimaler formuliert werden könnte. Man kann von einem modellierenden Nicht-Mathematiker nicht automatisch verlangen, auch noch nach Minimalformen zu suchen.
- Eine weitere Frage ist der Chaos-produzierende Parameter-Bereich. Wenn in einem System Chaos gefunden wurde, so ist es denkbar, dass es ganz andere Ecken im Parameterraum dieses Systems gibt, die auch Chaos hervorrufen. Ist das dann neues Chaos?
- Wenn sich ein bereits publiziertes System, aber ohne Chaos, in einem späteren Projekt chaotisch verhält, ist das dann ein neues Chaos-System? Ja. Zu neuem Chaos gehören nicht nur die Differentialgleichungen sondern auch eine Eingrenzung (Abgrenzung) des Chaos-produzierenden Parameter-Bereiches. In dieser Arbeit ist das ein Intervall. Das Minmum.

Wann zählt ein Chaos als Chaos-Beispiel?

In dieser Sammlung werden nur Intervalle mit Chaos angegeben, keine Gebiete. Das hat praktische Gründe. Er reicht aus, um die Geschichte zu erzählen. Und zum Darstellen einer Route ins Chaos sind Intervalle genau richtig.

Wenn man im betrachteten System für andere Parameter-Tupel auch Chaos findet, kann das nur als neu gelten, wenn es keinen Weg im Parameter-Raum gibt, der vom neuen Tupel zum alten Intervall führt. Das kann mühsam sein. Es wird hier auch nicht praktiziert. Es ist schlichtweg nicht das Ziel.

Wir legen hier fest, dass mehrfaches Chaos in einem Beispiel schön ist, aber nicht mitzählt. Das muss man nicht teilen. Uns genügt ein einziges Intervall.

Trotzdem zeigen wir im Folgenden zwei Fälle, wo ein Parameter-Intervall im Chaossystem auch Chaos erzeugt und (offenbar) nicht mit dem angegebenen Original-Intervall verbunden ist. Nur um zu zeigen, dass es das gibt.

Der konstante oder lineare Zu- beziehungsweise Abfluss an Substrat (Parameter b und d) widerspricht nicht der Modellierung einer Reaktion. Allerdings im ersten Beispiel die negativen Werte der beteiligten Variablen. Das zweite Beispiel hat sogar zwei negative Parameter, aber die drei Variablen sind stets positiv. Das kann ein Modell sein.

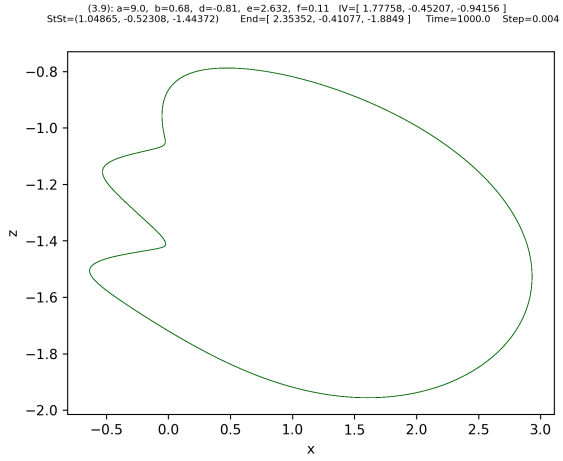
e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
2.6320	Ein etwas verdrehter einfacher Grenzzyklus.	
2.6341	Ein Grenzzyklus und ein Chaos-Band in Koexistenz.	0.033
2.6345	Ein etwas verdrehtes einfaches Chaos-Band.	0.033
2.6620	Ein einmal gefaltetes zweifaches Chaos-Band.	0.015
2.6630	Ein Grenzzyklus und ein zweifaches Chaos-Band.	0.014
2.6660	Ein etwas verdrehter einfacher Grenzzyklus.	

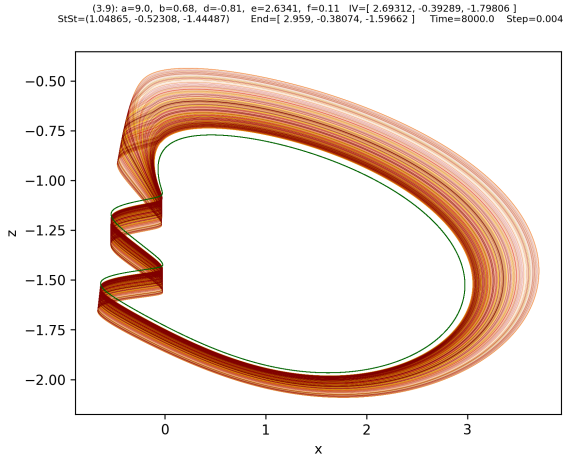
Ausgewählte stationäre Trajektorien des **Chaossystems** für $a = 9.0,\ b = 0.69,\ d = -0.81,\ f = 0.11$ und zunehmende Werte von e.

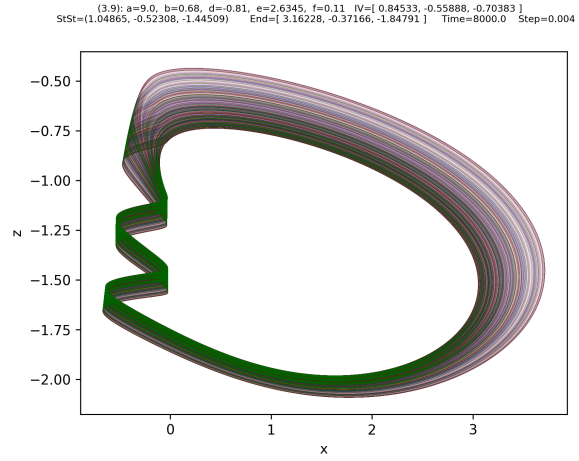
Ein einfacher Grenzzyklus bekommt schlagartig neben sich ein begleitendes Chaos-Band. Der einfache Grenzzyklus verschwindet. Das einfache Chaos-Band erleidet eine Verdopplungsbifurkation.

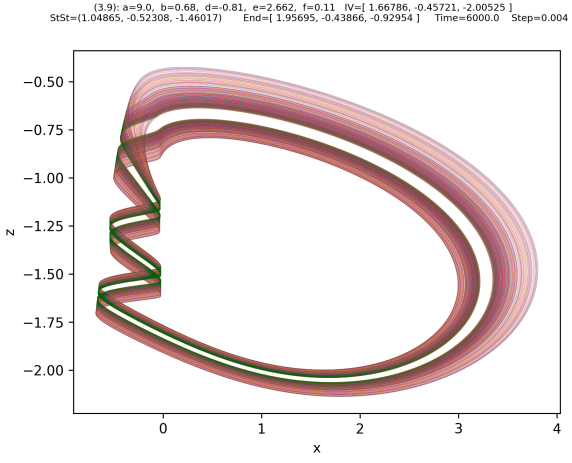
Zwischen dem Chaos-Band erscheint ein neuer einfacher Grenzzyklus. Das Chaos-Band verschwindet schlagartig und der einfache Grenzzyklus verbleibt.

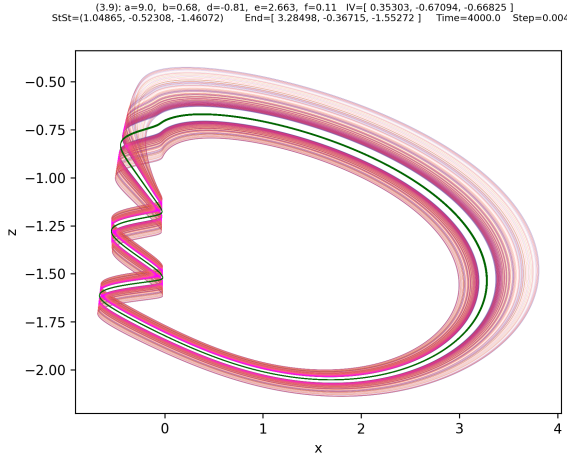
Das Bifurkationsgeschehen kann nicht vollständig den angegebenen Routen aus der Literatur zugeordnet werden. Alles passiert in einem sehr kleinen Intervall von e. Weitere Bifurkationen konnten nicht entdeckt werden.

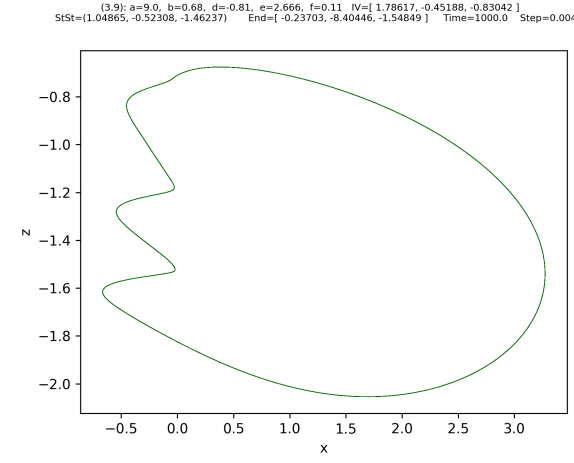












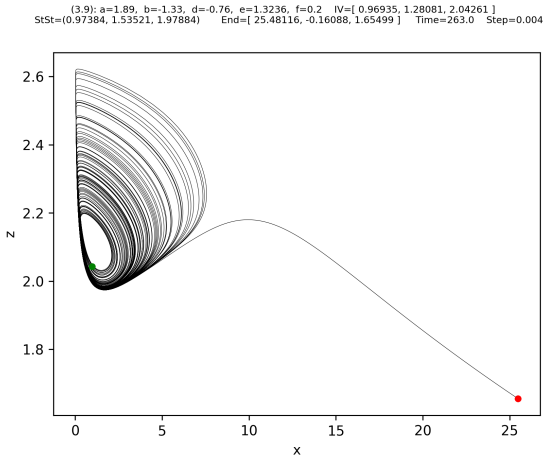
Legende: x-z-Plots des **Chaossystem** für $a = 9.0, b = 0.68, d = -0.81, f = 0.11$ und die zunehmenden e-Werte der obigen Tabelle.

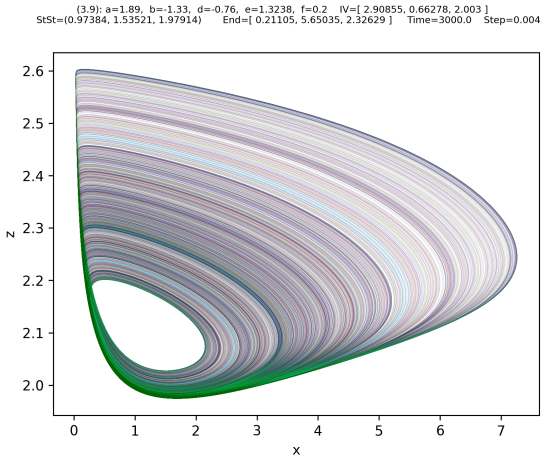
Neben einem verdrehten Grenzzyklus (Bild 1) erscheint ein Chaos-Band (Bild 2). Der Grenzzyklus verschwindet (Bild 3) und das Chaos-Band faltet sich (Bild 4). In der Mitte erscheint ein neuer Grenzzyklus (Bild 5). Das Chaos-Band verschwindet (Bild 6).

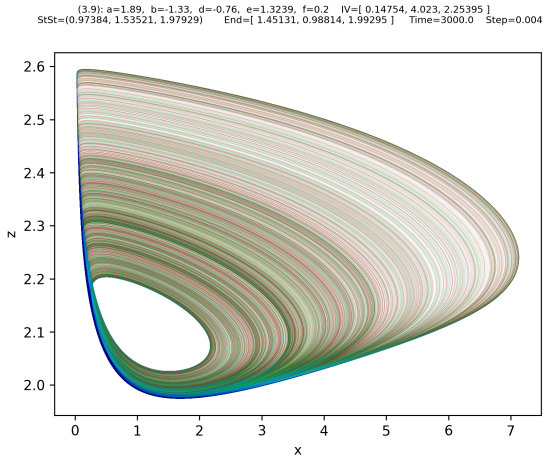
e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
1.3236	Eine Chaos-Ruine.	
1.3238	Chaos kurz nach der Implosion.	0.125
1.3239	Chaos.	0.122
1.325	Ein 2-faches Chaos-Band.	0.083
1.326	Ein 2-faches Chaos-Band.	0.060
1.3264	Ein 4-faches Chaos-Band.	0.041
1.3266	Ein 4-faches Chaos-Band.	0.025
1.3267	Ein 8-faches Chaos-Band.	0.017
1.327	Ein achtfacher Grenzzyklus.	
1.328	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
1.330	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
1.350	Ein einfacher Grenzzyklus.	

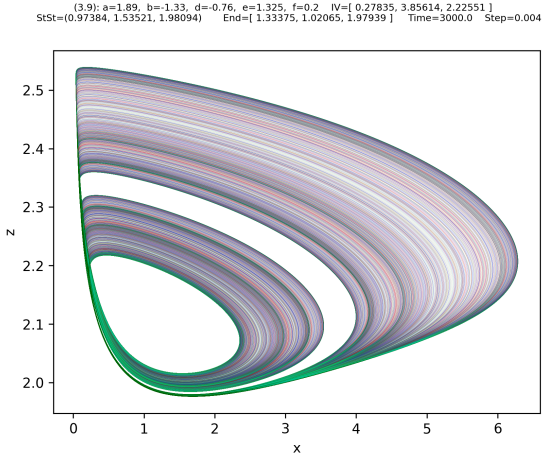
Ausgewählte stationäre Trajektorien des Chaossystems für $a = 1.89$, $b = -1.33$, $d = -0.76$, $f = 0.2$ und zunehmende Werte von e.

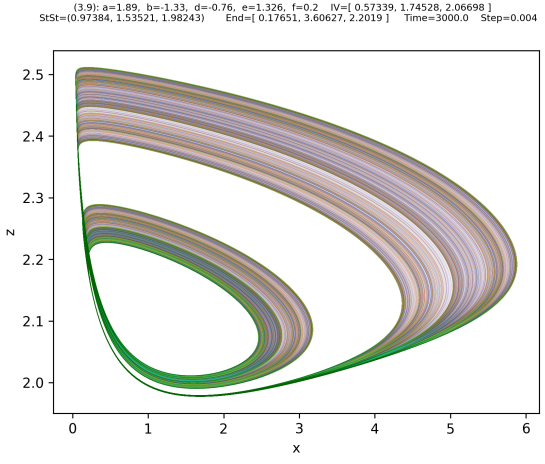
Ein Chaos entsteht schlagartig aus einer Ruine. Es durchläuft dann eine Feigenbaum-Route rückwärts. Die Route endet mit einem einfachen Grenzzyklus. Das reine Chaos-Teilintervall ist nur etwa $0.003e$ breit.

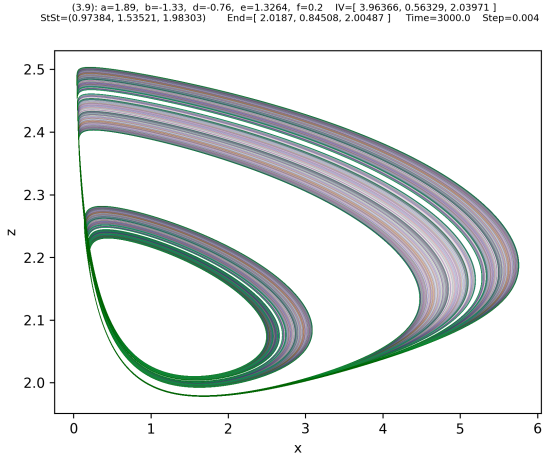






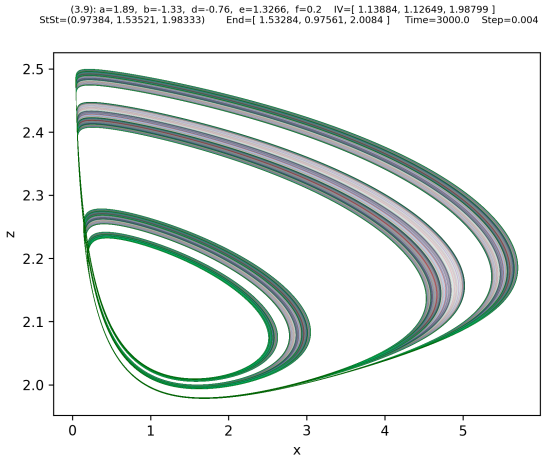


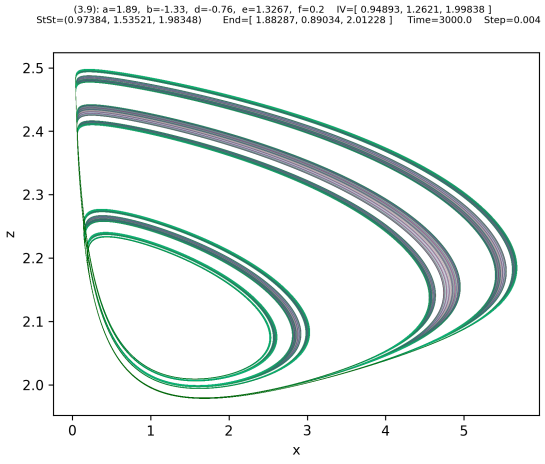


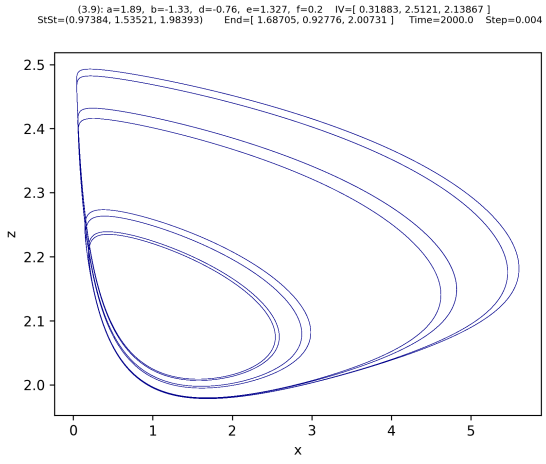


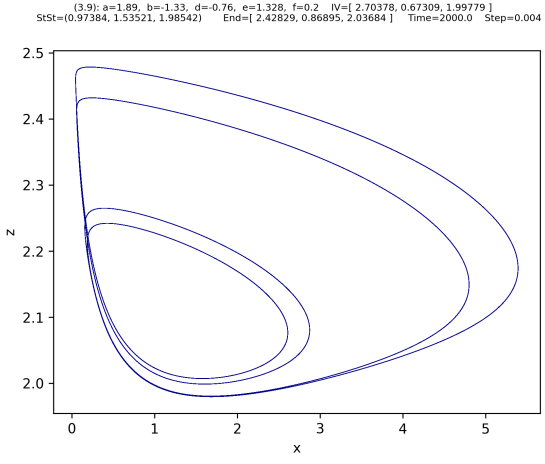
Legende: x-z-Plots des **Chaossystem** für $a = 1.89$, $b = -1.33$, $d = -0.76$, $f = 0.2$ und wachsende Werte von e. Die Bilder gehören zu den oberen 6 Zeilen der Tabelle.

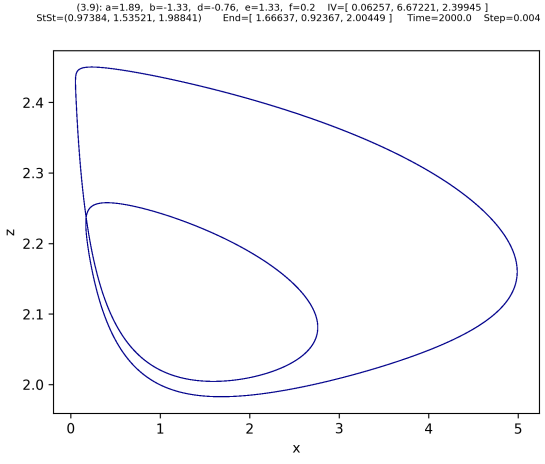
Es beginnt mit dem schlagartigen Auftreten von Chaos aus einer Ruine (Bilder 1 bis 3). Dann startet eine Feigenbaum-Route rückwärts mit 2-fachen Chaos-Bändern (Bilder 4 und 5). Weiter geht es mit dem Aufreißen zu 4-fachen Chaos-Bändern (Bild 6).

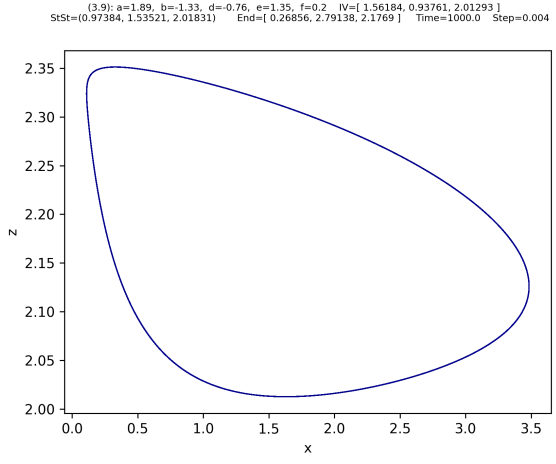












Legende: x-z-Plots des **Chaossystem** für $a = 1.89$, $b = -1.33$, $d = -0.76$, $f = 0.2$ und wachsende Werte von e. Die Bilder gehören zu den unteren 6 Zeilen der Tabelle.

Die Feigenbaum-Route rückwärts wird mit 4-fachen und 8-fachen Chaos-Bändern fortgesetzt (Bilder 1 und 2). Dann folgt die Phase der Grenzzyklen mit achtfachen, vierfachen, zweifachen und einfachen Grenzzyklen (Bilder 3 bis 6).

Die jetzt folgenden Beispiele zeigen nichts als ausgewählte stationäre Verhaltensweisen von Systemen von drei autonomen gewönlichen Differentialgleichungen in einem ausgewählten Parameter-Intervall.

Die Anzahl der beobachteten Bifurkationen ist schon im jeweils angegebenen Intervall so groß, dass eine vollständige Darstellung unmöglich ist.

Selbst wenn man sich nur auf die Darstellung der Routen ins Chaos konzentriert, ist eine komplette Beschreibung nicht sicher. Jedes Parameter-Fenster im Chaos, d.h. ein Gebiet ohne Chaos, erfordert die Bestimmung der Routen ins Chaos an seinen Rändern. Niemand kann garantieren, dass man dabei nicht ein winziges Parameter-Fenster mit Chaos übersieht, bzw. umgekehrt.

Die Routen ins Chaos sind nicht immer leicht zu identifizieren. Mehr noch, es gibt vermischte Routen, unterbrochene Routen, unvollendete Routen.

So ist jedes Beispiel hier nur ein grober Blick auf ein kleines Intervall im vieldimensionalen Parameter-Raum. Das ist ernüchternd, aber realistisch.

Vielleicht kann die Menge der hier erfassten Bifurkationen als Beitrag zur leichteren Erkennung von Chaos und seinen Routen dienen.

Es beginnt mit einer Serie mit Varianten des Pendel-Polynoms.

Zum erfolgreichen Zerreißen eines ebenen dynamischen Systems gehört die passende Wahl von $F_2(x, y, z)$. Es sollte einen positiven Wachstumsanteil und einen negativen Schrumpfungsterm für die dritte Dimension z besitzen. Gleichzeitig soll $F_2(x, y, z)$ auch ein Pendeln der Variablen x in ihrer Differentialgleichnung unterstützen (obwohl $F_2(x, y, z)$ dort abgezogen wird).

Im Chaossystem sind das die Terme exy und $-z$.
Das hatte sich 1978 wegen der Modellierung einer Deponierung so ergeben.
Manchmal nennen wir das Pendel-Polynom $F_2(x, y, z)$ daher "Depot-Polynom".
Im ersten Beispiel lauten die entsprechenden Terme z.B. x und $-z^2$. Ohne das Ziel einer Depot-Modellierung kann $F_2(x, y, z)$ aber auch addiert werden.

Auch alle anderen Beispiele sind nach diesem Muster aufgebaut. Aber Vorsicht ist erforderlich, wenn die Terme auch negative Werte annehmen können. Dann wird aus einem negativen Schrumpfungsterm schnell ein positiver Wachstumstreiber und das System explodiert.

Welcher der Parameter in den Beispielen zur Darstellung der Route ins Chaos als variabel benutzt wird ist willkürlich, es überwiegen a und e.

Zu den drei Extra-Darstellungen nur der Beispiele gelangen Sie über
https://thschulm.de/JkC.html

5. Diskussion und Galerie

Die Idee, durch Zerreißen eines dynamischen Systems aus der Ebene in die dritte Dimension und gleichzeitig eine Dimension aus der Ebene pendeln zu lassen, Chaos zu erzeugen, ist fast 50 Jahre alt. Sie steht nicht unbedingt für reine Mathematik, publikationsfähig war sie nicht. Aber sie hat funktioniert.

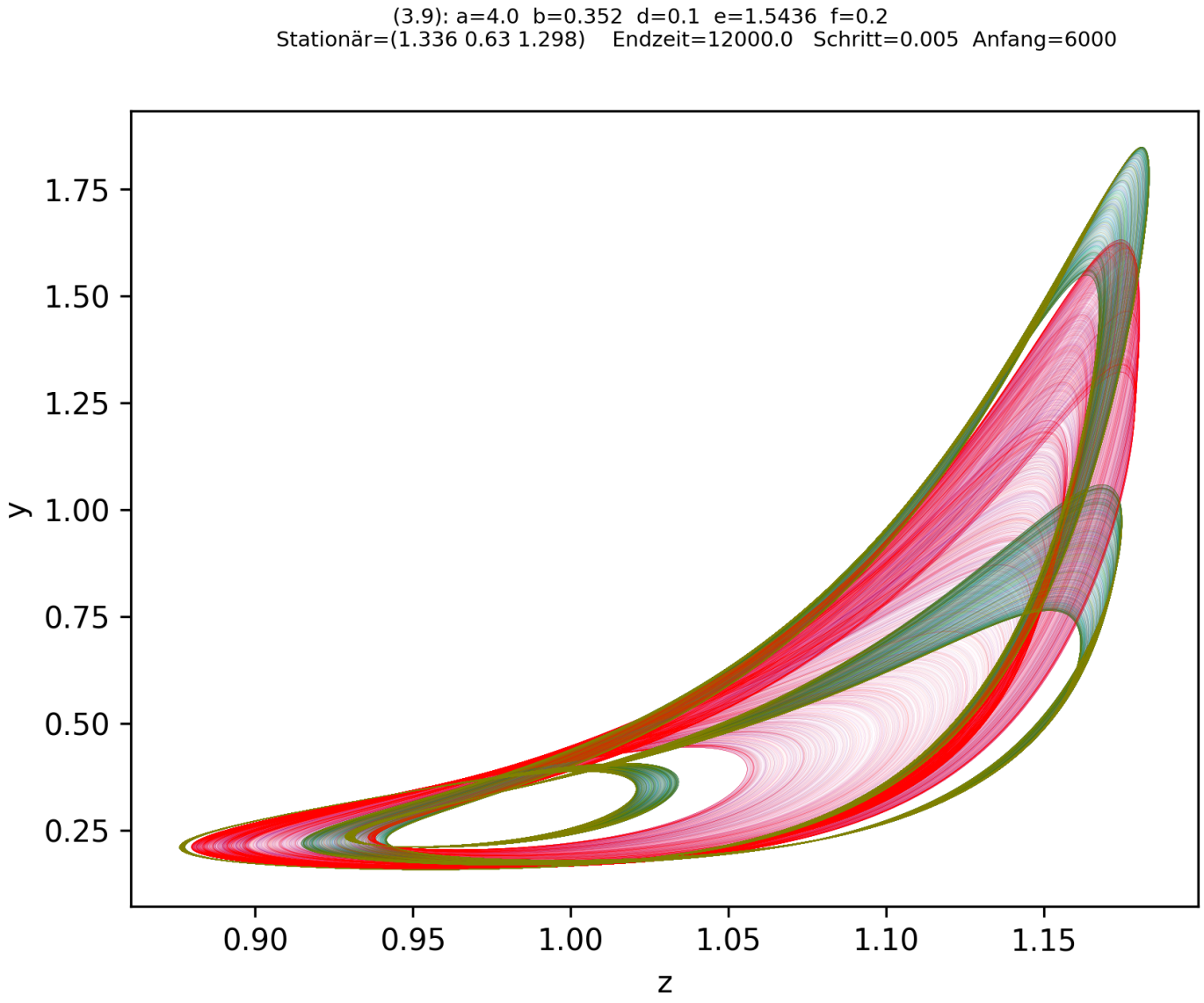
Modelliert wurde 1978 die irreversible autokatalytische Umwandlung eines Substrates X in ein Produkt Y, welches (neben X und Y) auch die reversible enzymatische Deponierung des Substrates X in eine inaktive Form Z mitreguliert. Mit nur einem Ziel: Chaos.

Und, wie gesagt, es hat funktioniert. Das Thema erwies sich damals aber für den Autor und die Rechentechnik in einem molekularbiologischen Institut als zu schwierig. Es wurde kurz darauf beendet und fast vergessen.

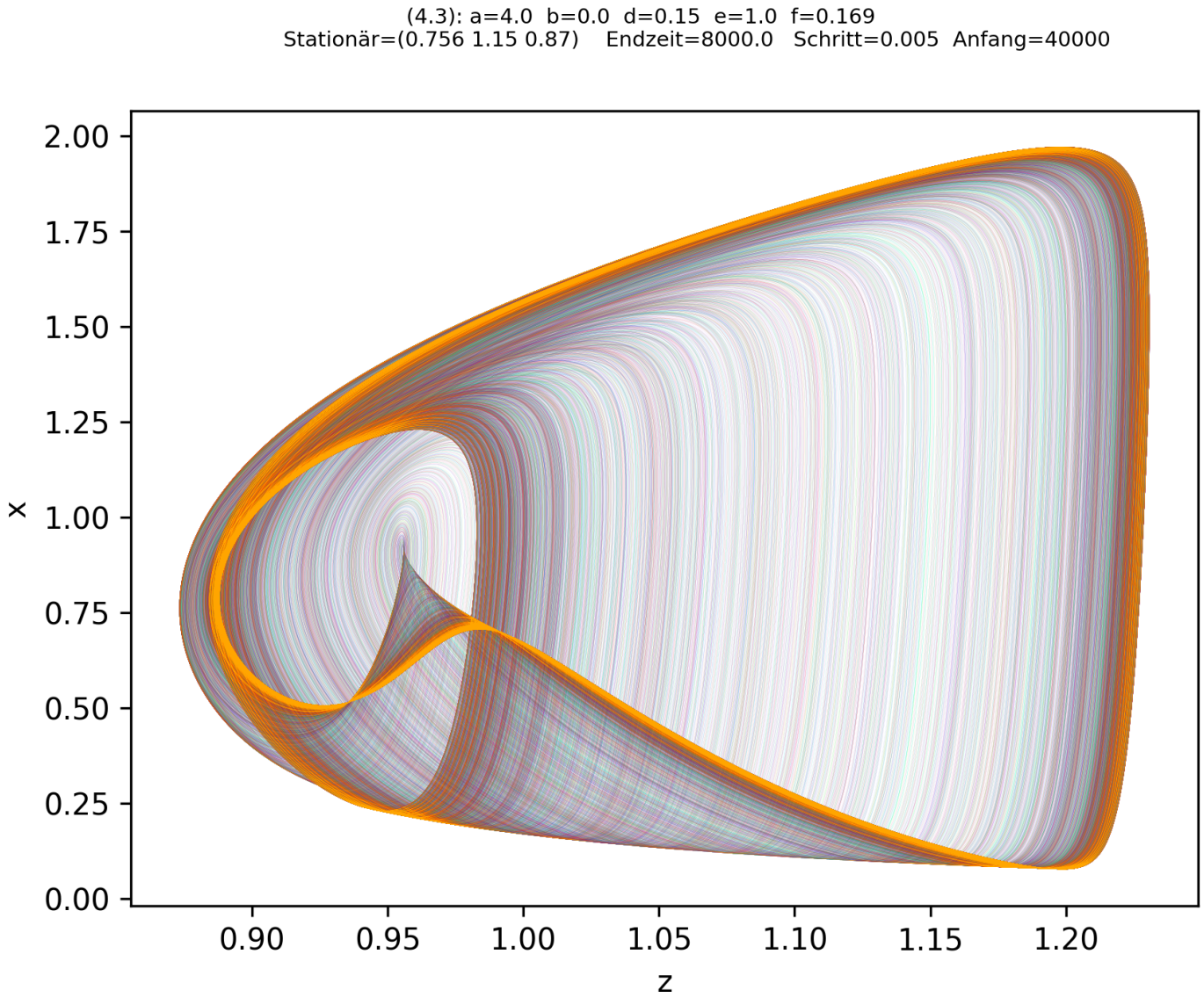
Bis zum Sommer 2022. Die Verfügbarkeit von leistungsfähigen Python-Quelltexten im Internet ließen einen Neustart lohnenswert erscheinen.
Das Resultat lesen sie gerade. Das können sie auch. Eher besser.

Und wie attraktiv unser Chaos ist, sehen sie in der folgenden Chaos-Galerie.
Es werden dabei stets mehrere unterschiedlich gefärbte Trajektorien gezeigt.

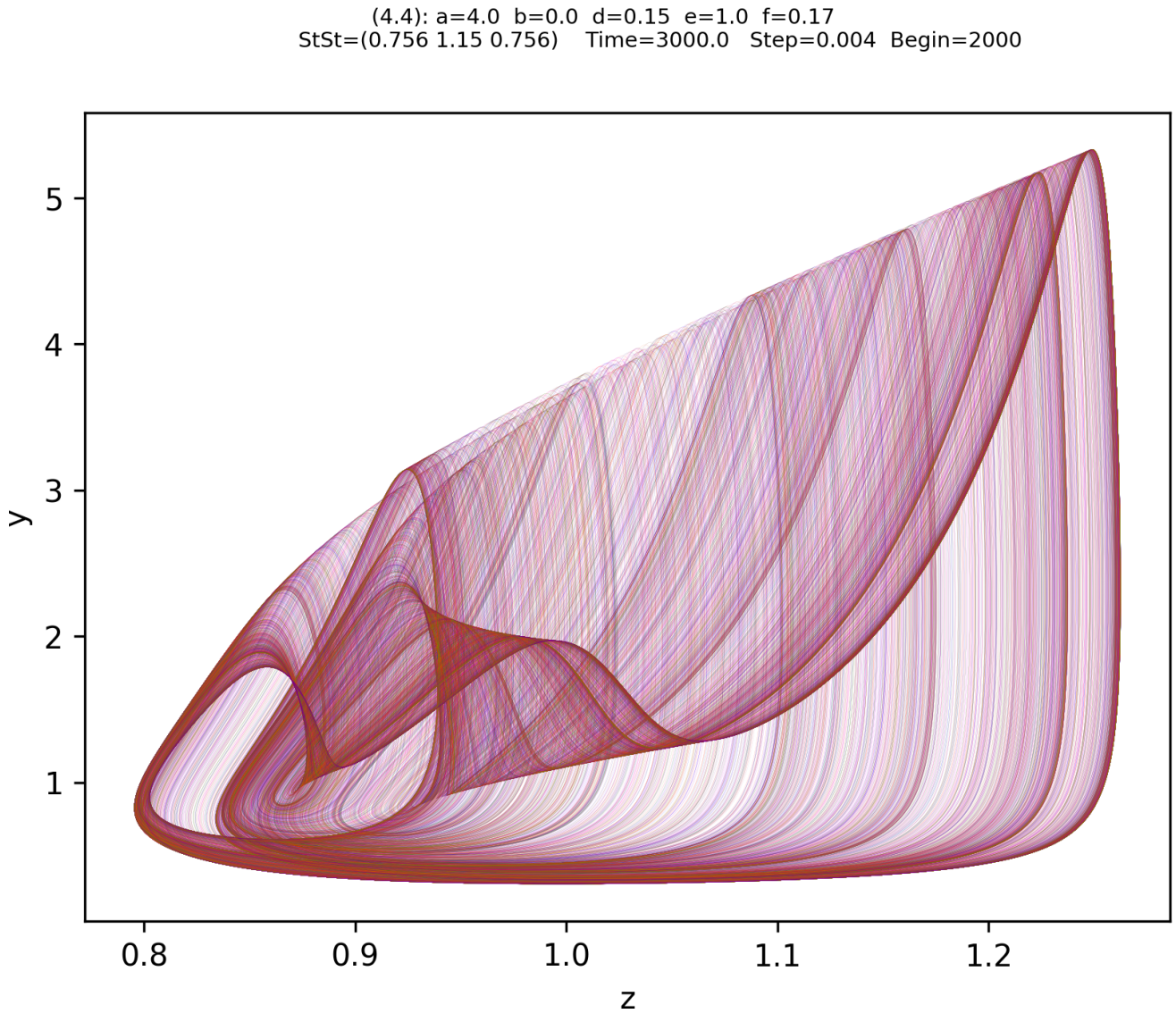
Legende: Doppel-Chaos im Chaossystem: $\lambda_1 \approx 0.038, \lambda_1 \approx 0.021$ für $a = 4.0,\ b = 0.352,\ d = 0.1,\ e = 1.5436,\ f = 0.2.$



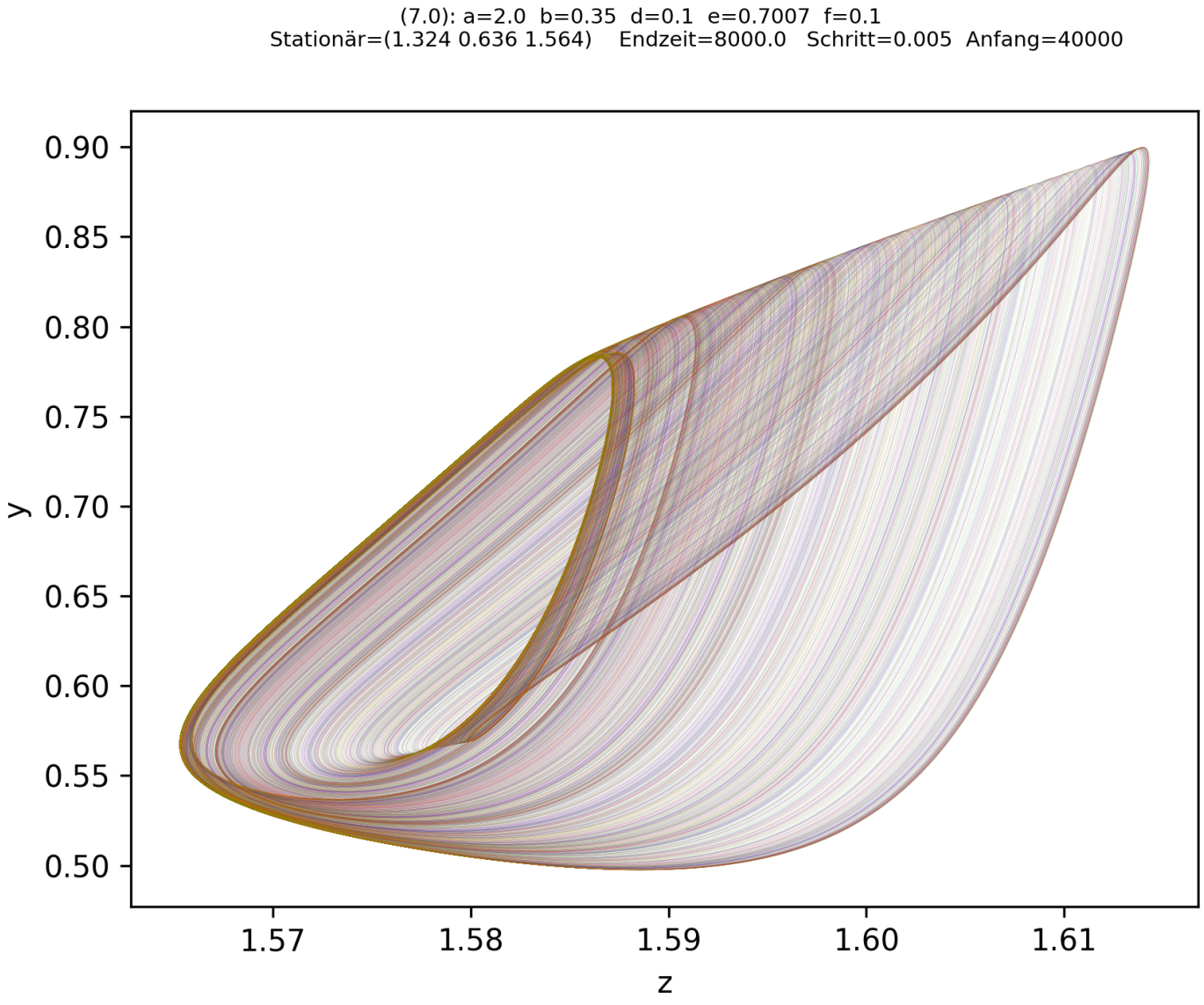
Legende: Chaos im **Beispiel 1**: $\lambda_1 \approx 0.059$
für $a = 4.0$, $d = 0.15$, $e = 1.0$, $f = 0.169$



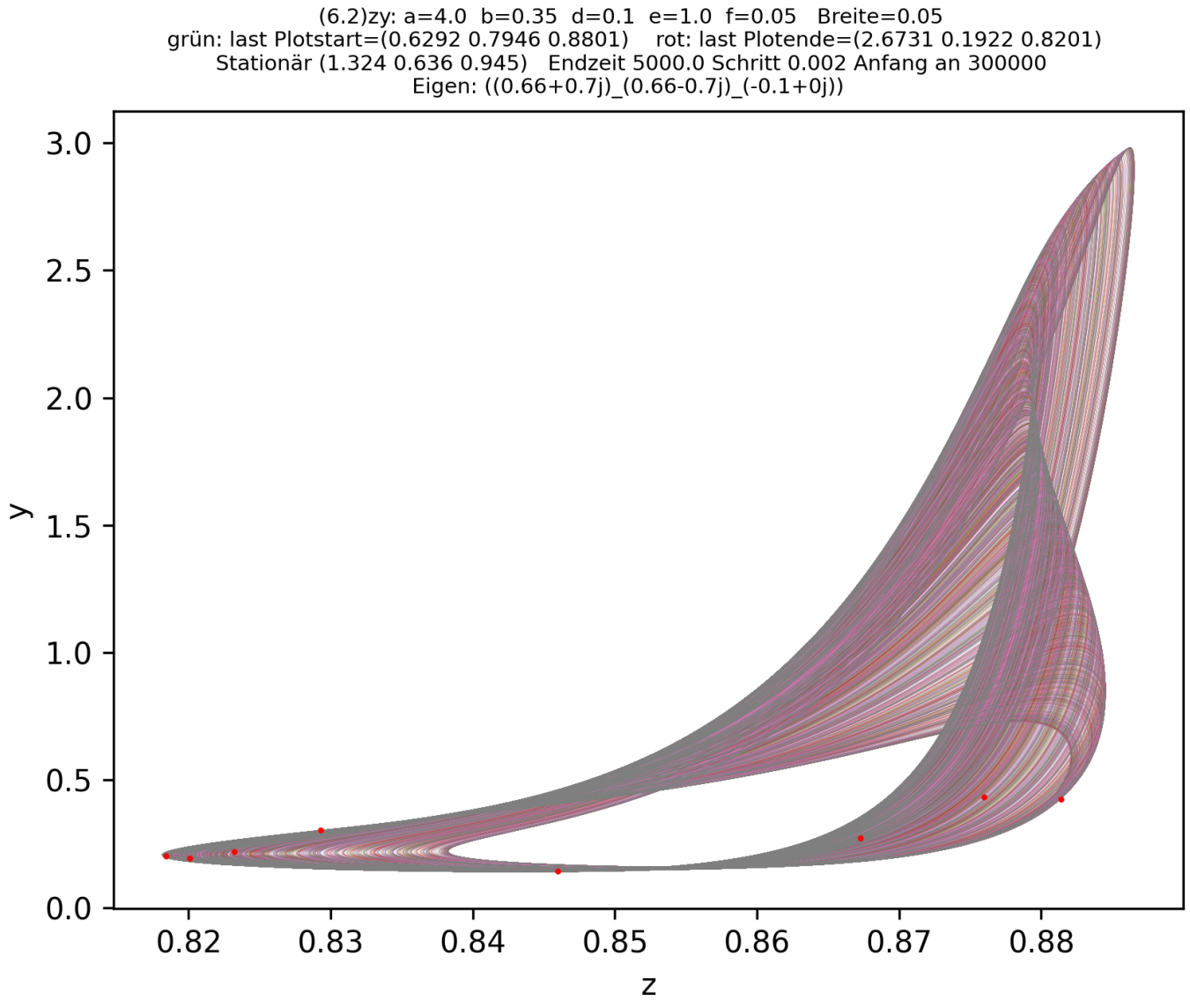
Legende: Chaos im **Beispiel 2**: $\lambda_1 \approx 0.088$
für $a = 4.0,\ d = 0.15,\ \text{und}\ \ f = 0.17\,.$



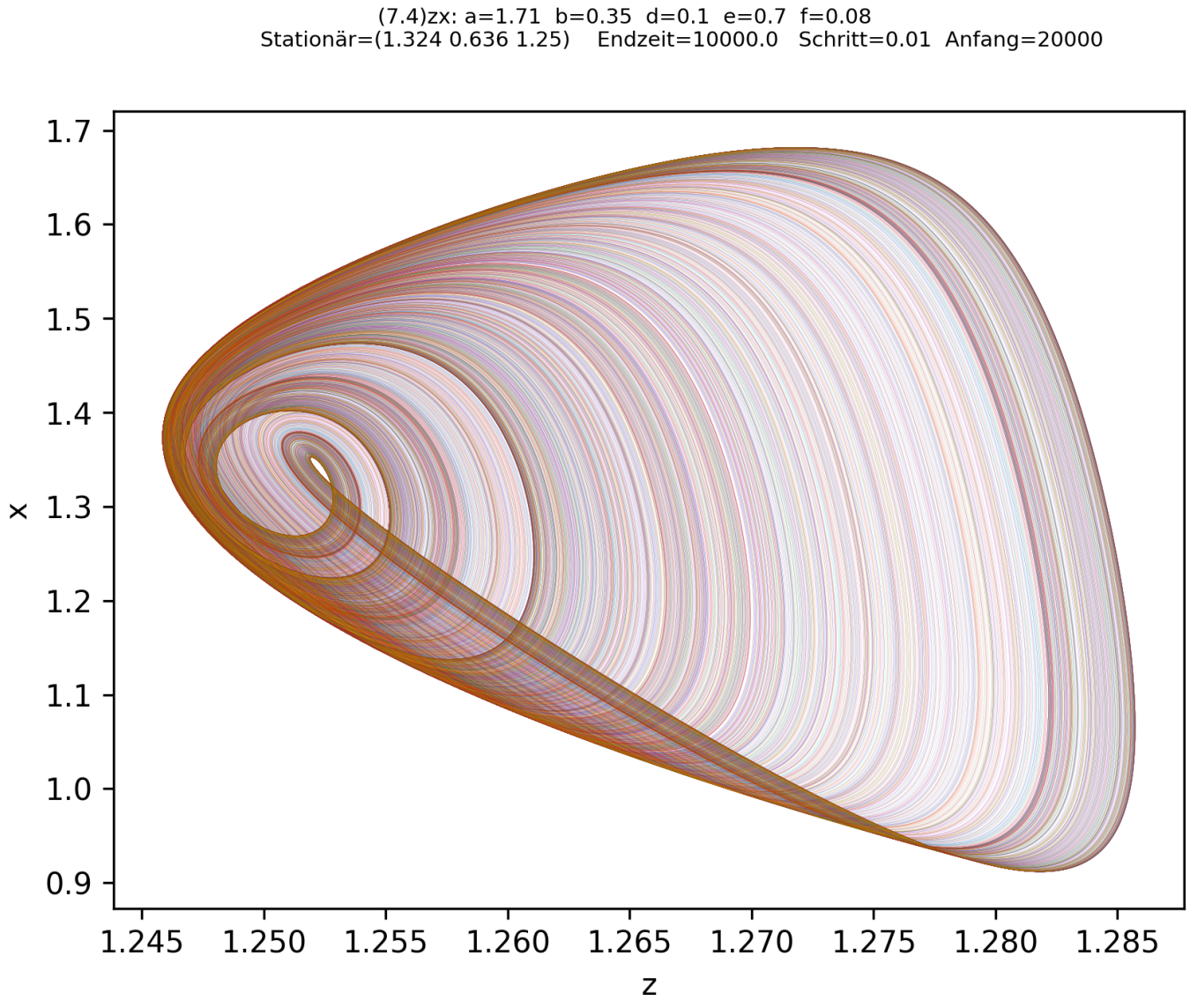
Legende: Chaos im **Beispiel 3**: $\lambda_1 \approx 0.022$
für $a = 2.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 0.7007$, $f = 0.1$



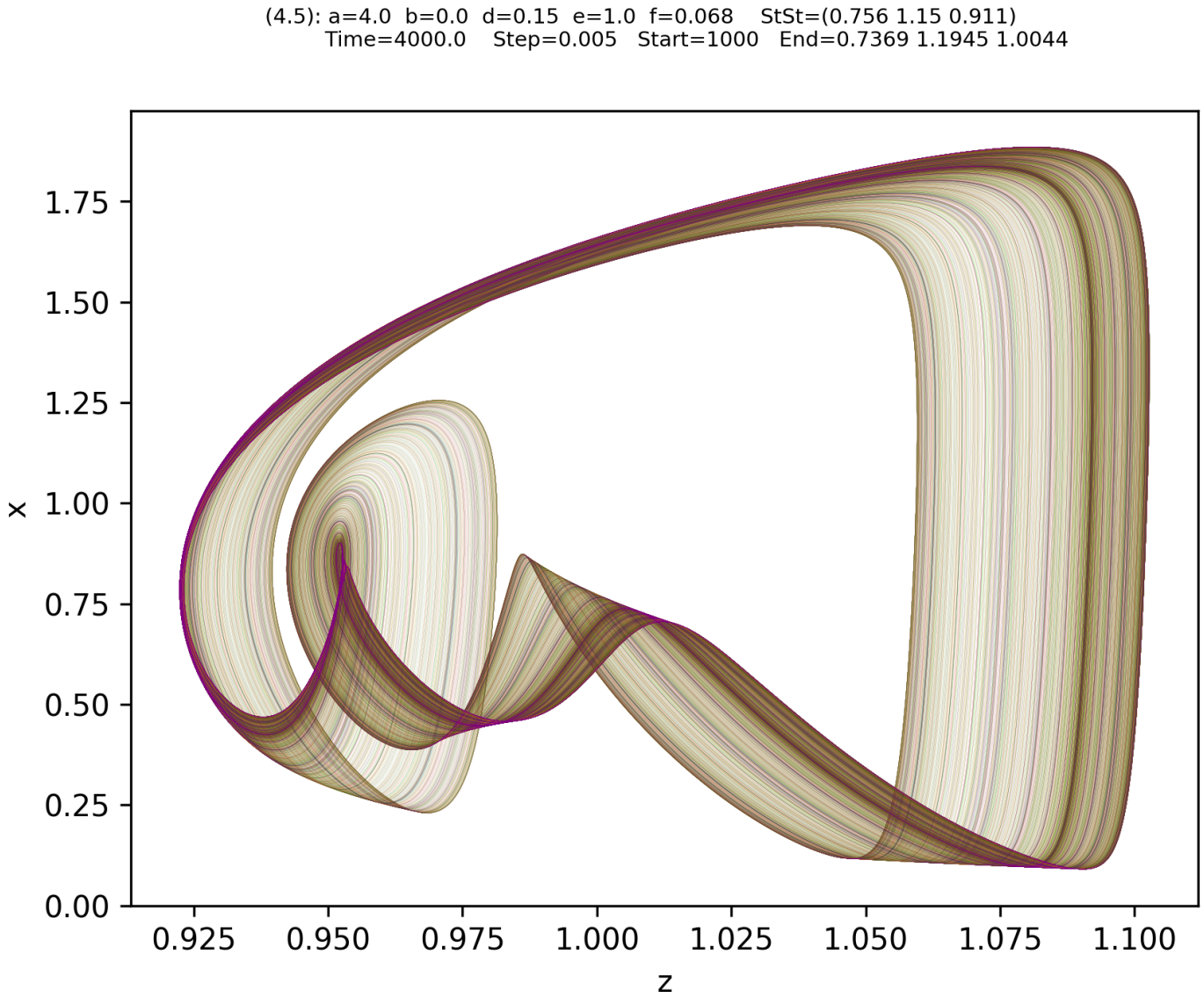
Legende: Chaos im **Beispiel 4**: $\lambda_1 \approx 0.030$
für $a = 4.0$, $b = 0.0$, $d = 0.15$, $e = 1.0$, $f = 0.05$



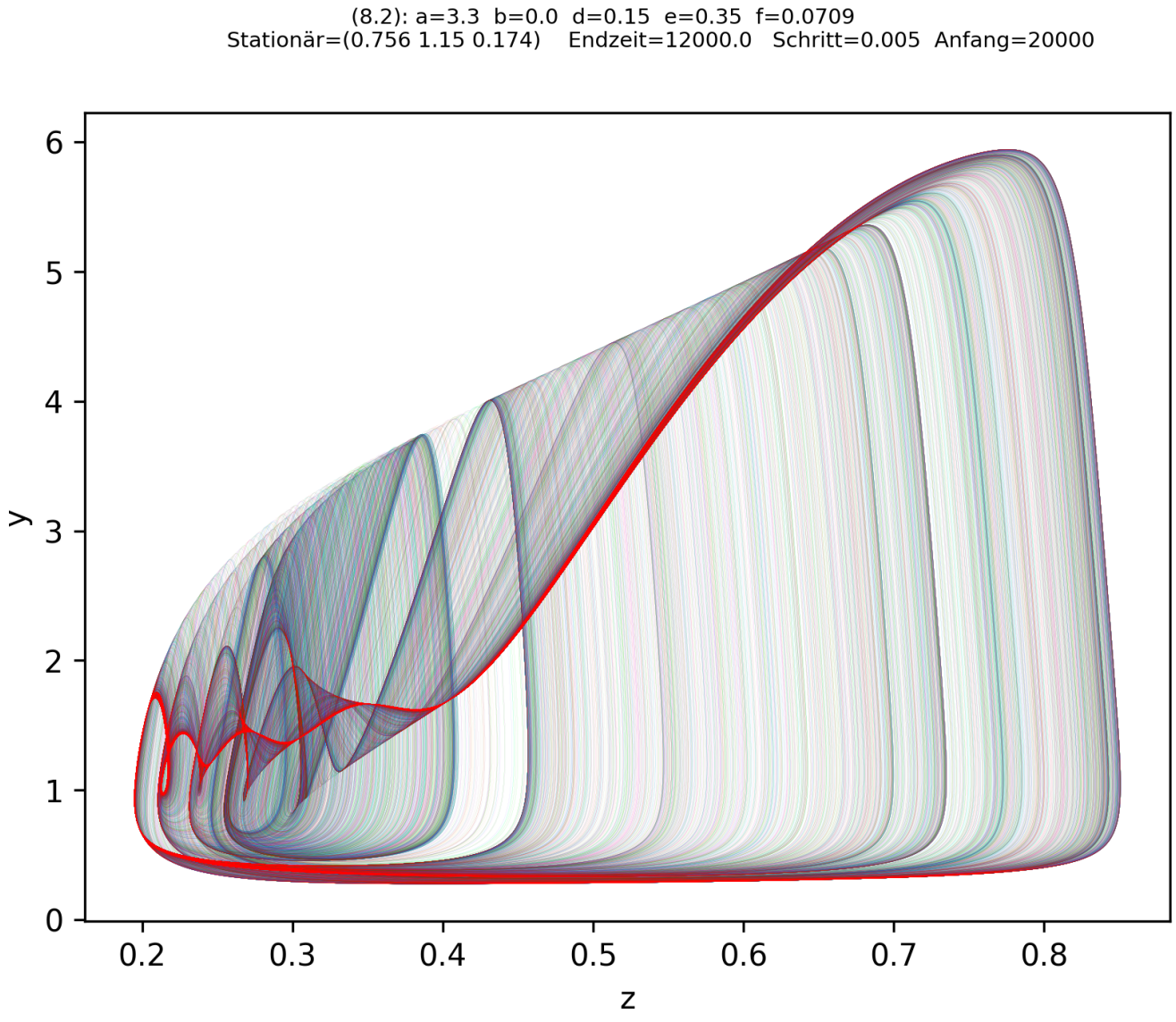
Legende: Chaos im **Beispiel 5**: $\lambda_1 \approx 0.025$
für $a = 1.71$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 0.7$, $f = 0.08$



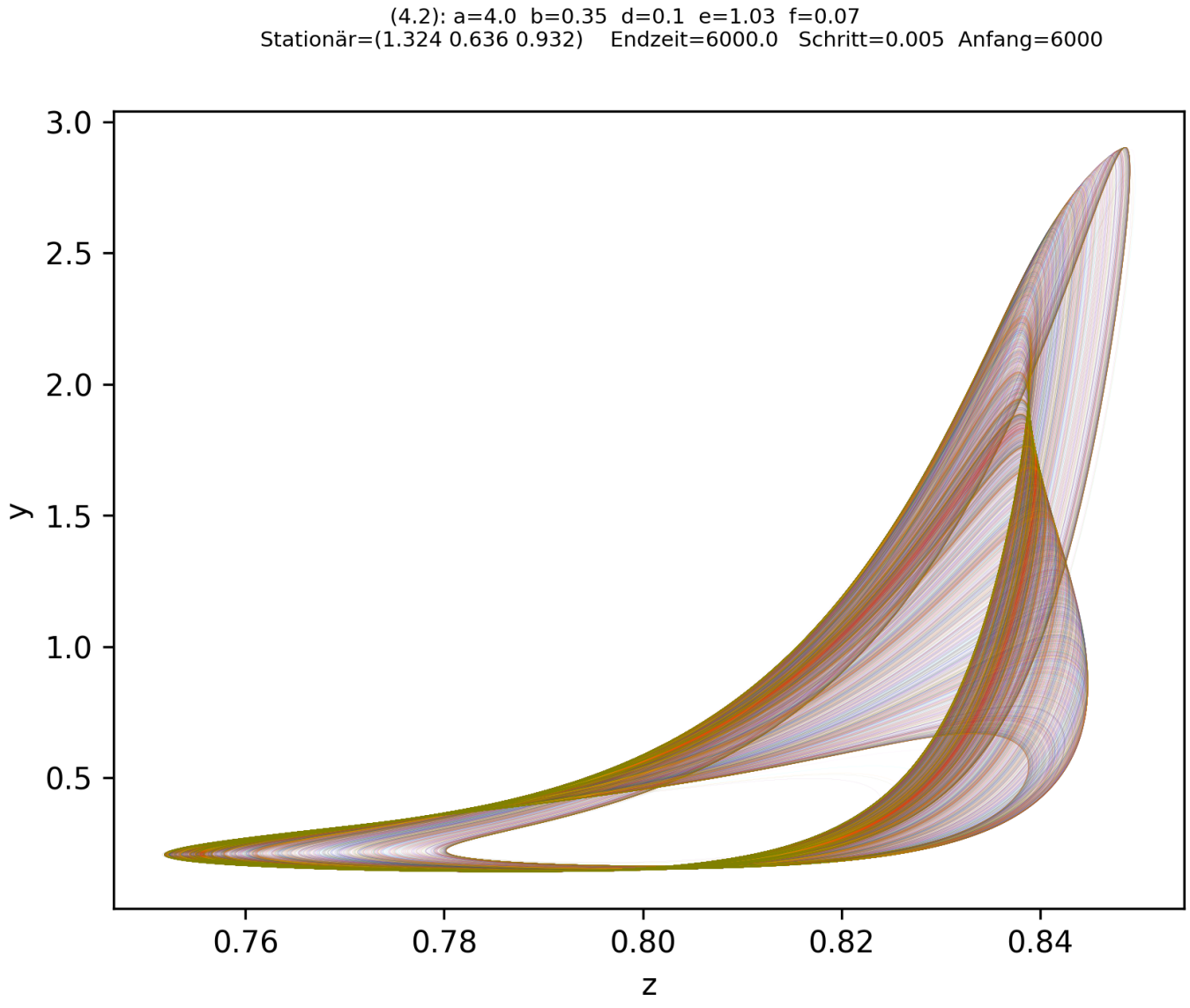
Legende: Chaos im **Beispiel 6**: $\lambda_1 \approx 0.025$
für $a = 4.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 1.0$, $f = 0.068$



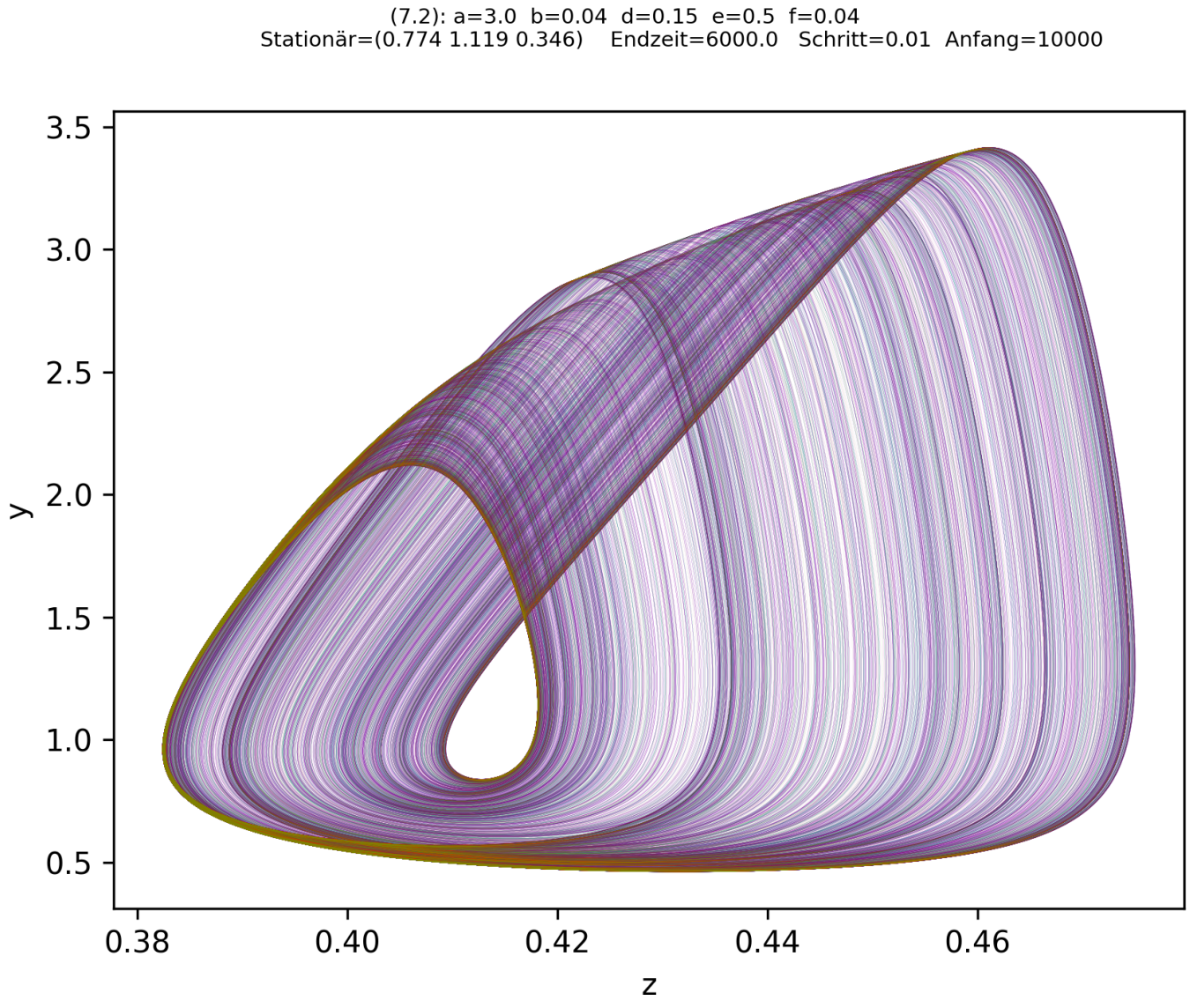
Legende: Chaos im **Beispiel 7**: $\lambda_1 \approx 0.050$
für $a = 3.3$, $b = 0.0$, $d = 0.15$, $e = 0.35$, $f = 0.0709$



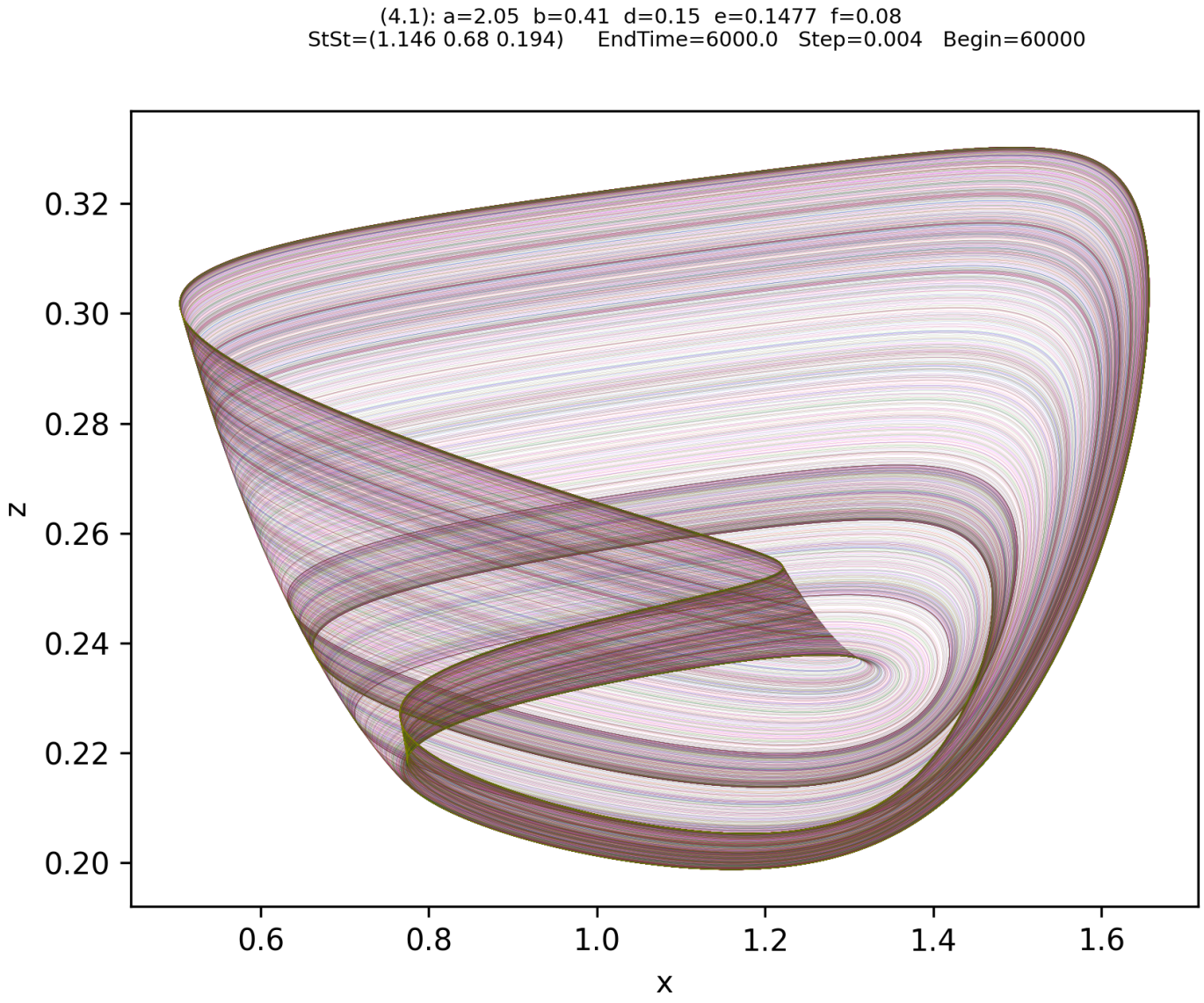
Legende: Chaos im **Beispiel 8**: $\lambda_1 \approx 0.029$
für $a = 4.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 1.03$, $f = 0.07$



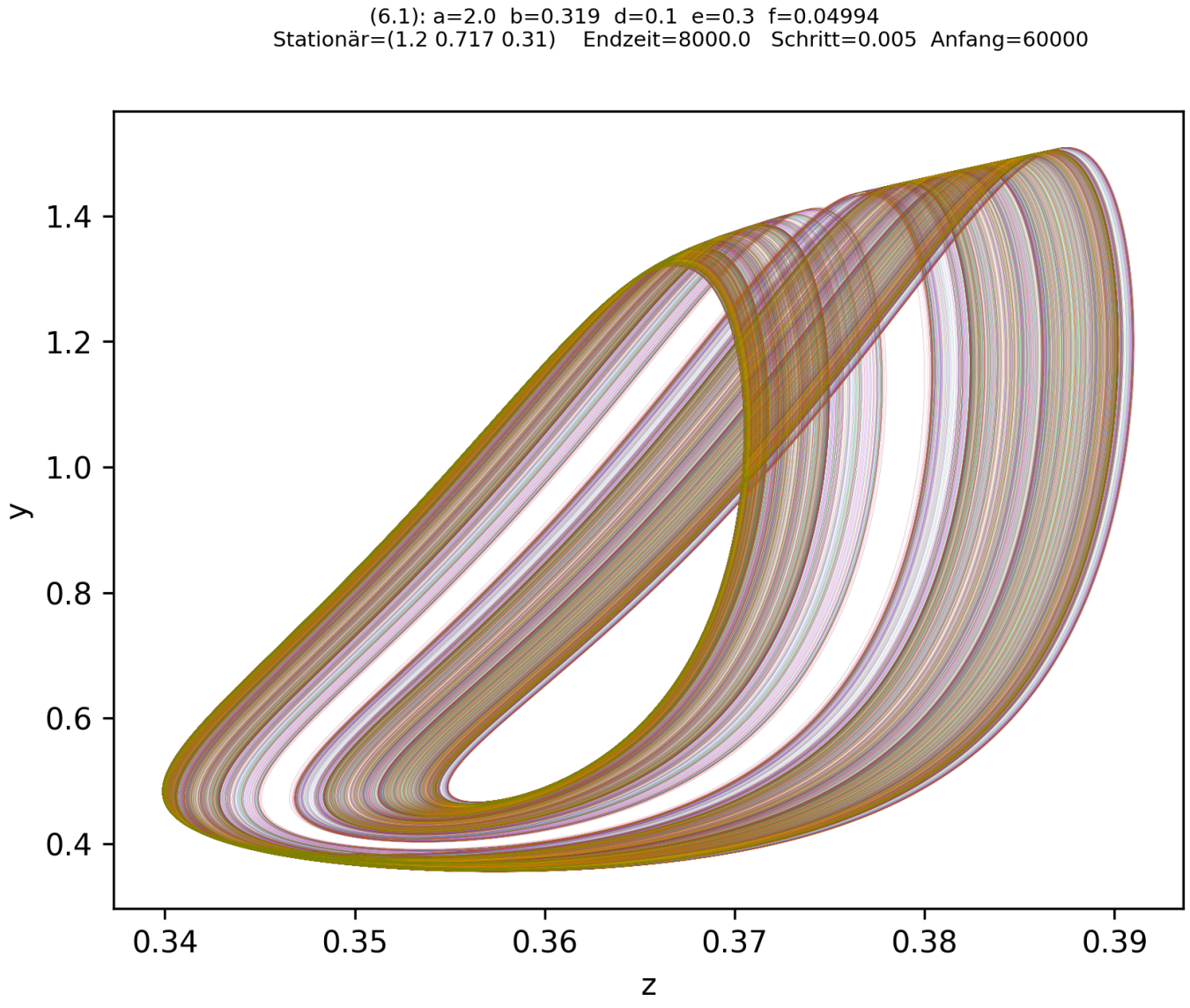
Legende: Chaos im **Beispiel 9**: $\lambda_1 \approx 0.057$
für $a = 3.0$, $b = 0.04$, $d = 0.15$, $e = 0.5$, $f = 0.04$



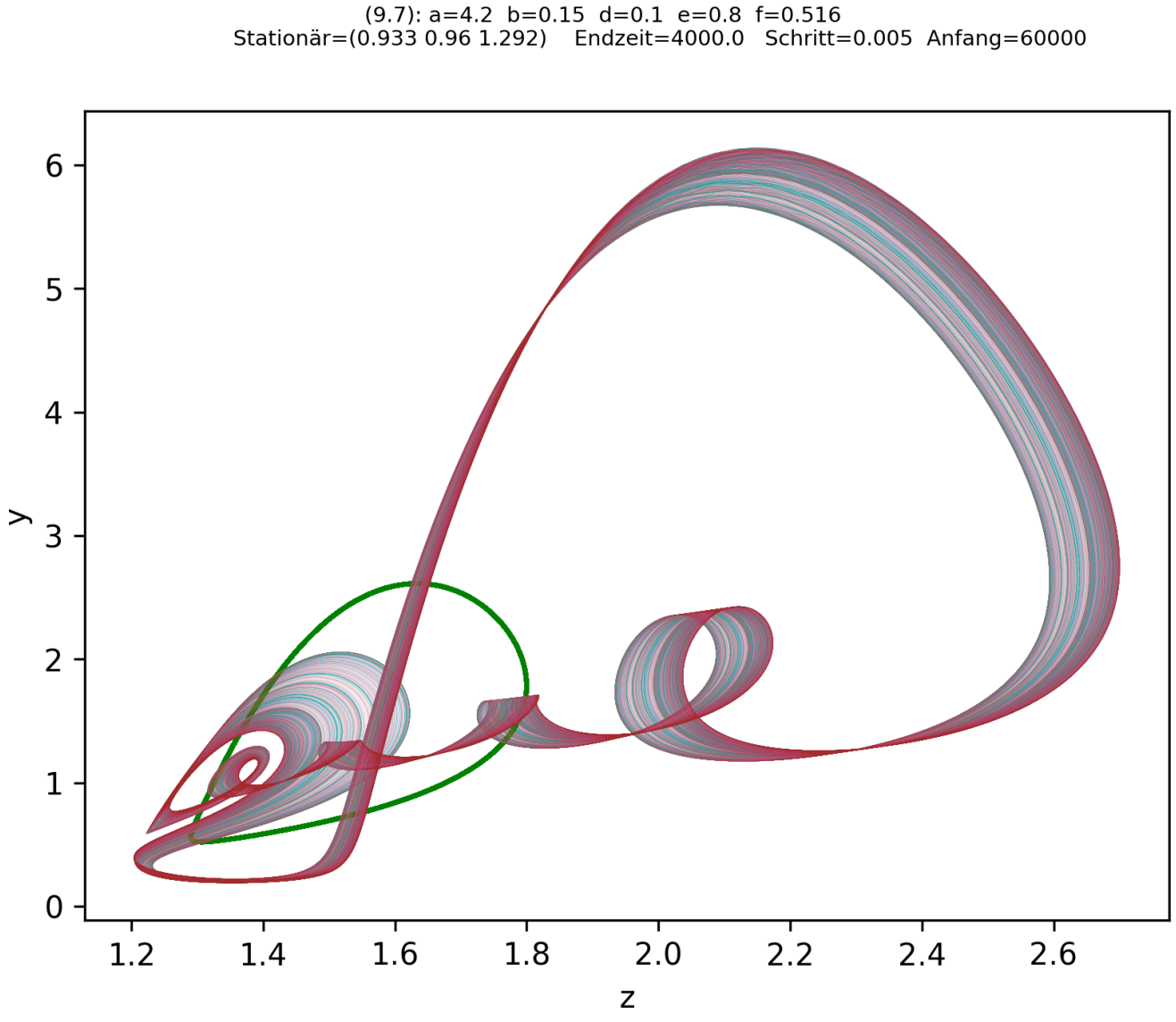
Legende: Chaos im **Beispiel 10**: $\lambda_1 \approx 0.019$
für $a = 2.05$, $b = 0.41$, $d = 0.15$, $e = 0.1477$, $f = 0.08$



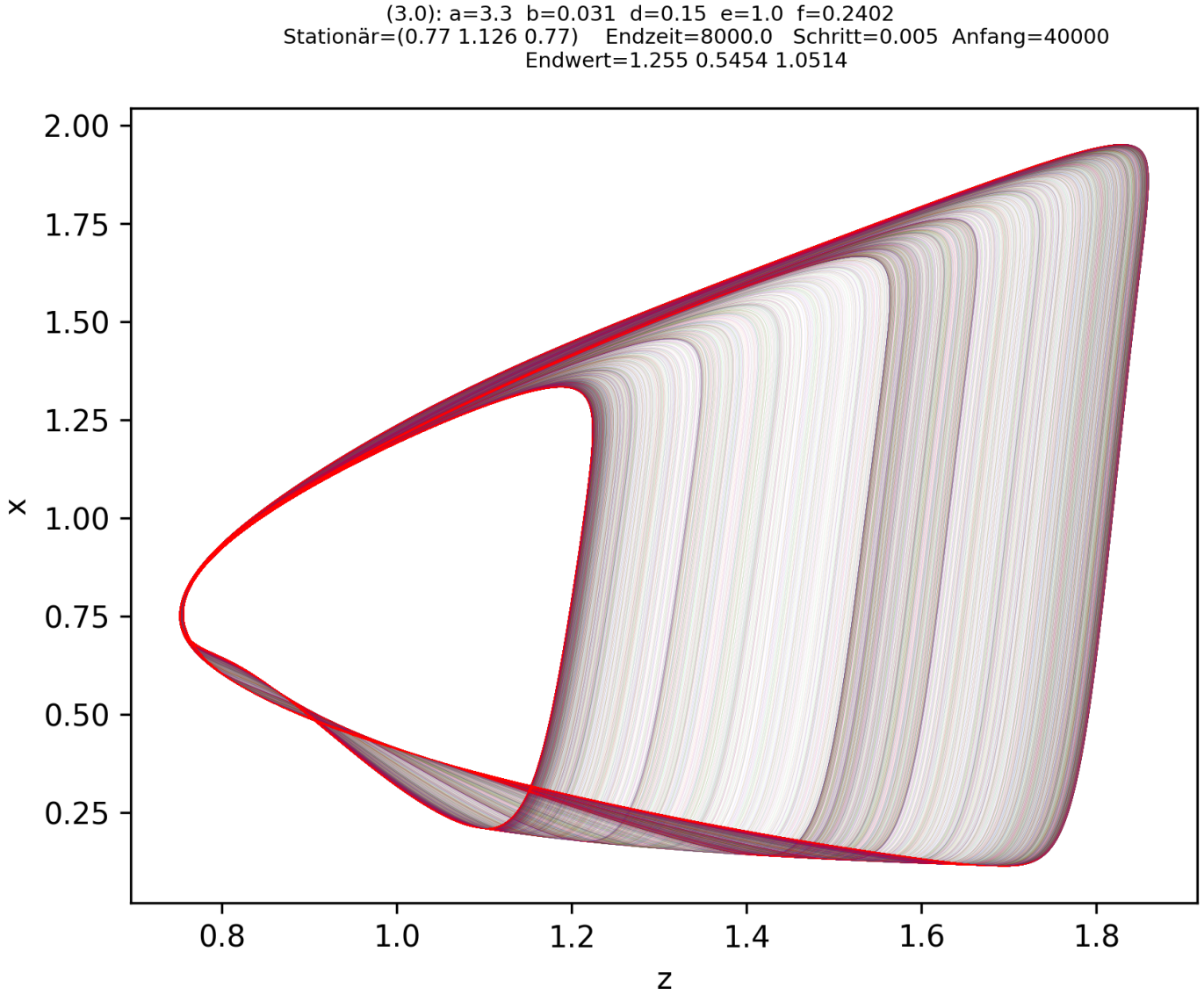
Legende: Chaos im **Beispiel 11**: $\lambda_1 \approx 0.016$
für $a = 2.0$, $b = 0.319$, $d = 0.1$, $e = 0.3$, $f = 0.04994$



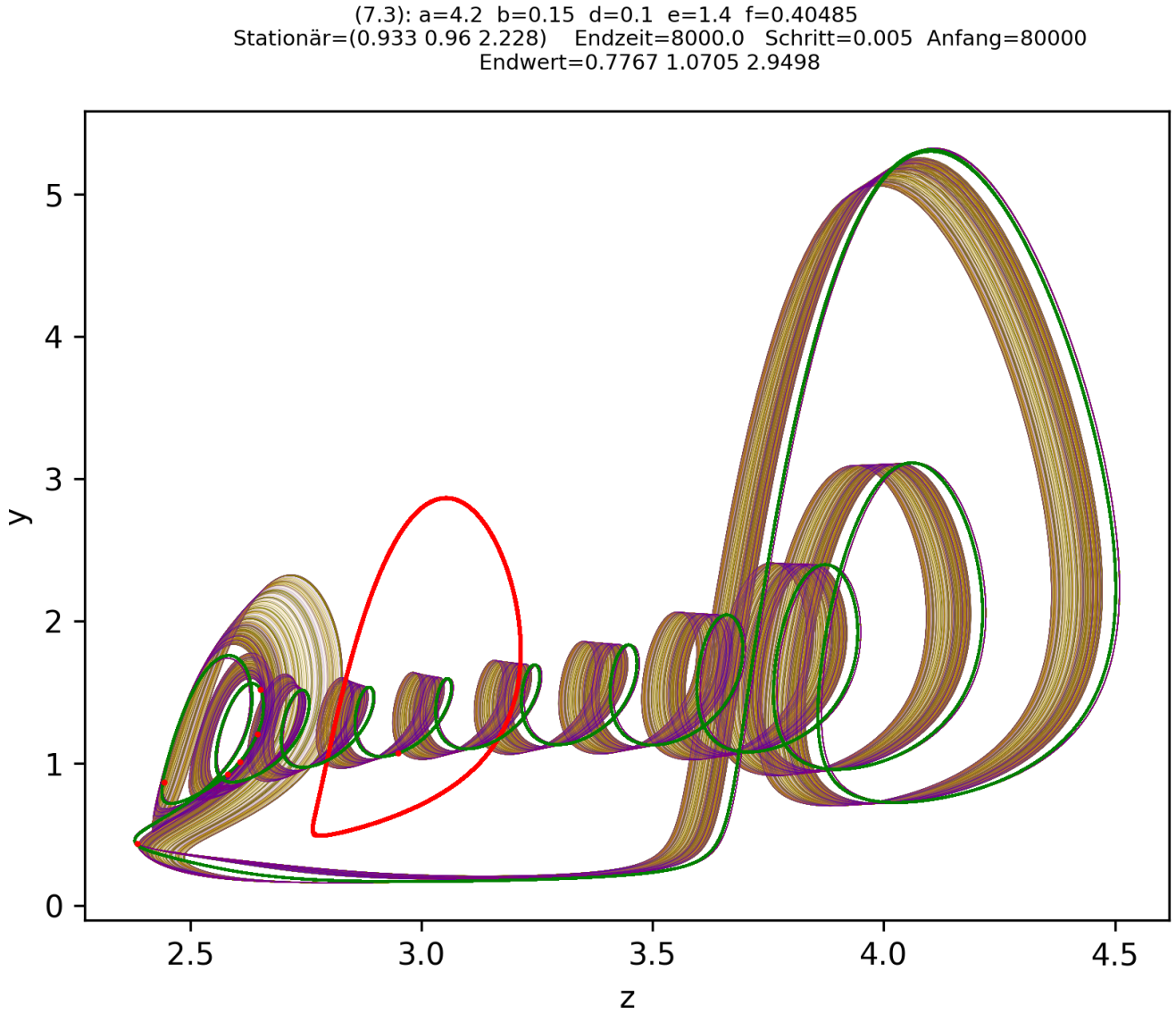
Legende: Chaos im **Beispiel 12**: $\lambda_1 \approx 0.030$
für $a = 4.2$, $b = 0.15$, $d = 0.1$, $e = 0.8$, $f = 0.516$
Koexistenz mit einem einfachen Grenzzyklus (grün).



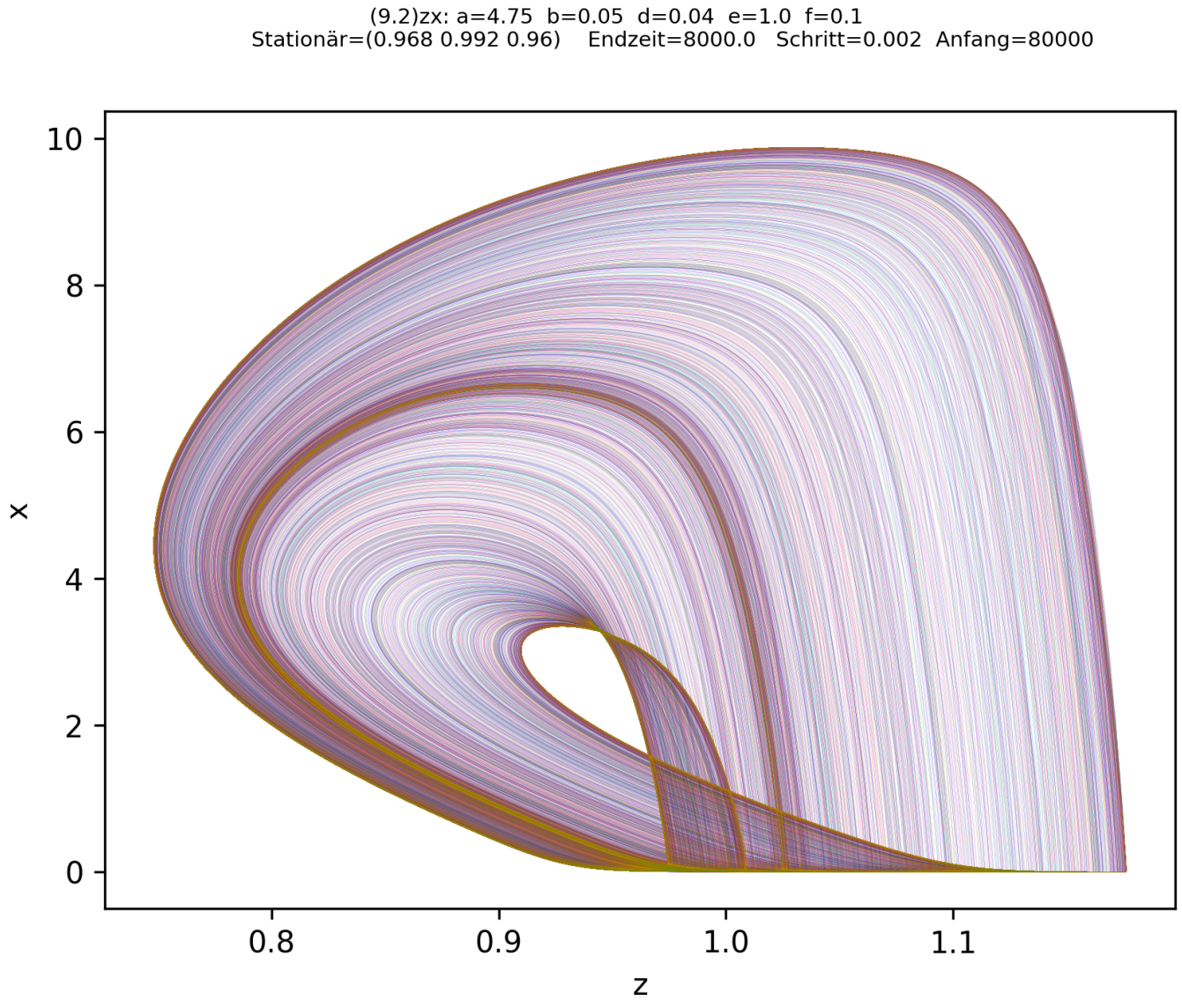
Legende: Chaos im **Beispiel 13**: $\lambda_1 \approx 0.025$
für $a = 3.3,\ b = 0.031,\ d = 0.15,\ e = 1.0,\ f = 0.2402$



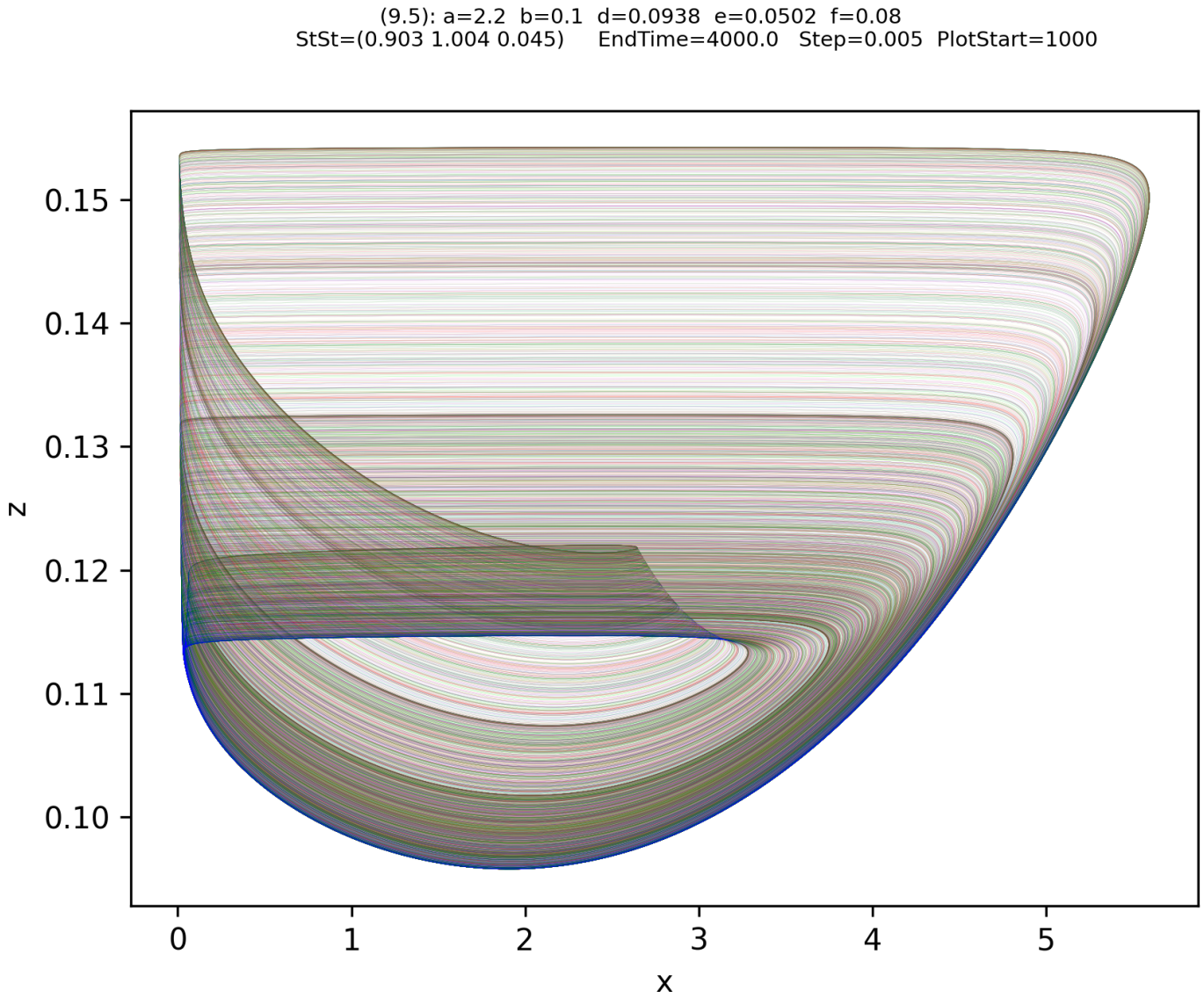
Legende: Chaos im **Beispiel 14**: $\lambda_1 \approx 0.010$
für $a = 4.2$, $b = 0.15$, $d = 0.1$, $e = 1.4$, $f = 0.40485$
Koexistenz mit zwei Grenzzyklen (rot und grün).



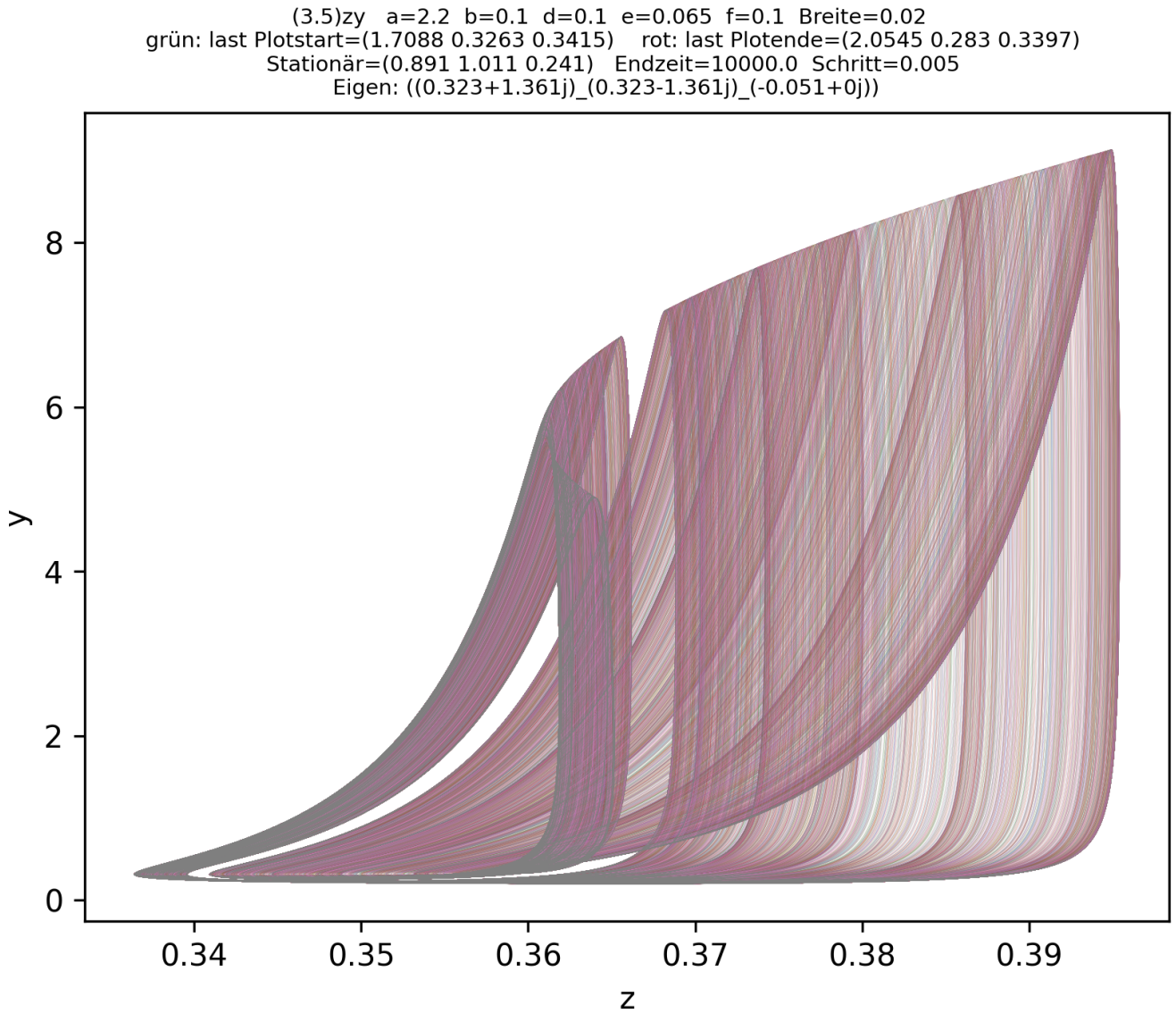
Legende: Chaos im **Beispiel 15**: $\lambda_1 \approx 0.031$
für $a = 4.75$, $b = 0.05$, $d = 0.04$, $e = 1.0$, $f = 0.1$



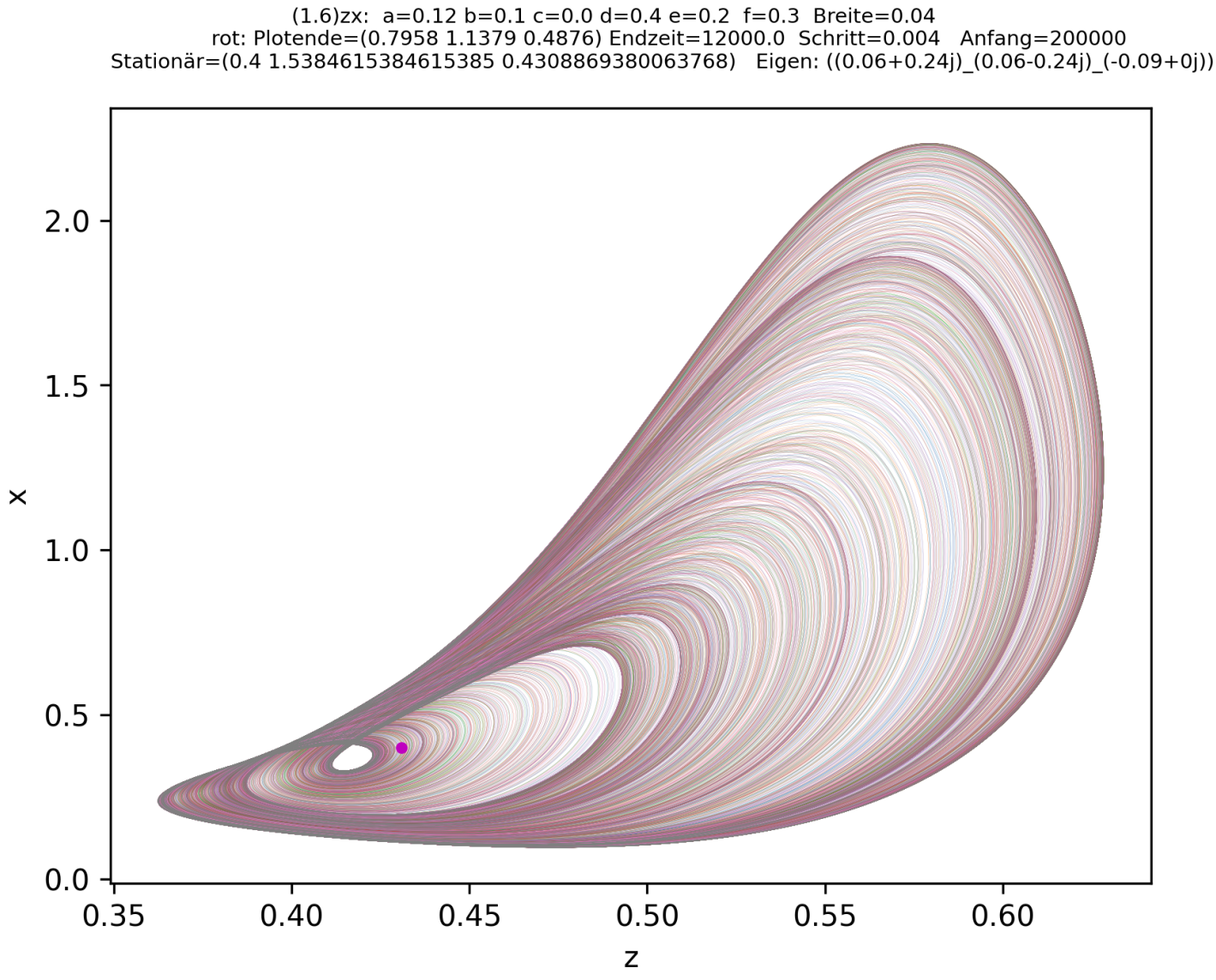
Legende: Chaos im **Beispiel 16**: $\lambda_1 \approx 0.047$
für $a = 2.2$, $b = 0.1$, $d = 0.0938$, $e = 0.0502$, $f = 0.08$



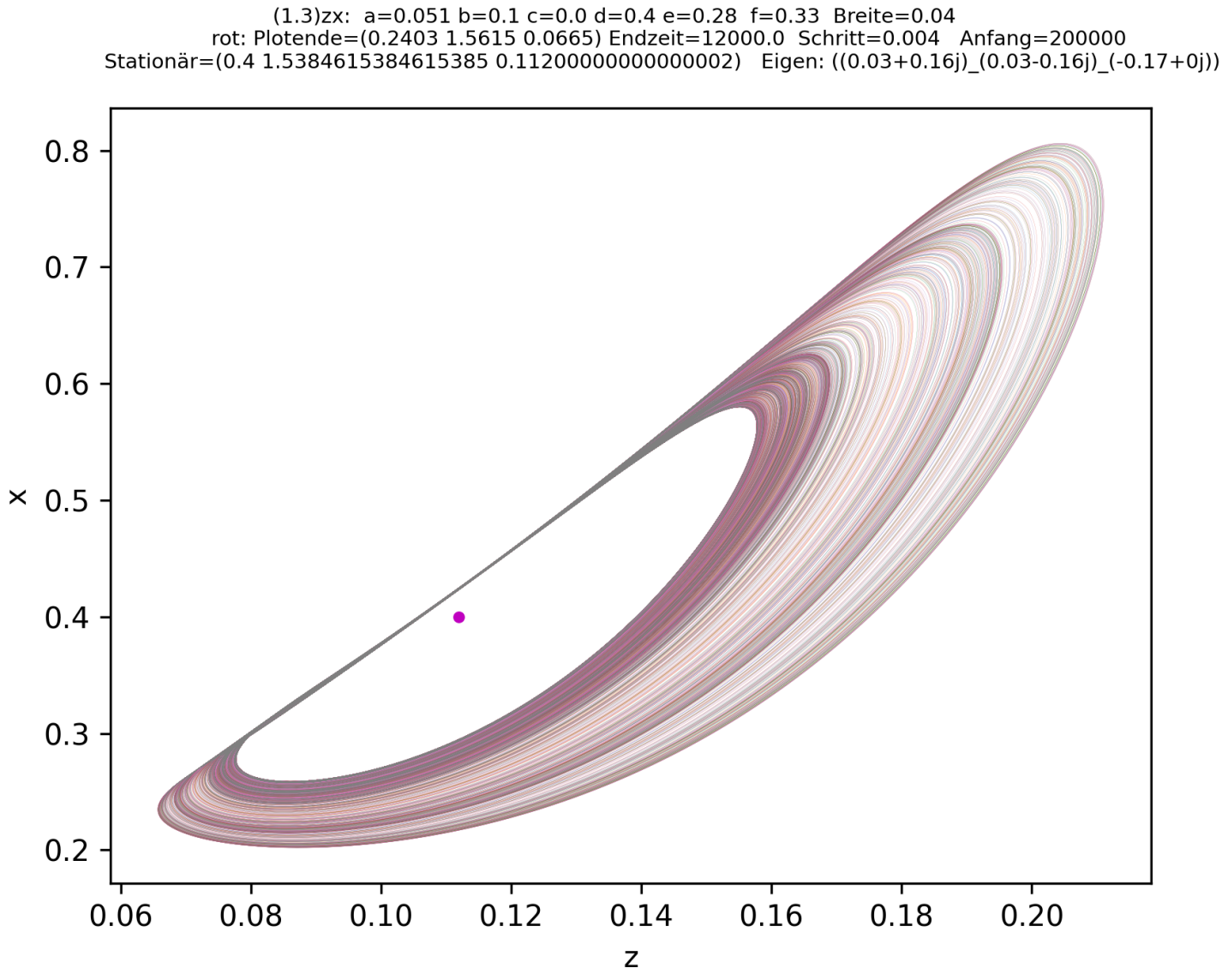
Legende: Chaos im **Beispiel 17**: $\lambda_1 \approx 0.037$:
für $a = 2.2$, $b = 0.1$, $d = 0.1$, $e = 0.065$, $f = 0.1$



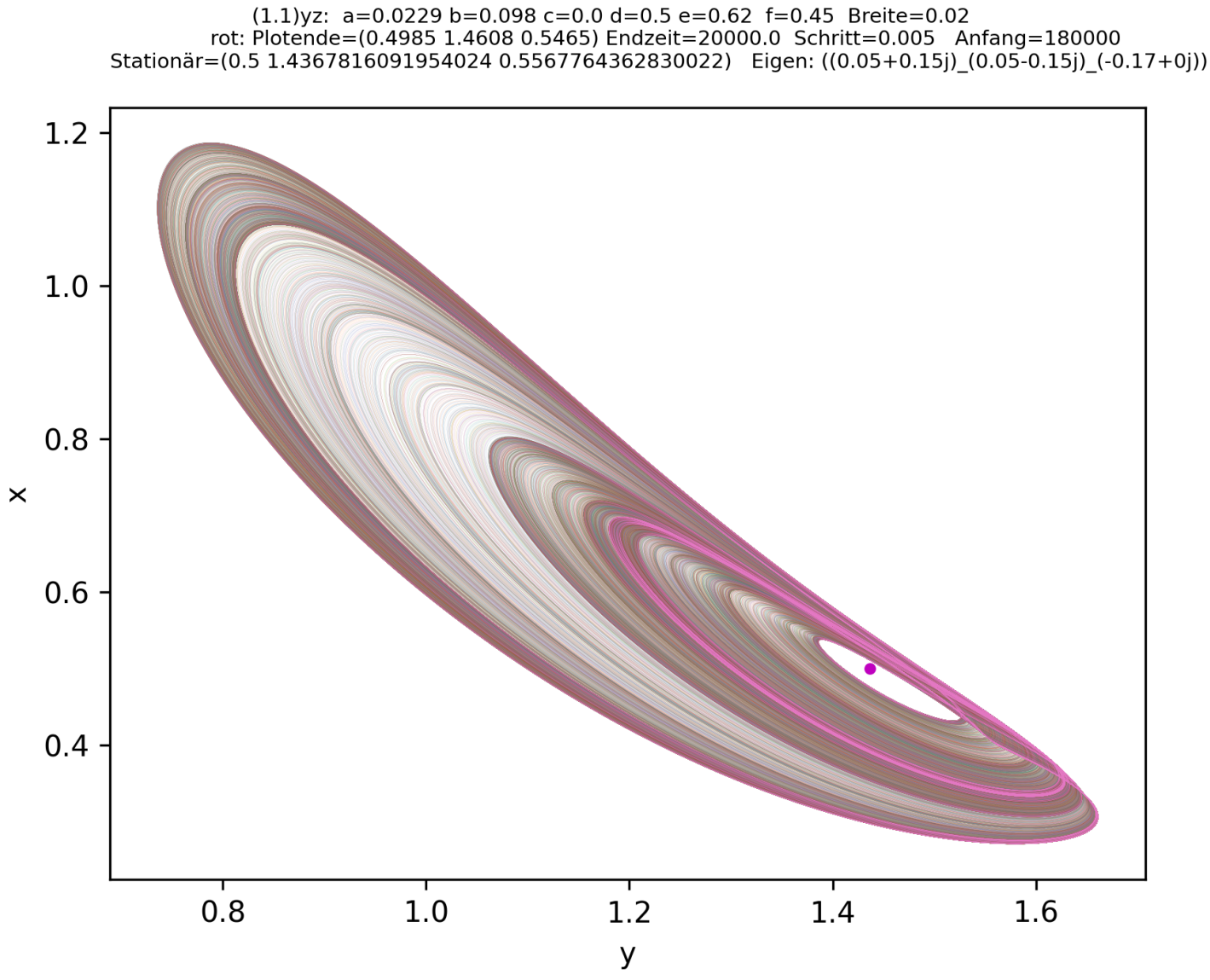
Legende: Chaos im **Beispiel 18**: $\lambda_1 \approx 0.012$:
für $a = 0.051$, $b = 0.1$, $d = 0.4$, $e = 0.28$, $f = 0.33$



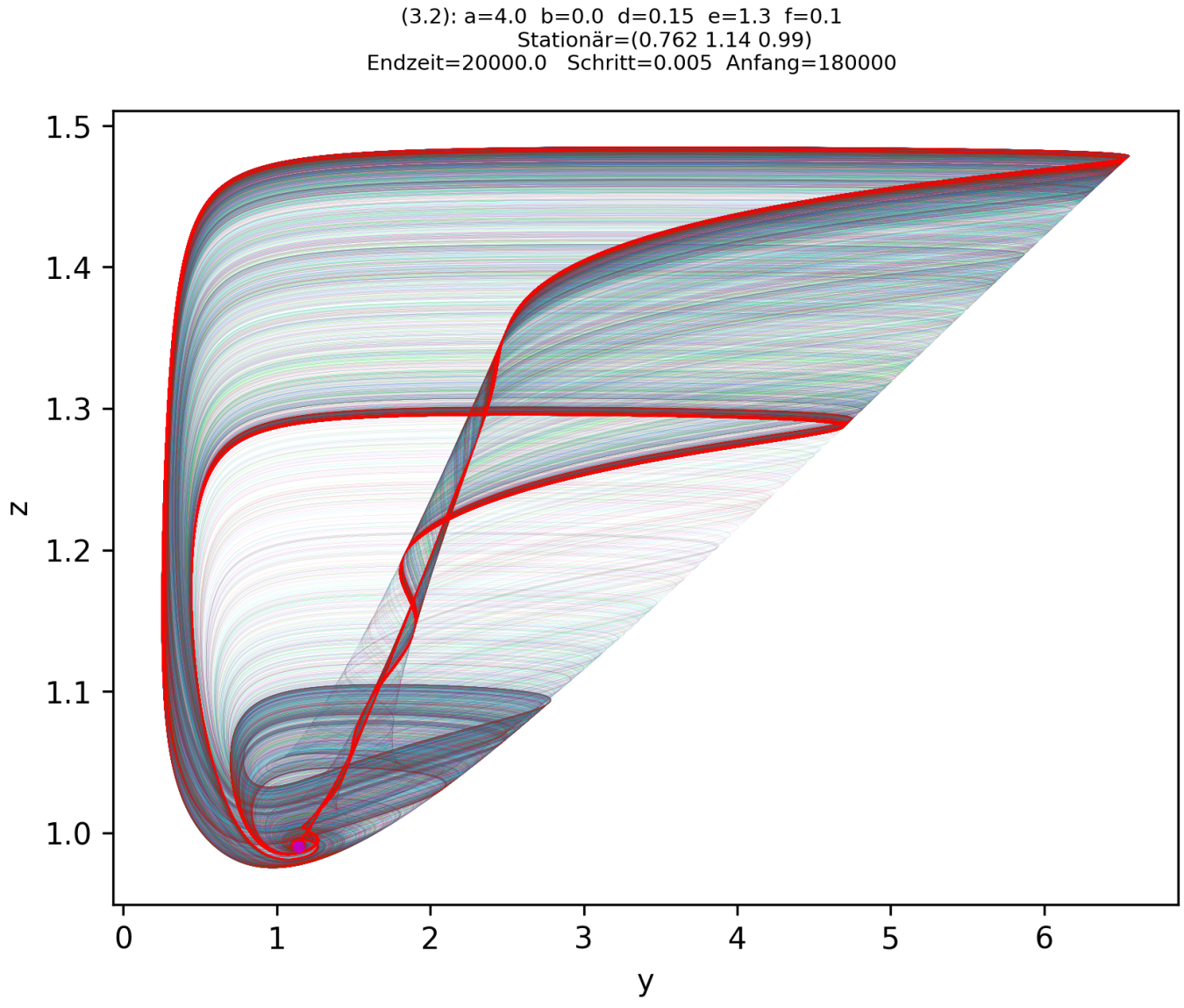
Legende: Chaos im **Beispiel 19**: $\lambda_1 \approx 0.007$:
für $a = 0.12$, $b = 0.1$, $d = 0.4$, $e = 0.2$, $f = 0.3$



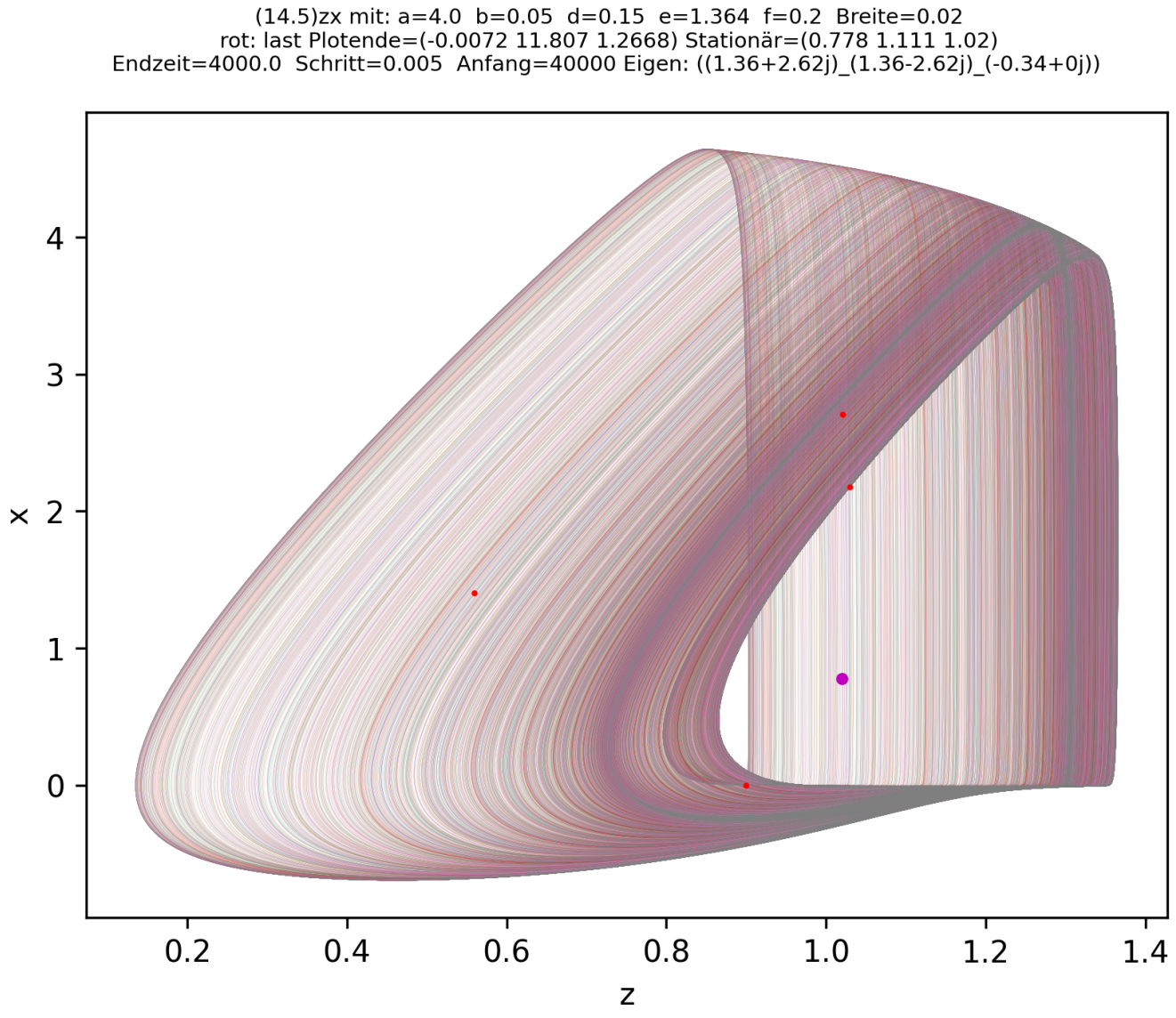
Legende: Chaos im **Beispiel 20**: $\lambda_1 \approx 0.007$:
für $a = 0.12$, $b = 0.1$, $d = 0.4$, $e = 0.2$, $f = 0.3$



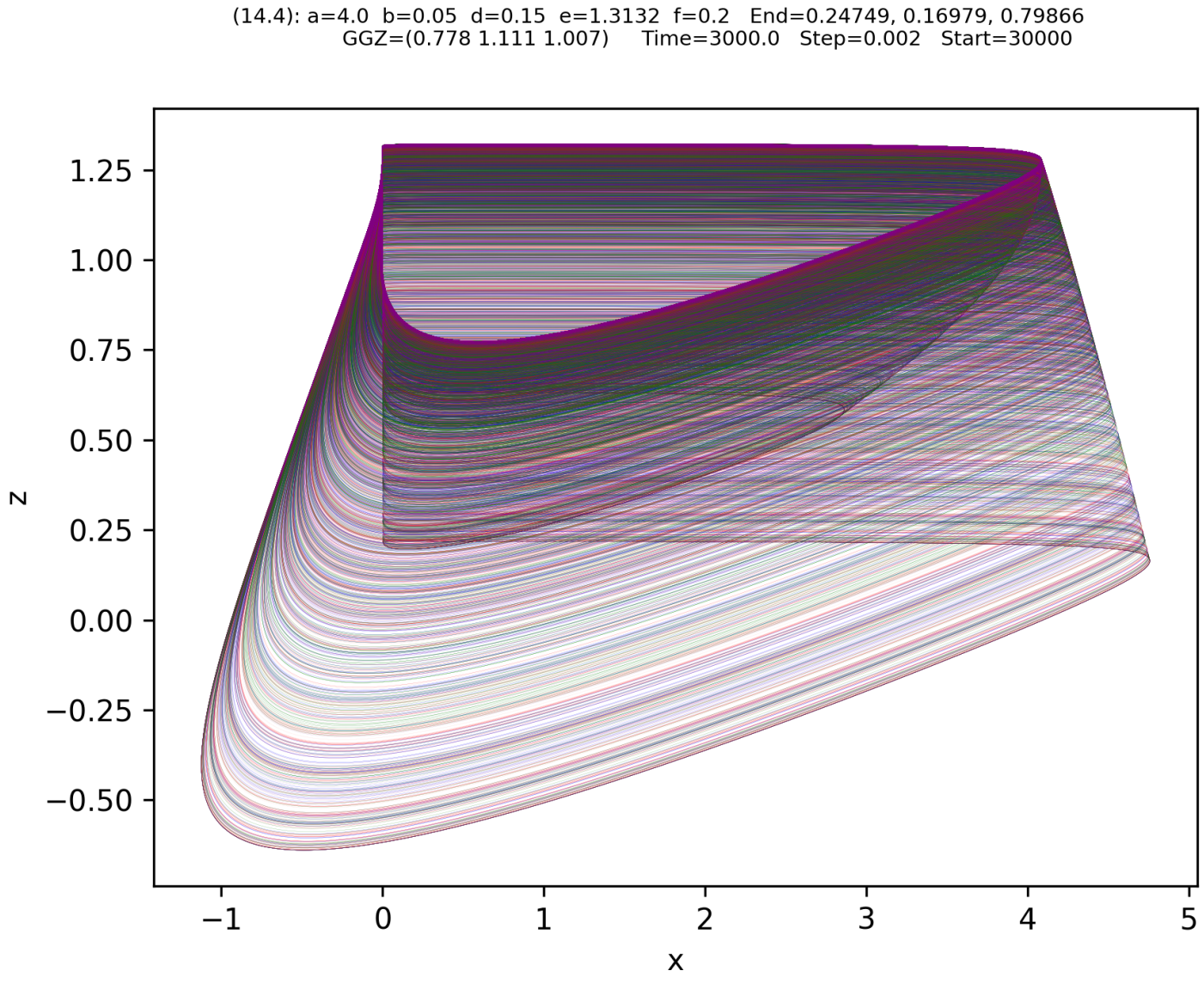
Legende: Chaos im **Beispiel 21**: $\lambda_1 \approx 0.040$:
für $a = 4.0$, $b = 0.0$, $d = 0.15$, $e = 1.3$, $f = 0.1$



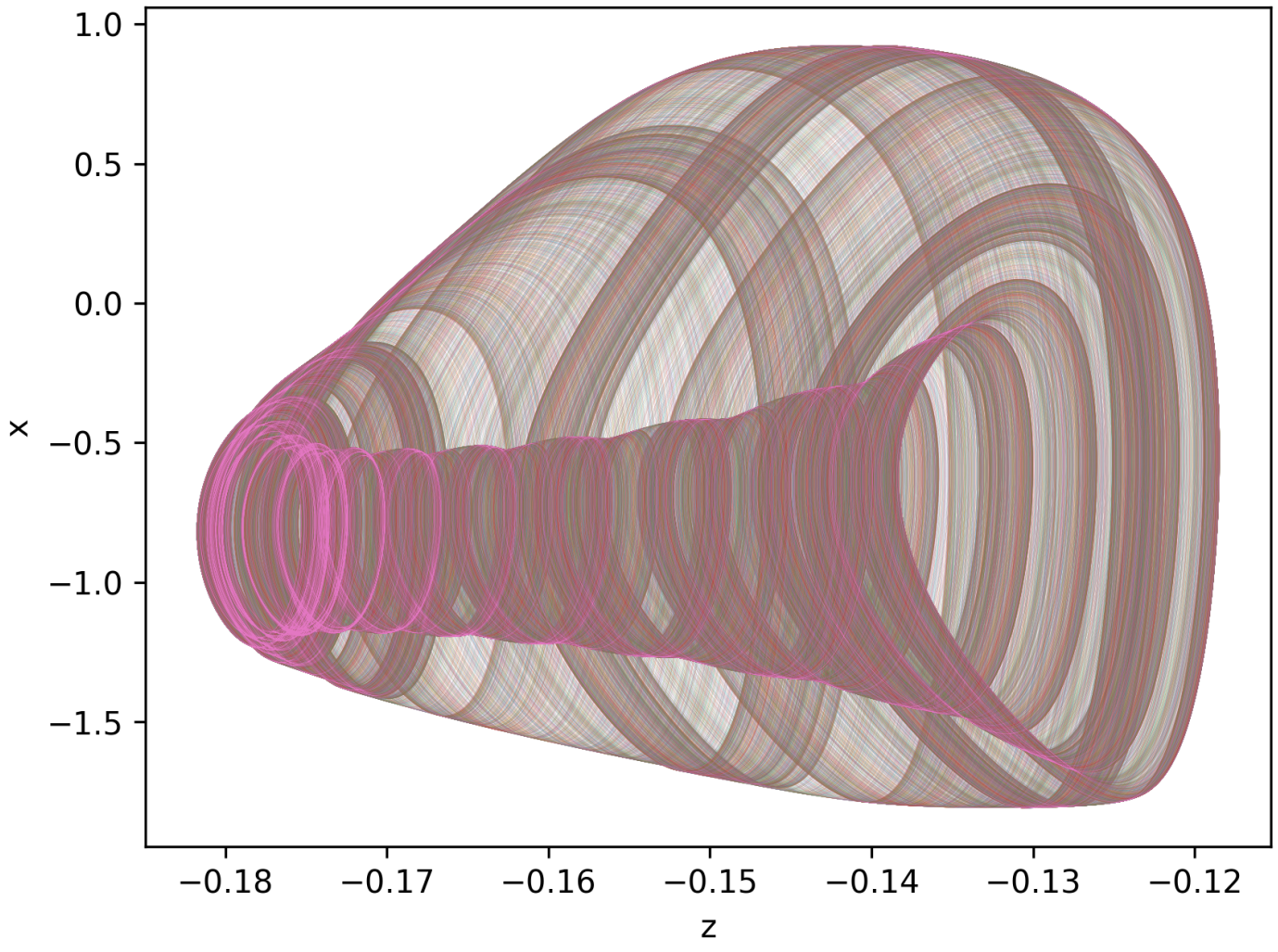
Legende: Chaos im **Beispiel 22**: $\lambda_1 \approx 0.063$:
für $a = 4.0$, $b = 0.05$, $d = 0.15$, $e = 1.364$, $f = 0.2$



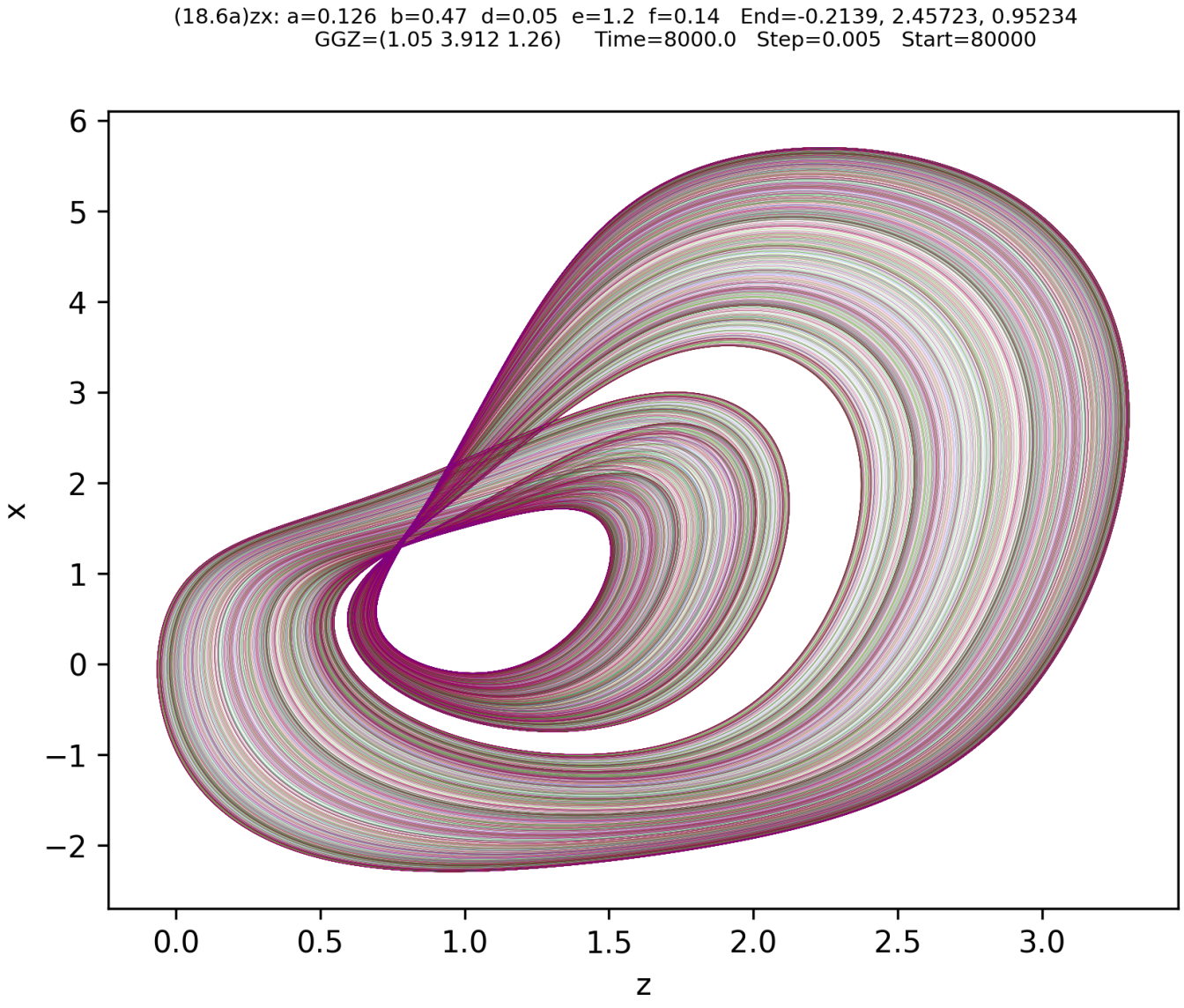
Legende: Chaos im **Beispiel 23**: $\lambda_1 \approx 0.125$:
für $a = 4.0$, $b = 0.05$, $d = 0.15$, $e = 1.3132$, $f = 0.2$



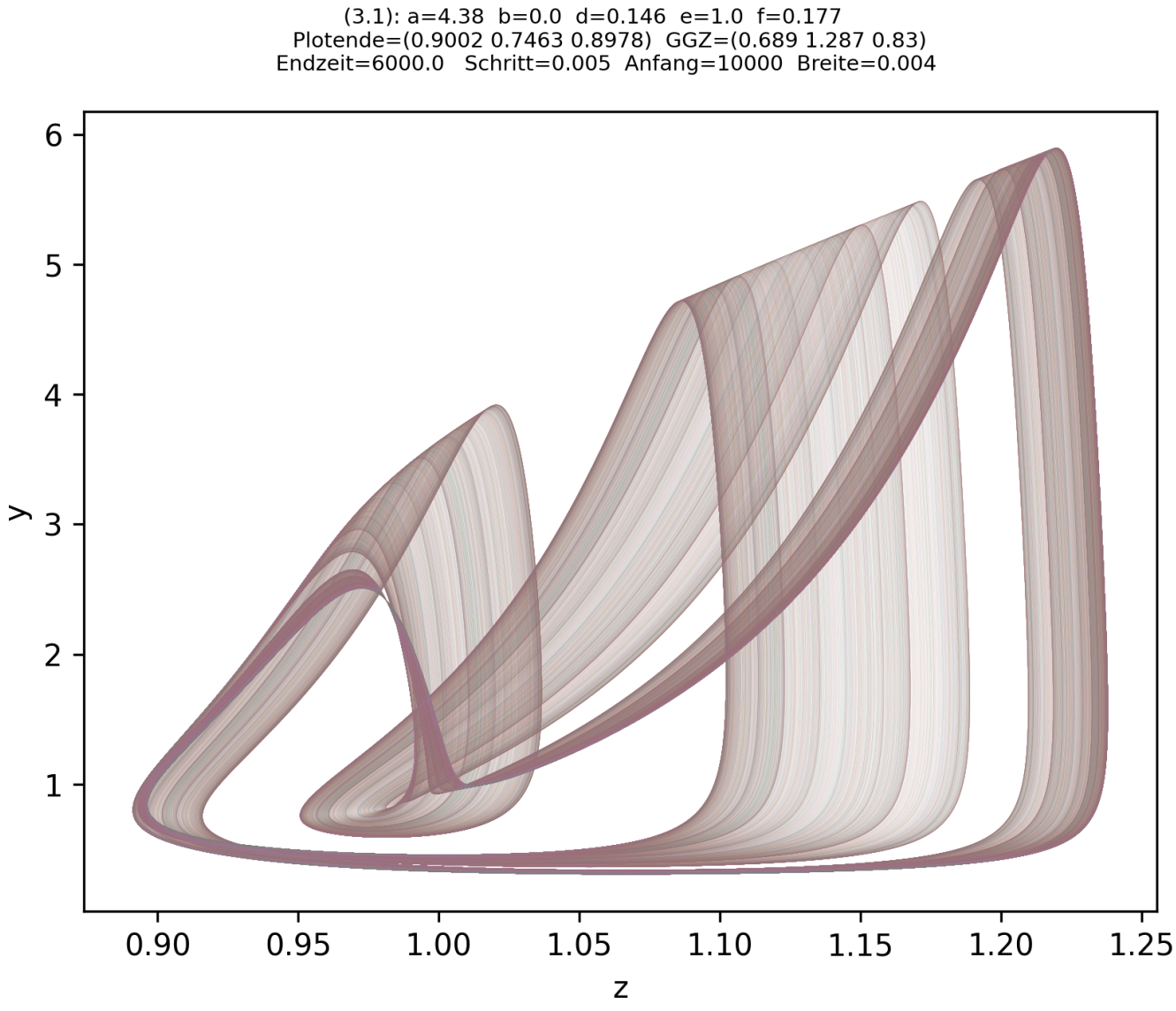
Legende: Chaos im **Beispiel 24**: $\lambda_1 \approx 0.0030,\ \lambda_2 = 0.0$
für $a = 0.69,\ b = 0.73,\ c = 0.41,\ d = 0.63,\ e = 0.222,\ f = 0.23$



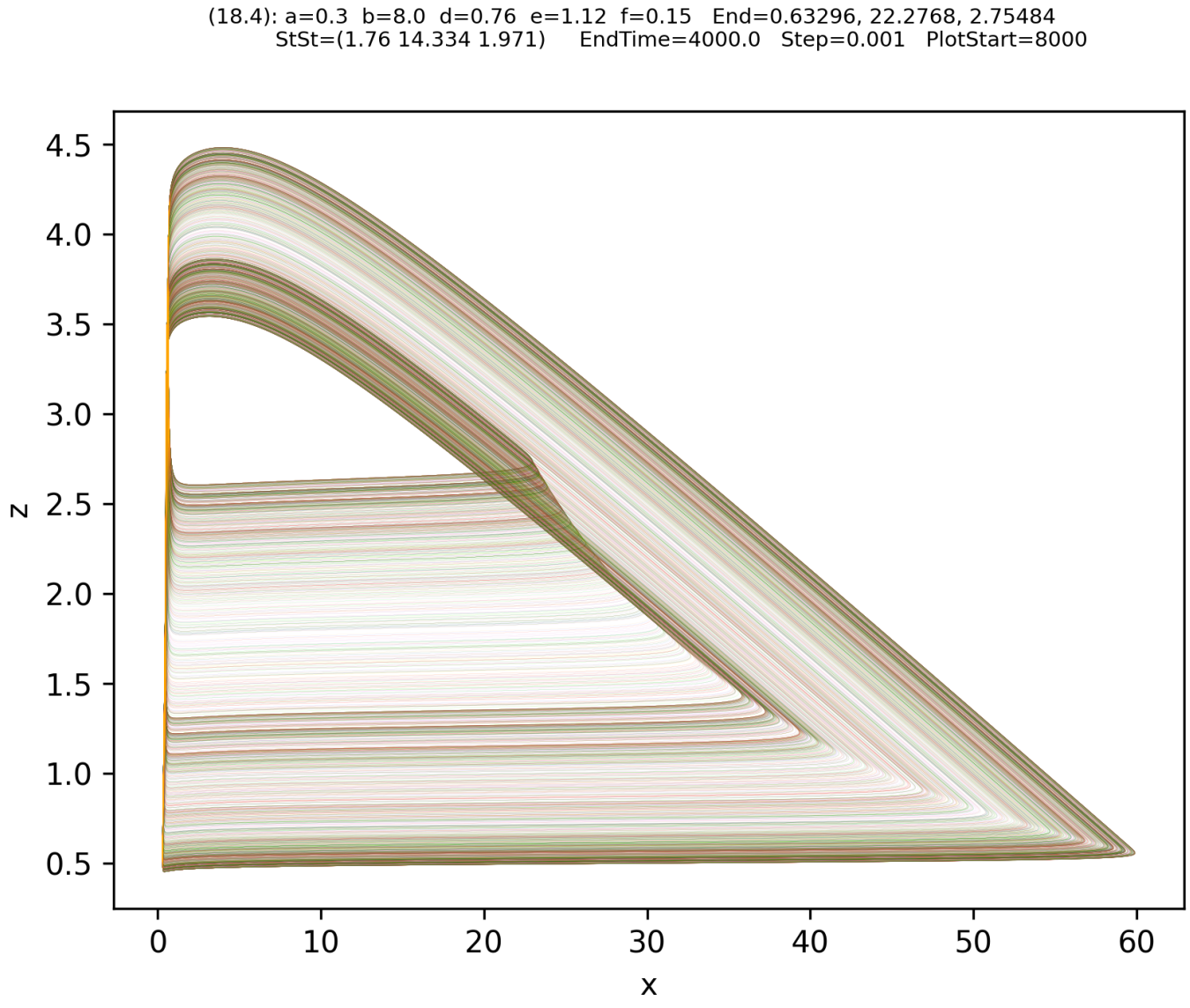
Legende: Chaos im **Beispiel 25**: $\lambda_1 \approx 0.014$
für $a = 0.126$, $b = 0.47$, $d = 0.05$, $e = 1.2$, $f = 0.14$



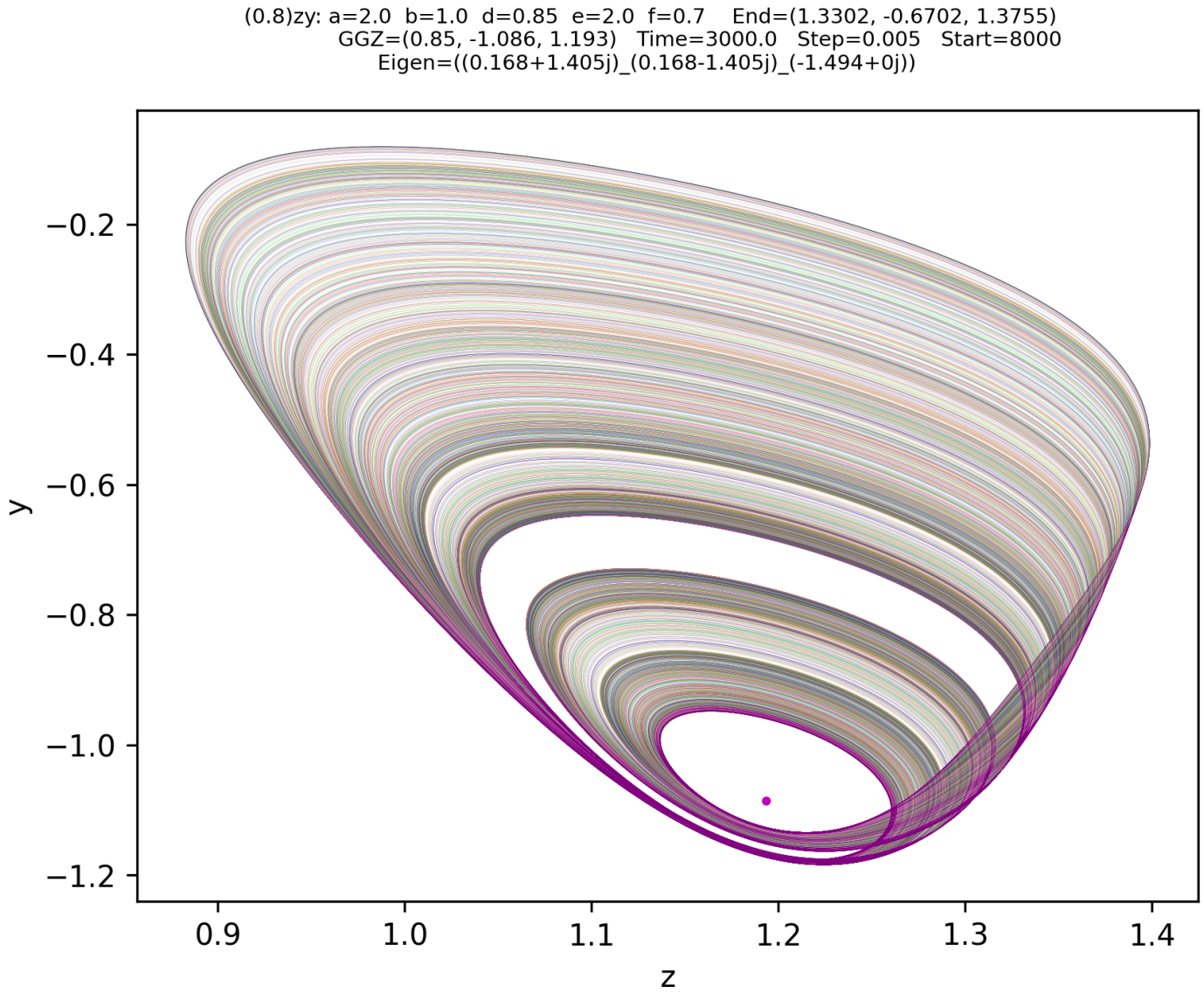
Legende: Chaos im **Beispiel 26**: $\lambda_1 \approx 0.033$
für $a = 4.38$, $b = 0.0$, $d = 0.146$, $e = 1.0$, $f = 0.177$



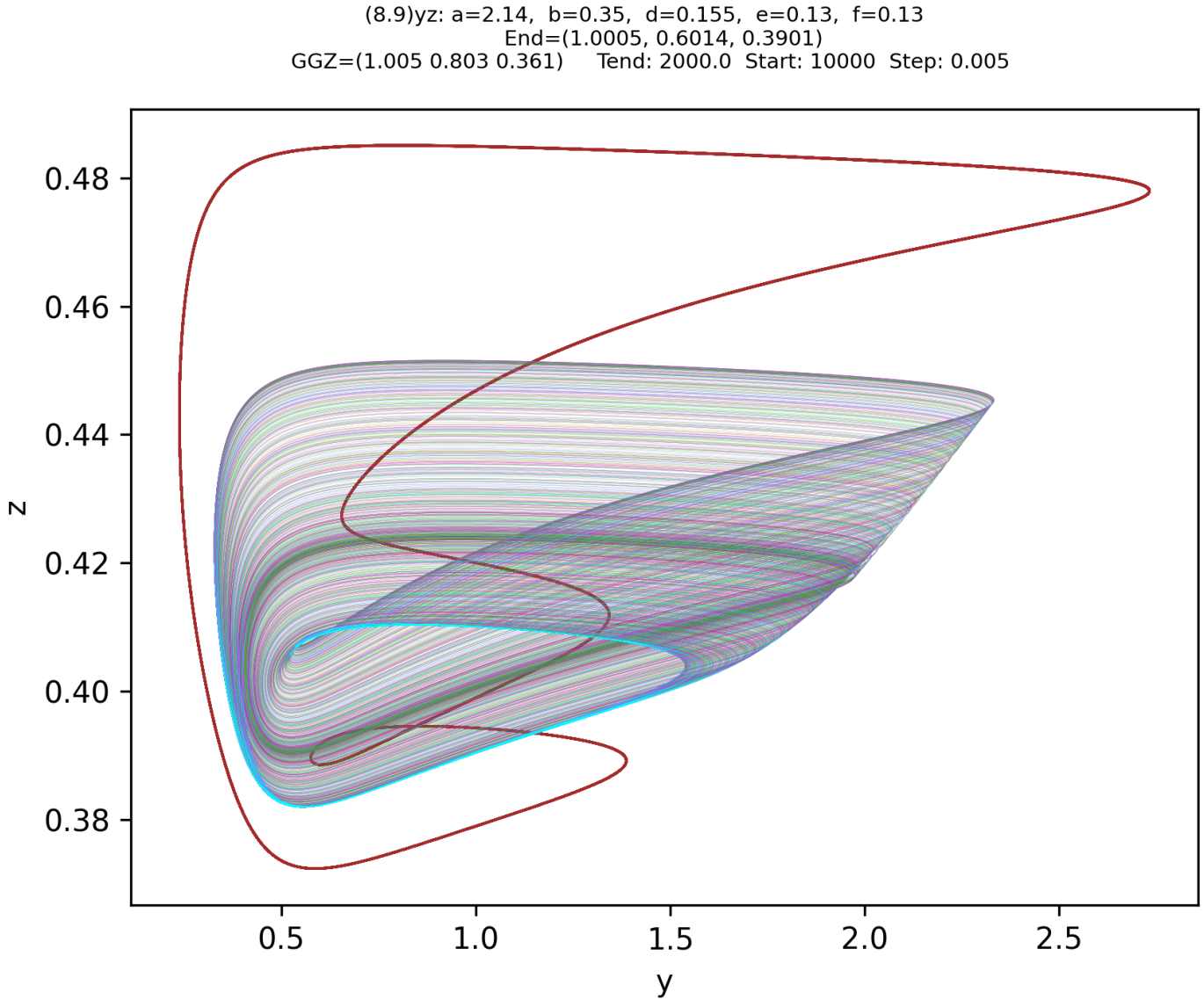
Legende: Chaos im **Beispiel 27**: $\lambda_1 \approx 0.021$
für $a = 0.3$, $b = 8.0$, $d = 0.76$, $e = 1.12$, $f = 0.15$



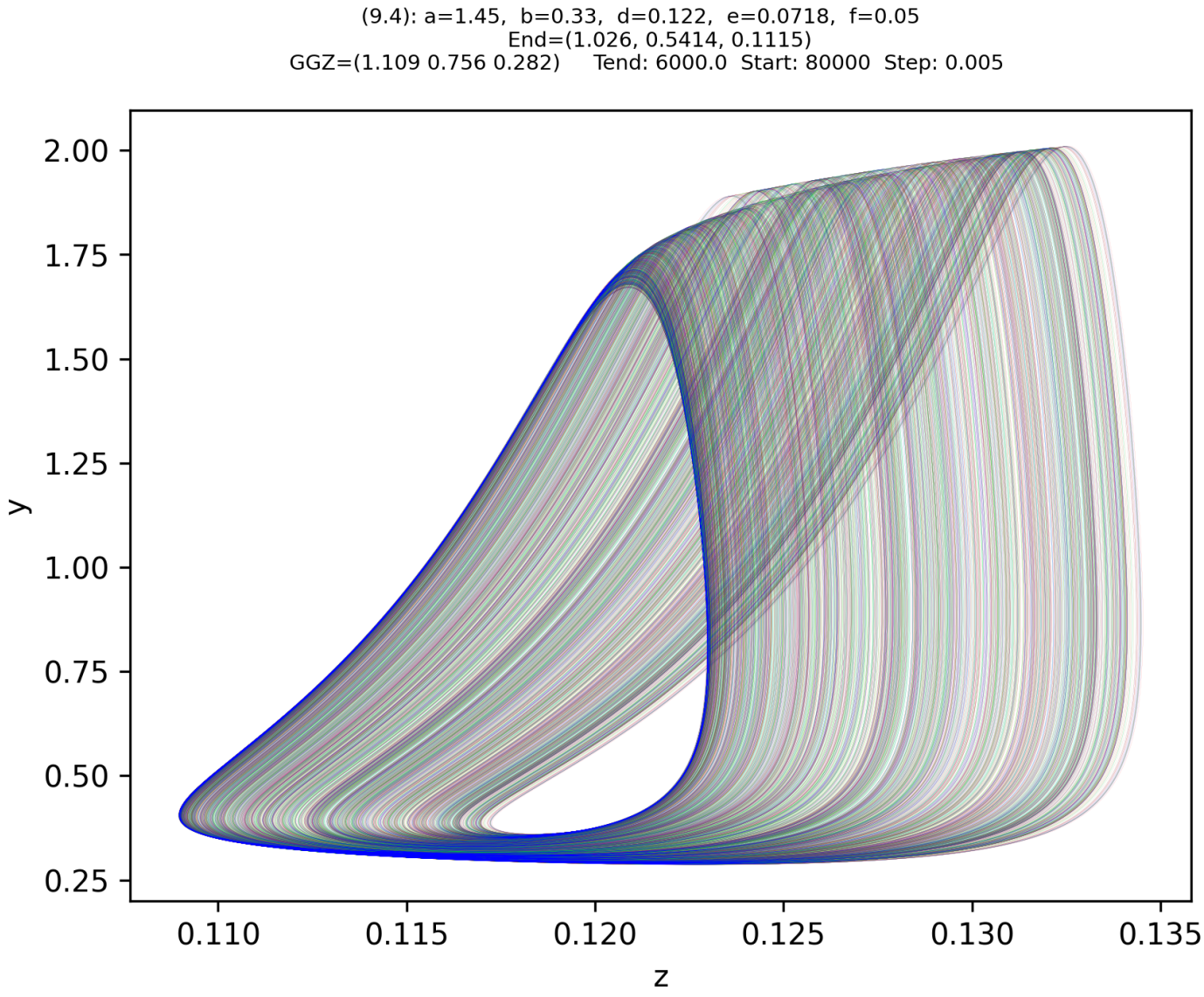
Legende: Chaos im **Beispiel 28**: $\lambda_1 \approx 0.053$
für $a = 2.0$, $b = 1.0$, $d = 0.85$, $e = 2.0$, $f = 0.7$



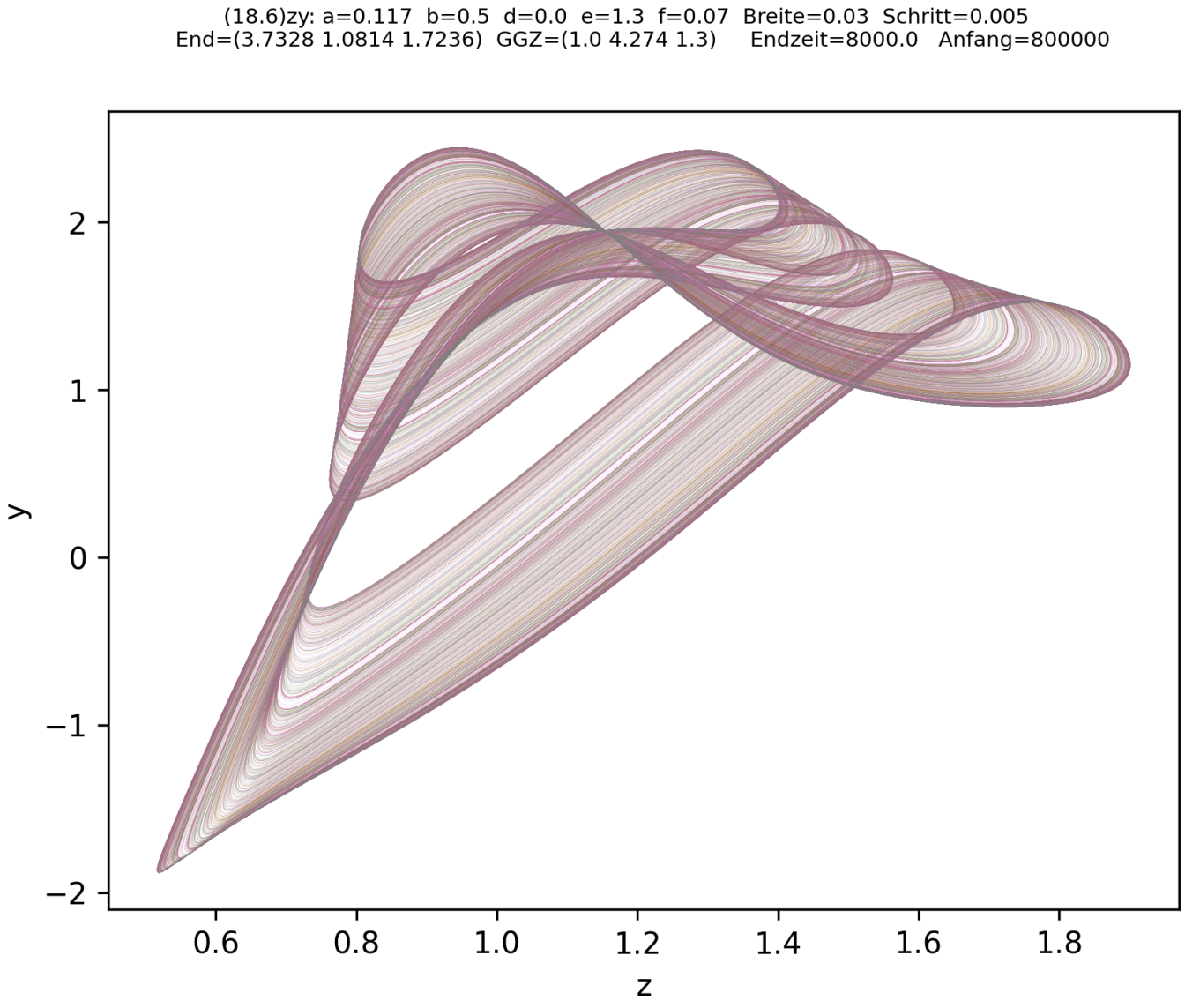
Legende: Chaos im **Beispiel 29**: $\lambda_1 \approx 0.0342$
für $a = 2.14$, $b = 0.35$, $d = 0.155$, $e = 0.13$, $f = 0.13$
Koexistenz mit einem verdrehten Grenzzyklus (rot).



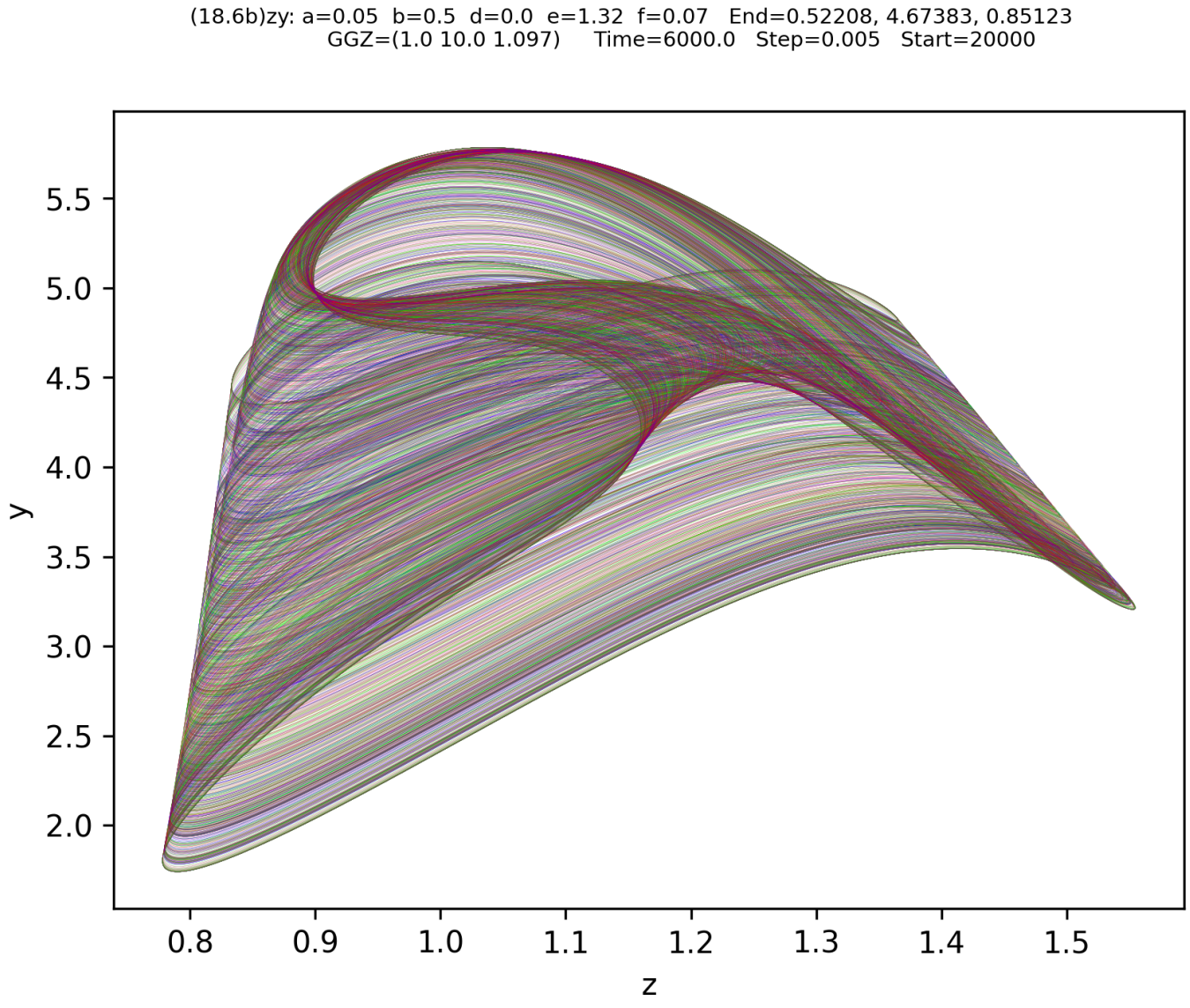
Legende: Chaos im **Beispiel 30**: $\lambda_1 \approx 0.024$
für $a = 1.45$, $b = 0.33$, $d = 0.122$, $e = 0.018$, $f = 0.05$



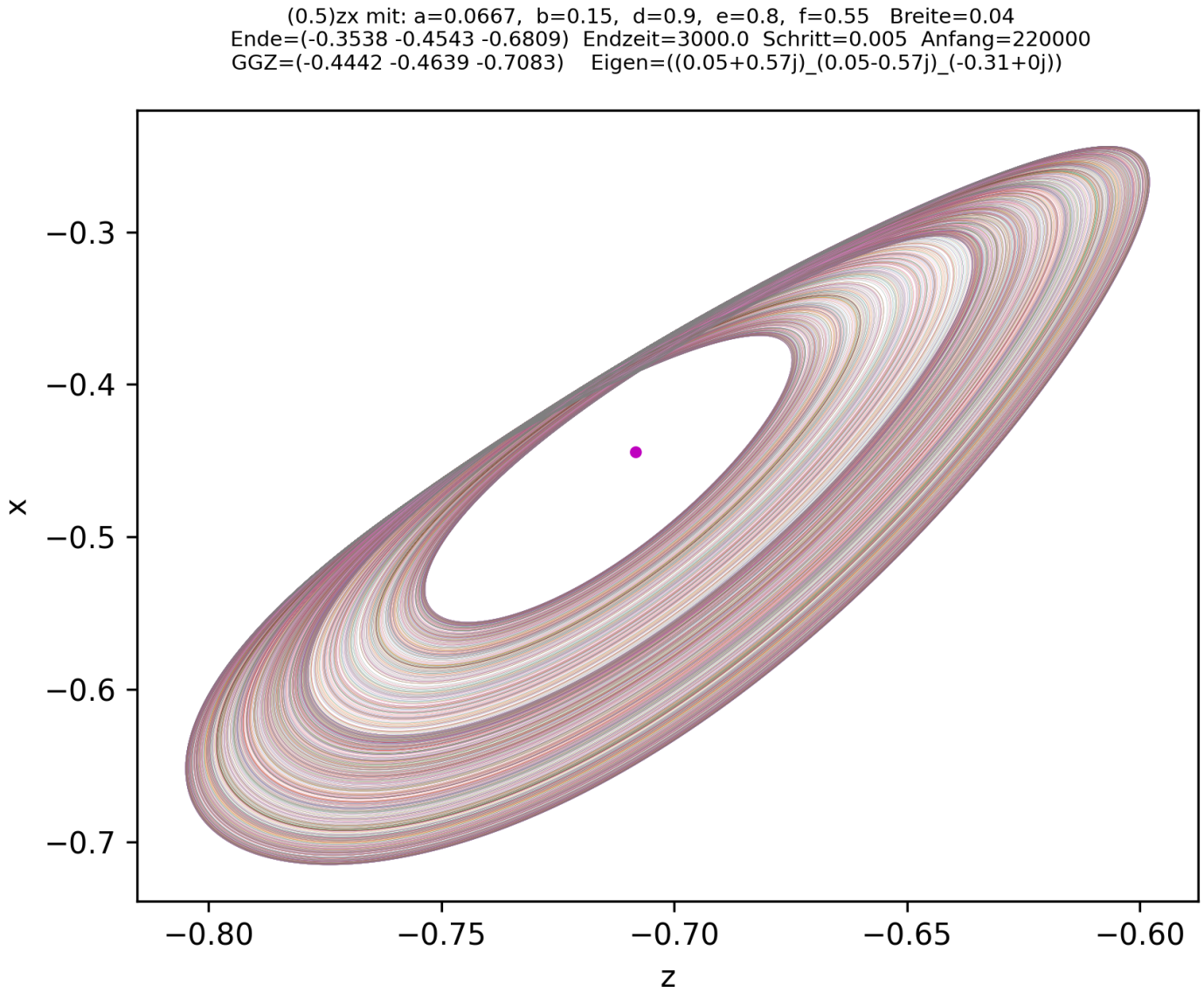
Legende: Chaos im **Beispiel 31**: $\lambda_1 \approx 0.014$
für $a = 0.117$, $b = 0.5$, $e = 1.3$, $f = 0.07$



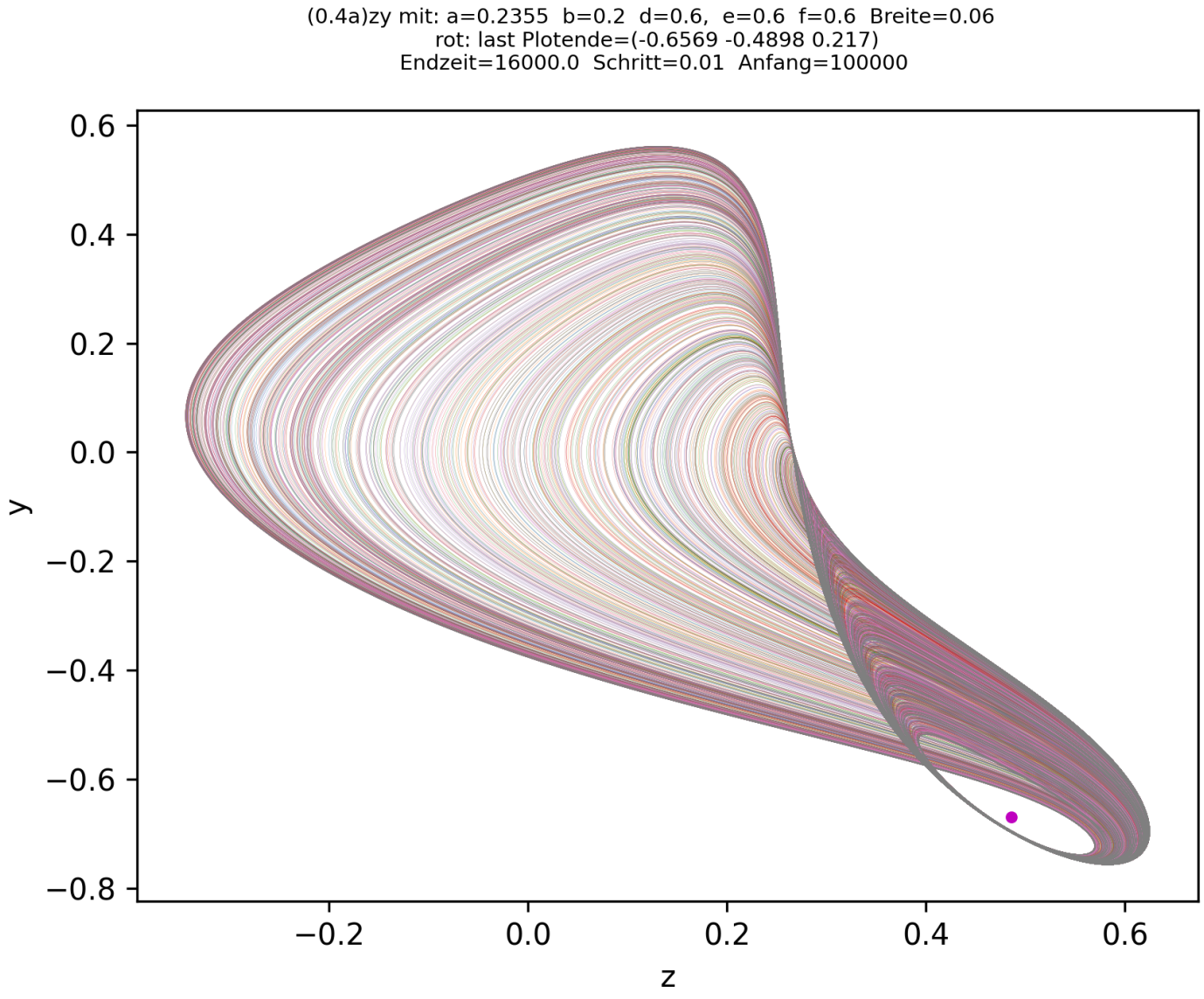
Legende: Chaos im **Beispiel 32**: $\lambda_1 \approx 0.026$
für $a = 0.05$, $b = 0.5$, $e = 1.32$, $f = 0.07$



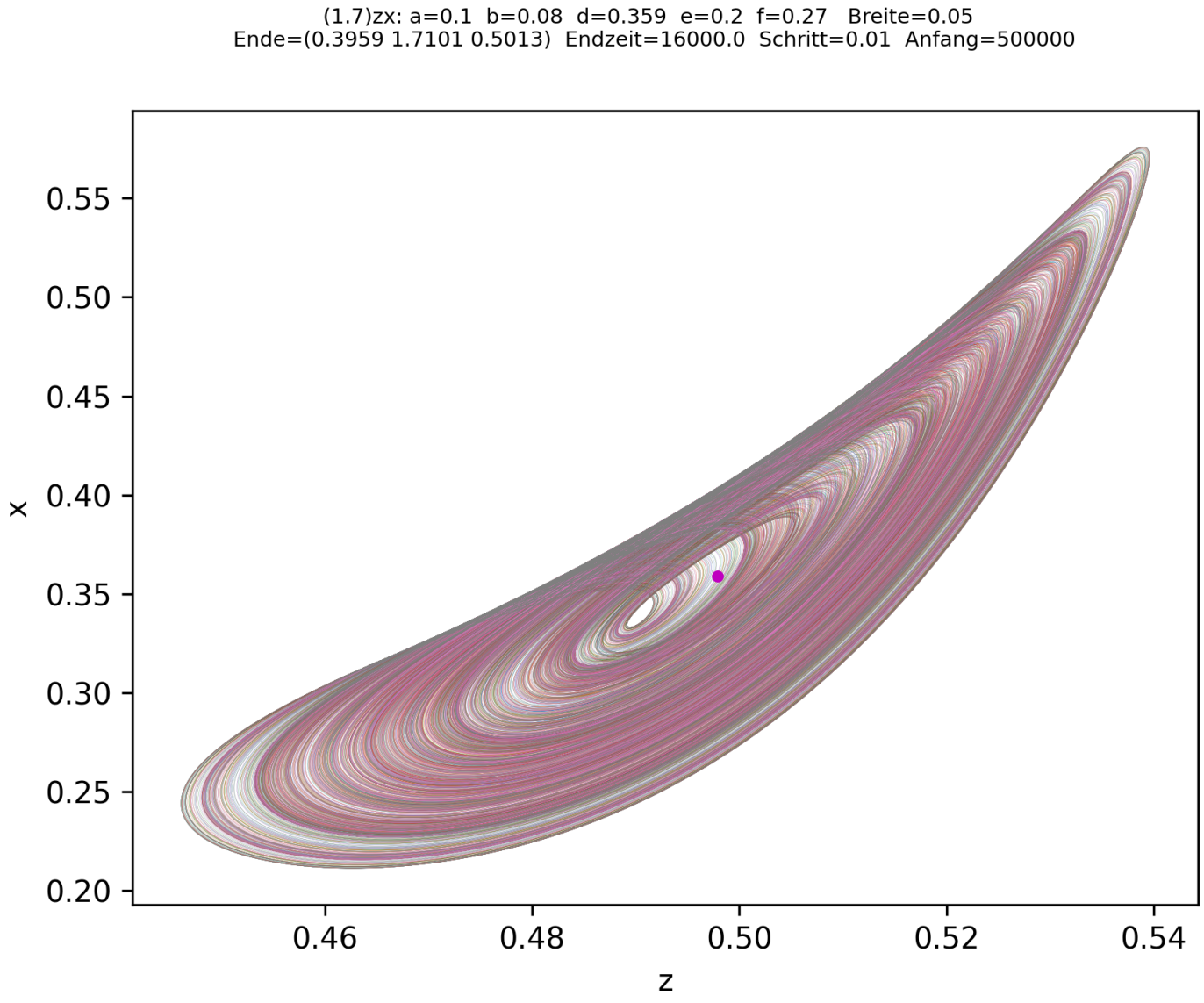
Legende: Chaos im **Beispiel 33**: $\lambda_1 \approx 0.039$
für $a = 0.0667$, $b = 0.15$, $d = 0.9$, $e = 0.8$, $f = 0.55$



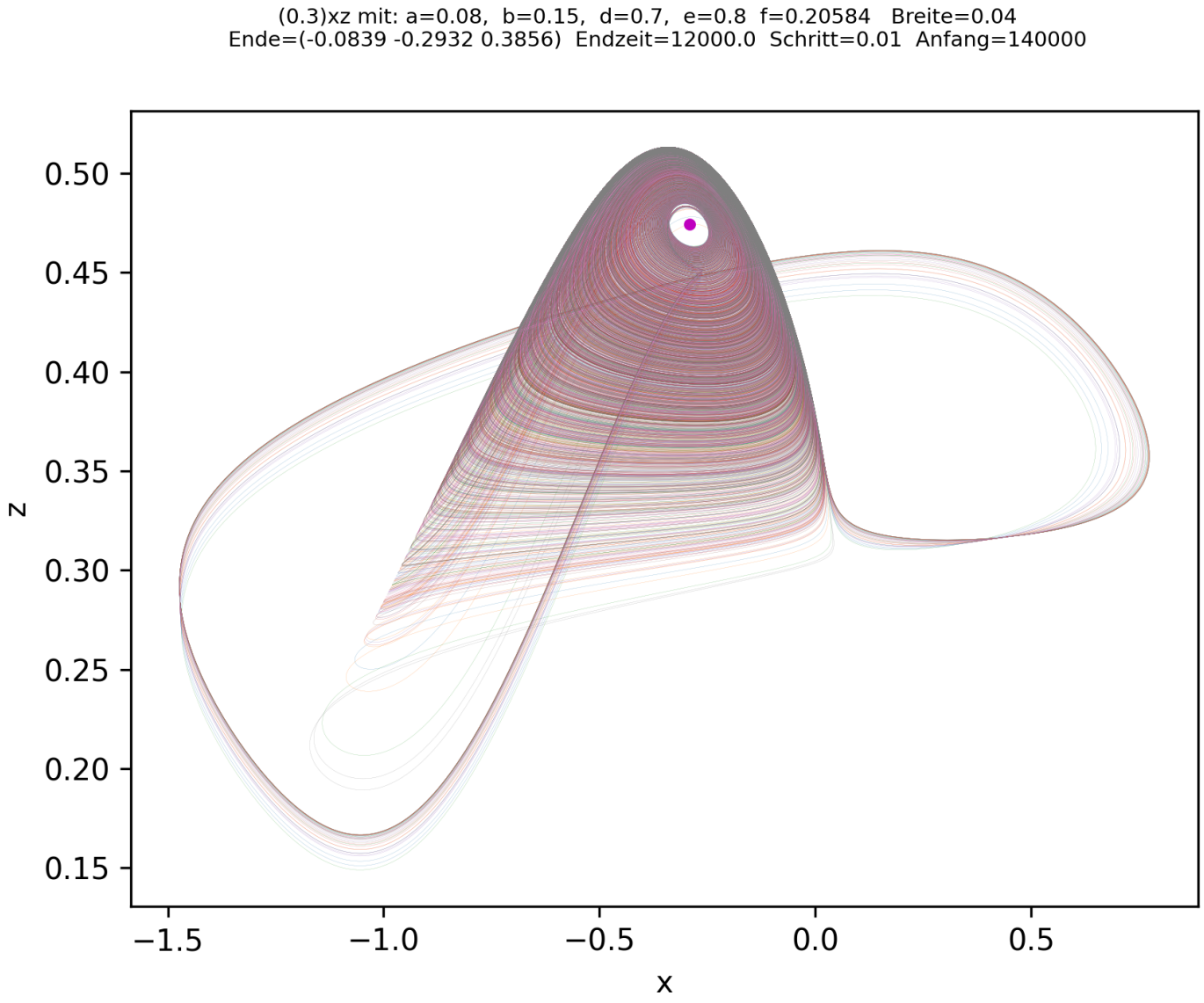
Legende: Chaos im **Beispiel 34**: $\lambda_1 \approx 0.0128$
für $a = 0.2355,\ b = 0.2,\ d = 0.6,\ e = 0.6,\ f = 0.6$



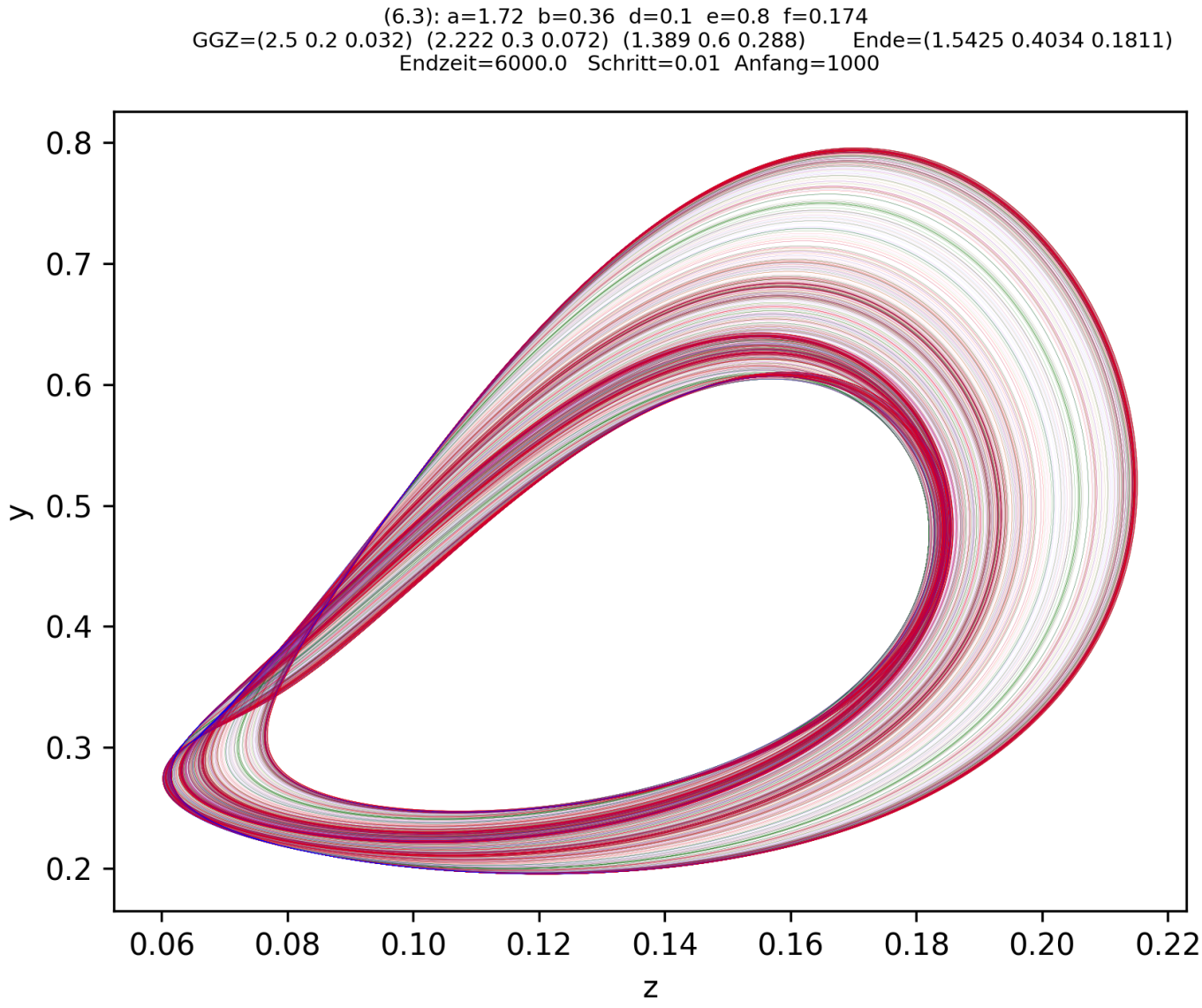
Legende: Chaos im **Beispiel 35**: $\lambda_1 \approx 0.0142$
für $a = 0.1$, $b = 0.08$, $d = 0.359$, $e = 0.2$, $f = 0.27$



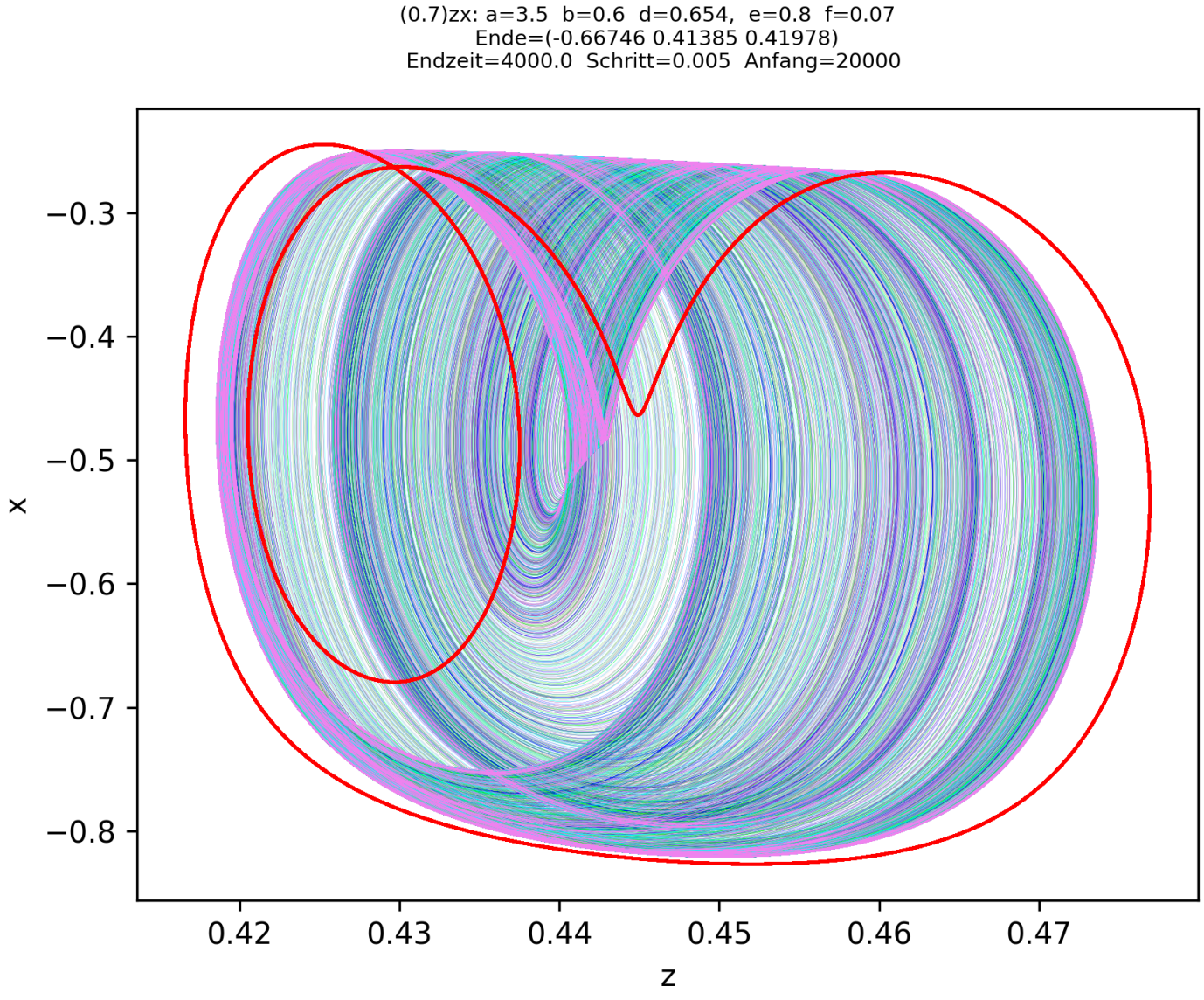
Legende: Chaos im **Beispiel 36**: $\lambda_1 \approx 0.017$
für $a = 0.08$, $b = 0.15$, $d = 0.7$, $e = 0.8$, $f = 0.20584$



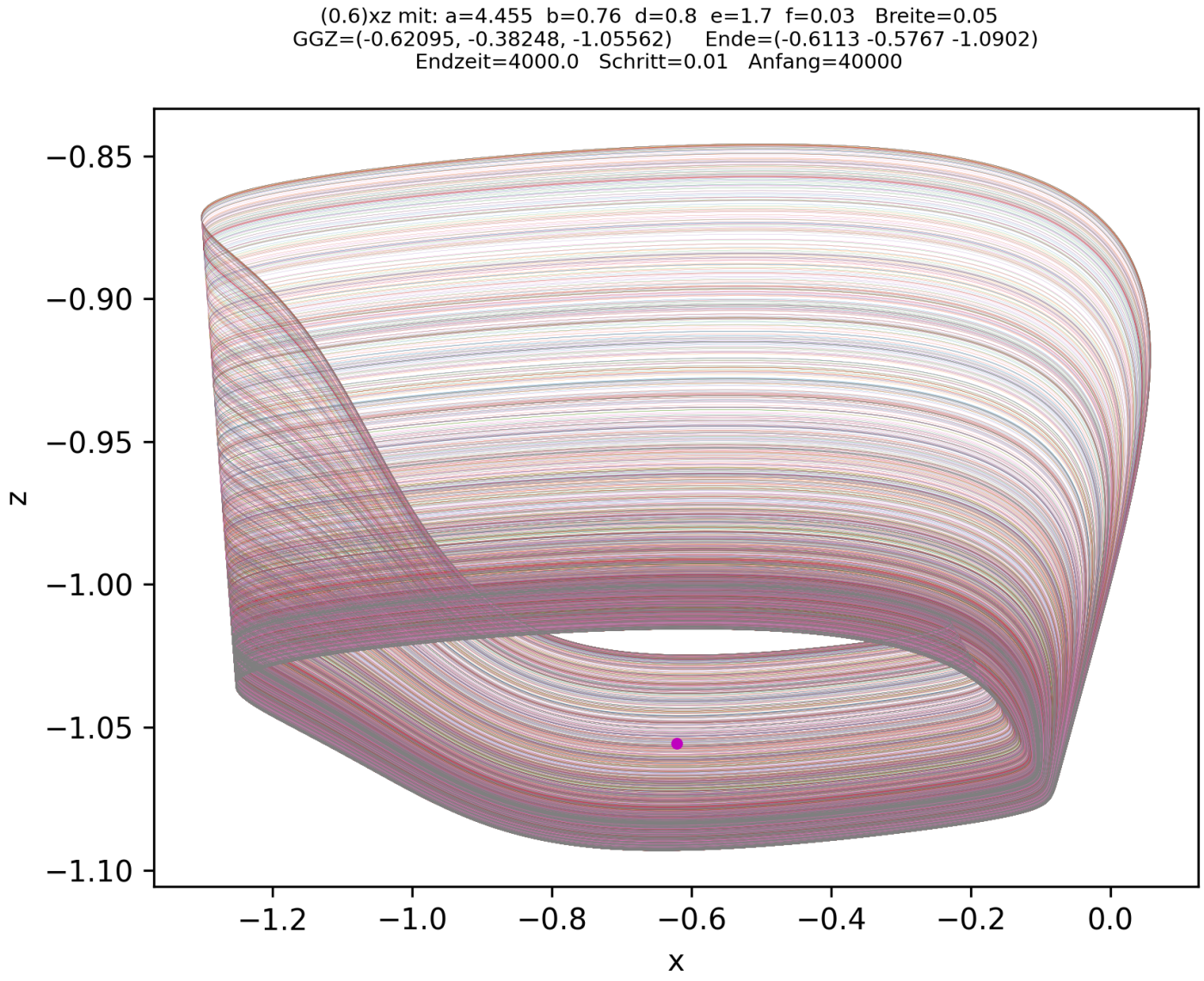
Legende: Chaos im **Beispiel 37**: $\lambda_1 \approx 0.009$
für $a = 1.72$, $b = 0.36$, $d = 0.1$, $e = 0.8$, $f = 0.174$



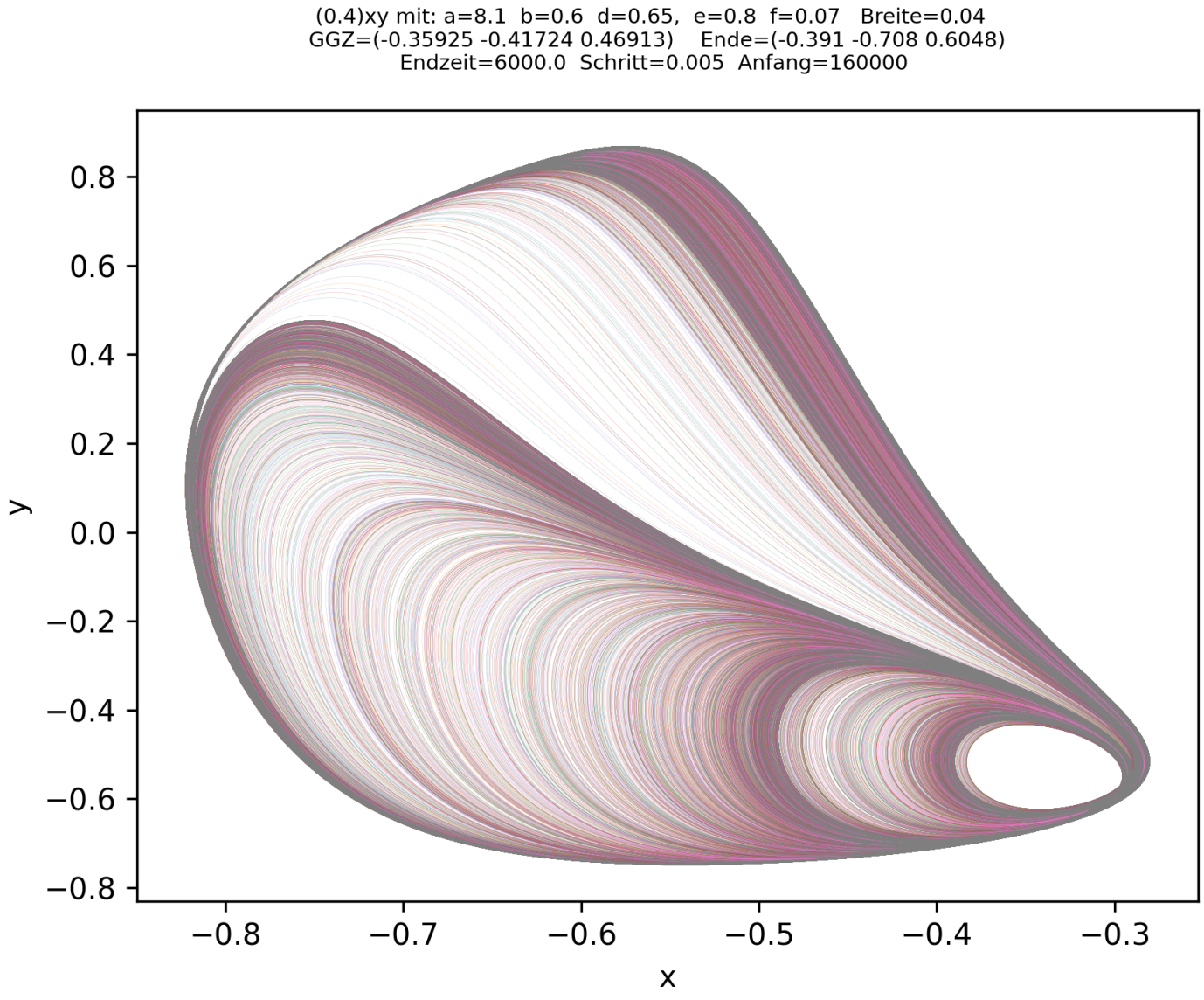
Legende: Chaos im **Beispiel 38**: $\lambda_1 \approx 0.0585$
für $a = 3.5$, $b = 0.6$, $d = 0.654$, $e = 0.8$, $f = 0.07$
Koexistenz mit einem verdrehten Grenzzyklus (rot).



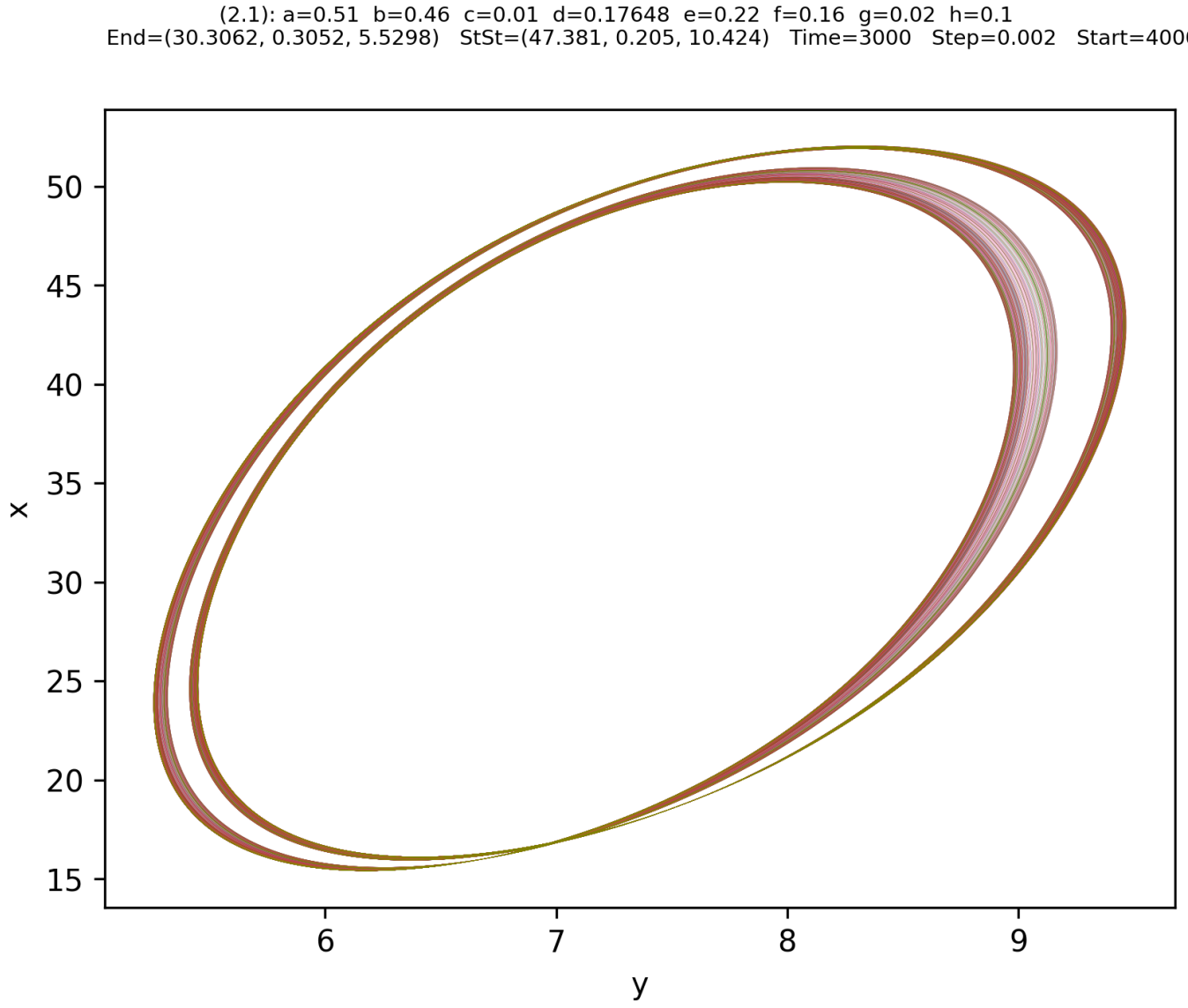
Legende: Chaos im **Beispiel 39**: $\lambda_1 \approx 0.034$
für $a = 4.455$, $b = 0.76$, $d = 0.8$, $e = 1.7$, $f = 0.03$



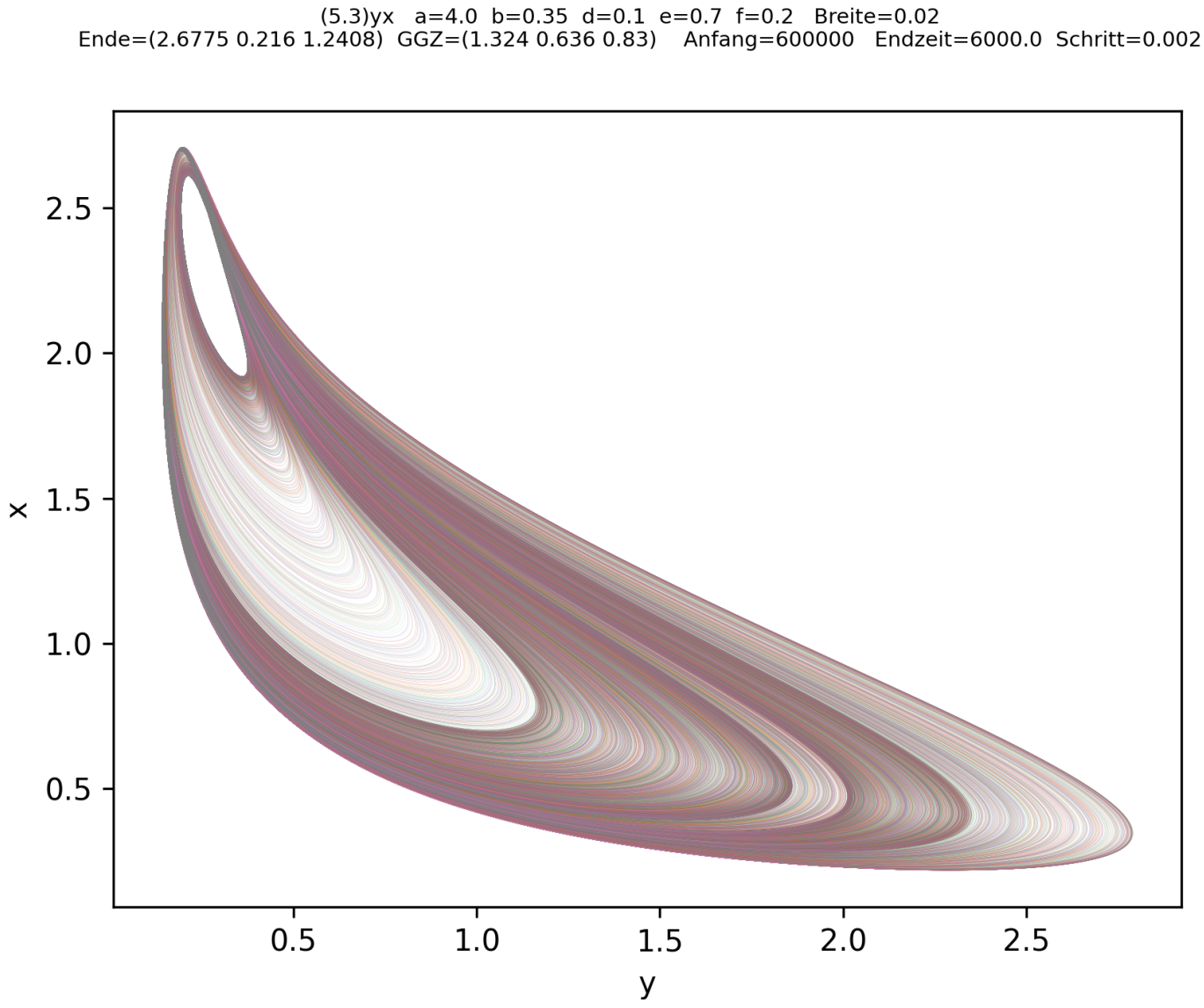
Legende: Chaos im **Beispiel 40**: $\lambda_1 \approx 0.057$
für $a = 8.1$, $b = 0.6$, $d = 0.65$, $e = 0.8$, $f = 0.07$



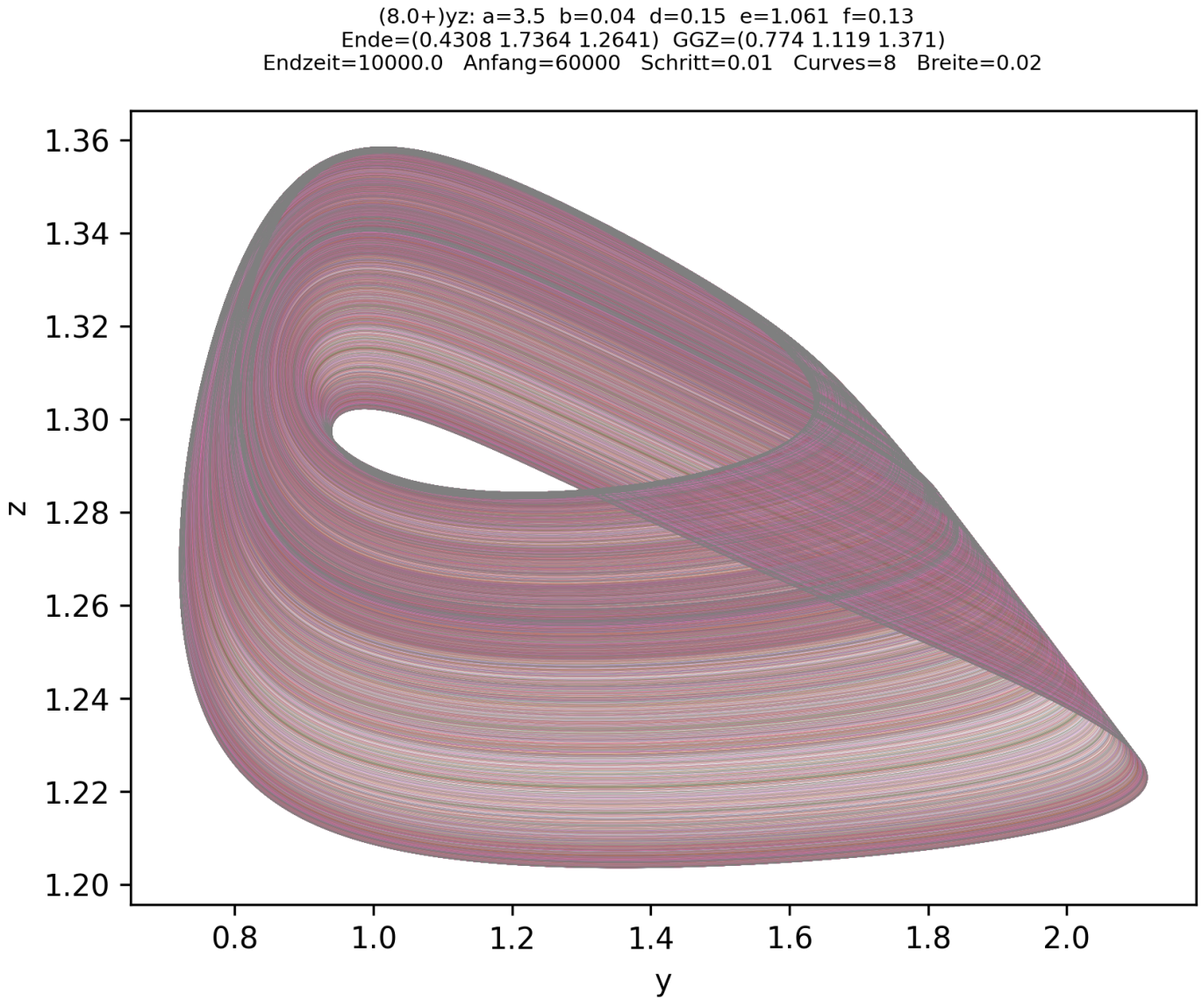
Legende: Chaos im **Beispiel 41**: $\lambda_1 \approx 0.010$
für $a = 0.51$, $b = 0.46$, $c = 0.01$, $d = 0.17645$, $e = 0.22$, $f = 0.16$, $g = 0.02$, $h = 0.1$.



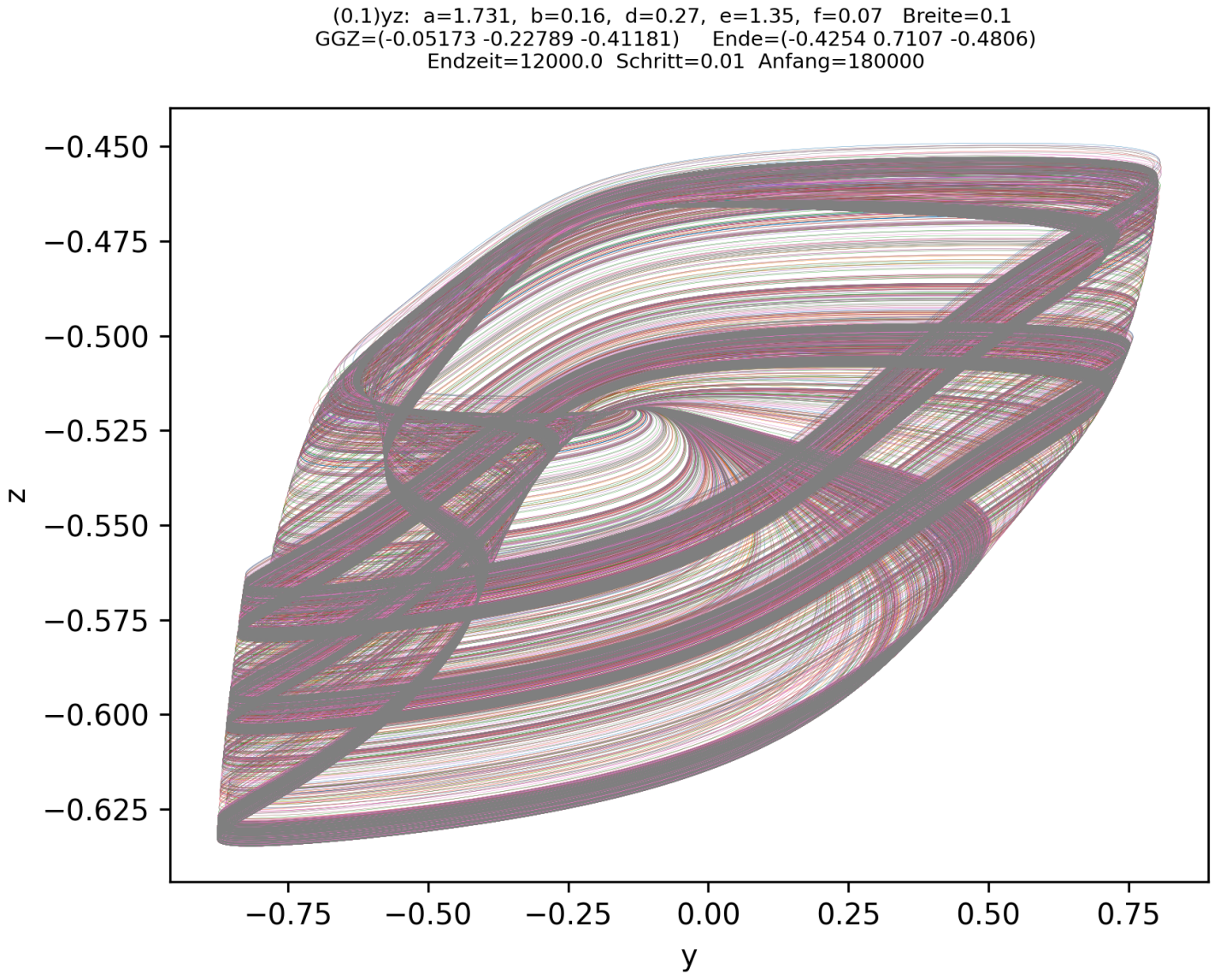
Legende: Chaos im **Beispiel 42**: $\lambda_1 \approx 0.028$
für $a = 4.0,\ b = 0.35, d = 0.1,\ e = 0.7,\ f = 0.2$.



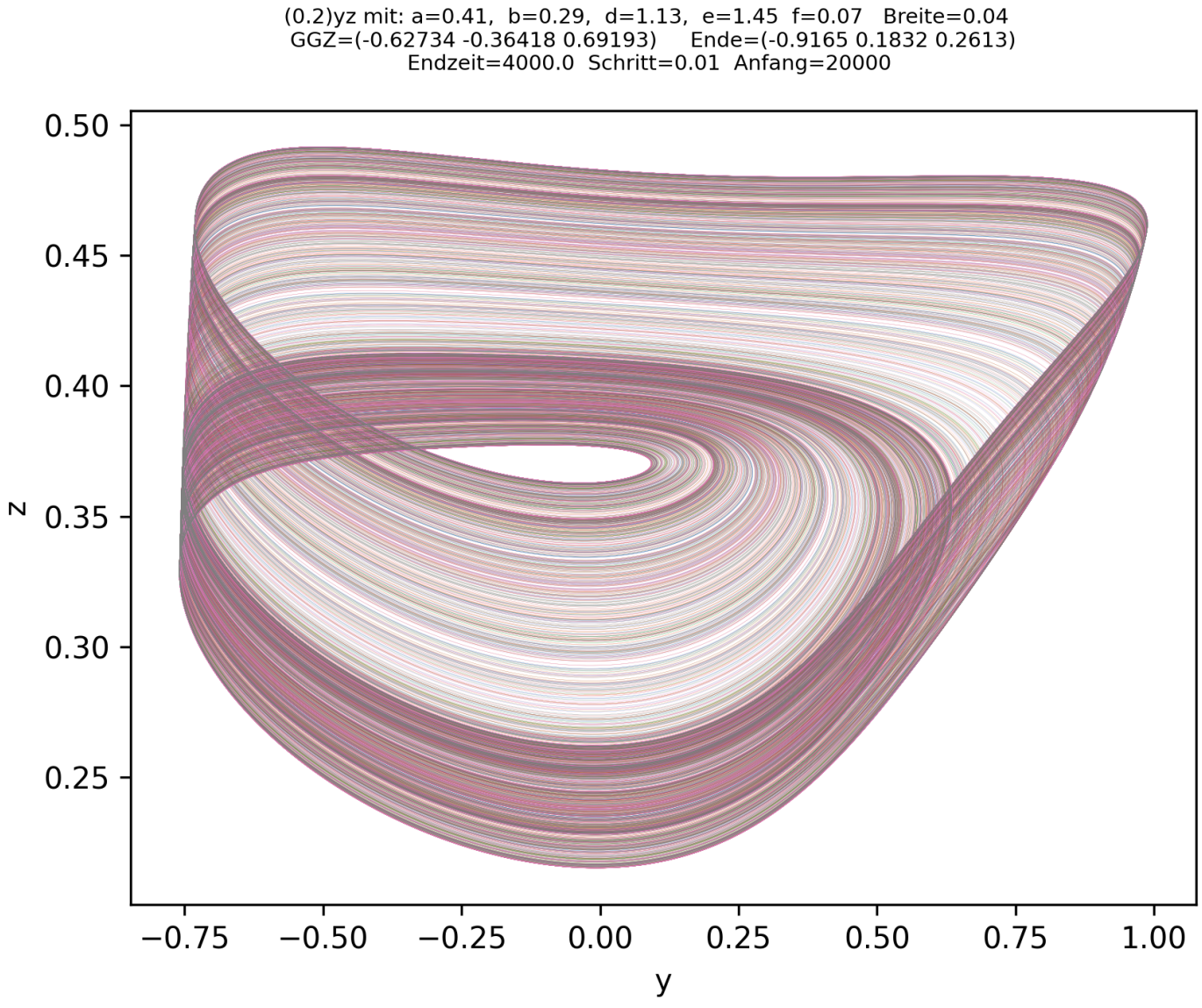
Legende: Chaos im **Beispiel 43**: $\lambda_1 \approx 0.054$
für $a = 3.5$, $b = 0.04$, $d = 0.15$, $e = 1.061$, $f = 0.13$.



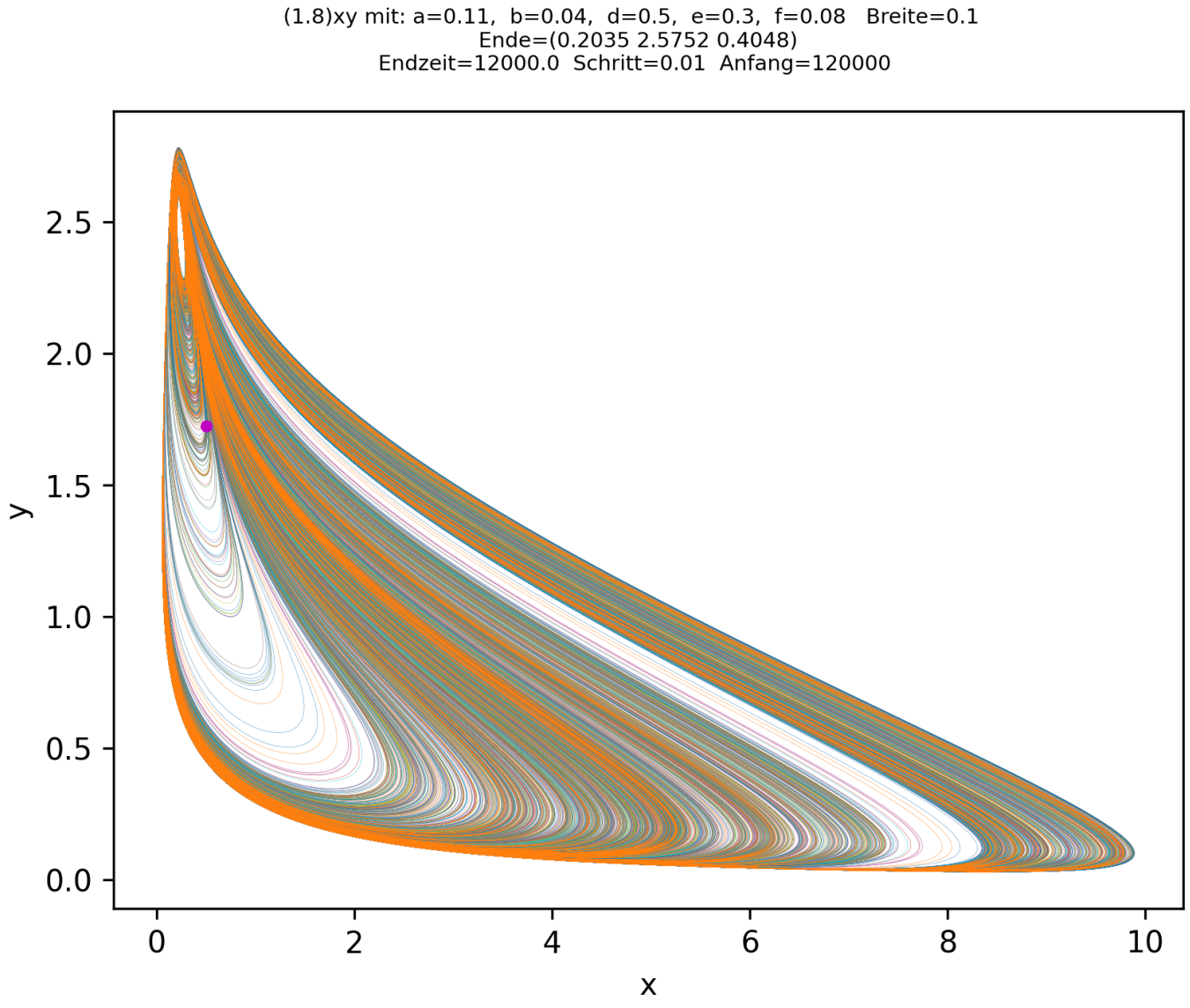
Legende: Chaos im **Beispiel 44**: $\lambda_1 \approx 0.017$
für $a = 1.731,\ b = 0.16,\ d = 0.27,\ e = 1.35,\ f = 0.07$.



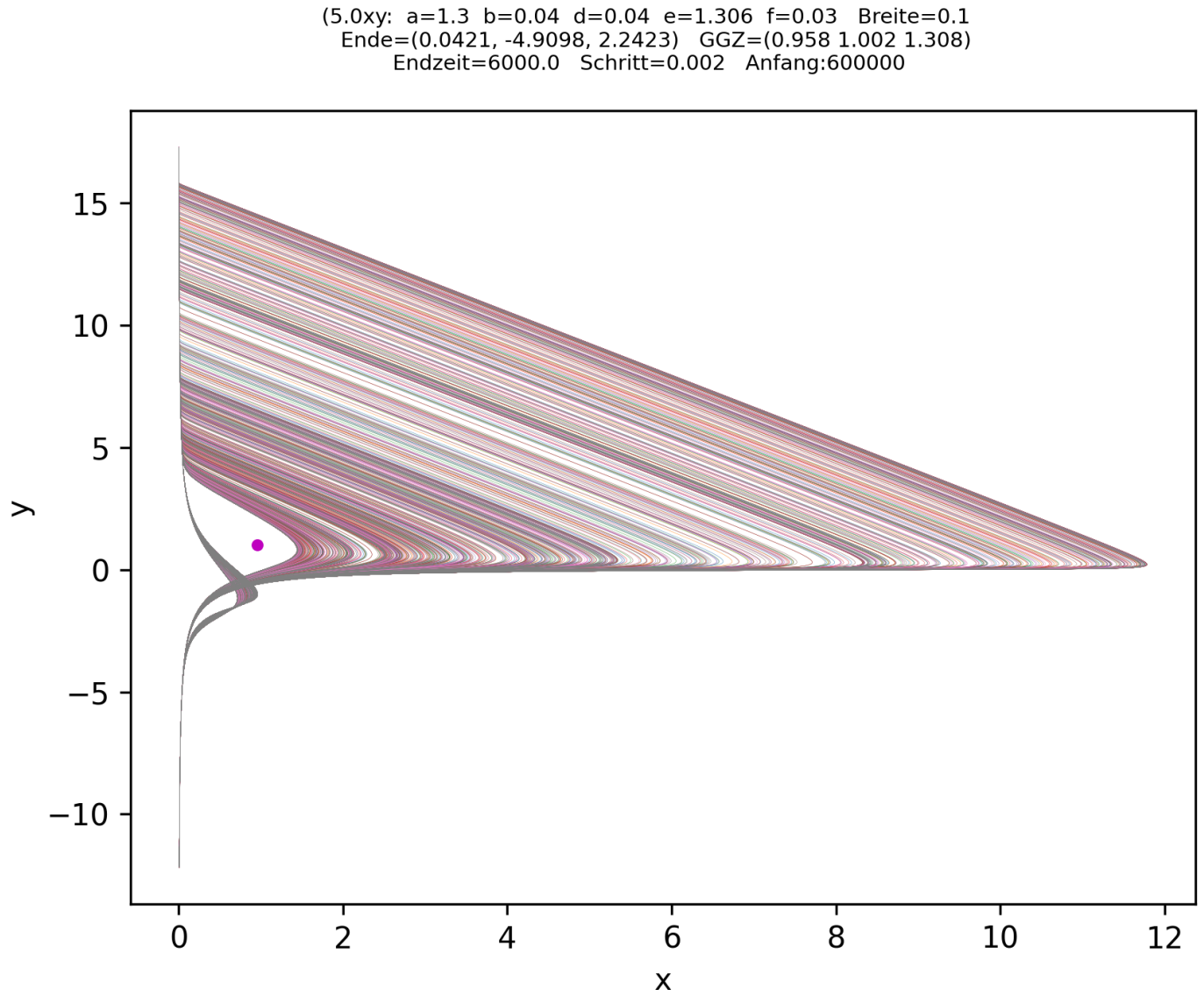
Legende: Chaos im **Beispiel 45**: $\lambda_1 \approx 0.030$
für $a = 0.41$, $b = 0.29$, $d = 1.13$, $e = 1.45$, $f = 0.07$.



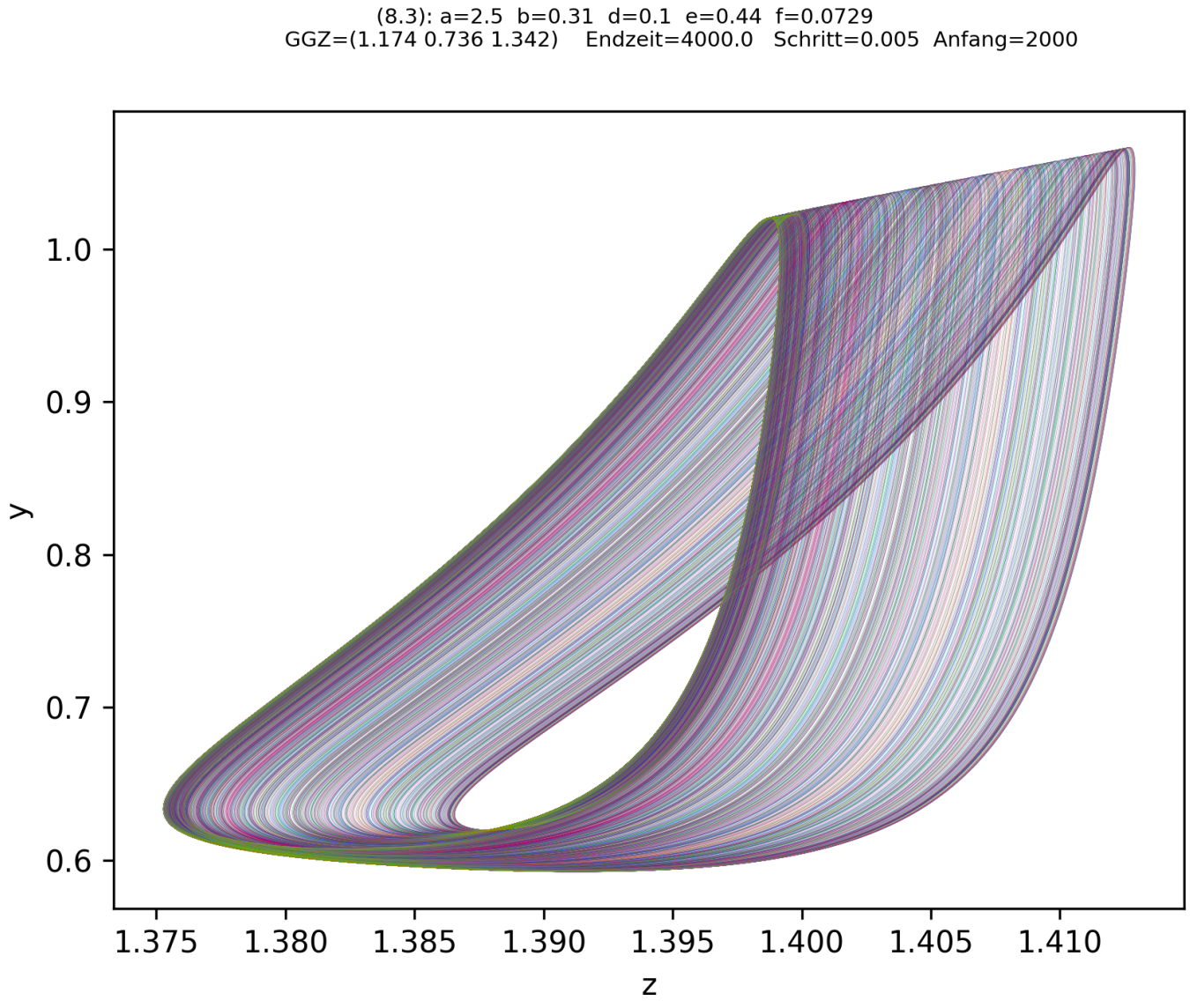
Legende: Chaos im **Beispiel 46**: $\lambda_1 \approx 0.009$
für $a = 0.11$, $b = 0.04$, $d = 0.5$, $e = 0.3$, $f = 0.08$.



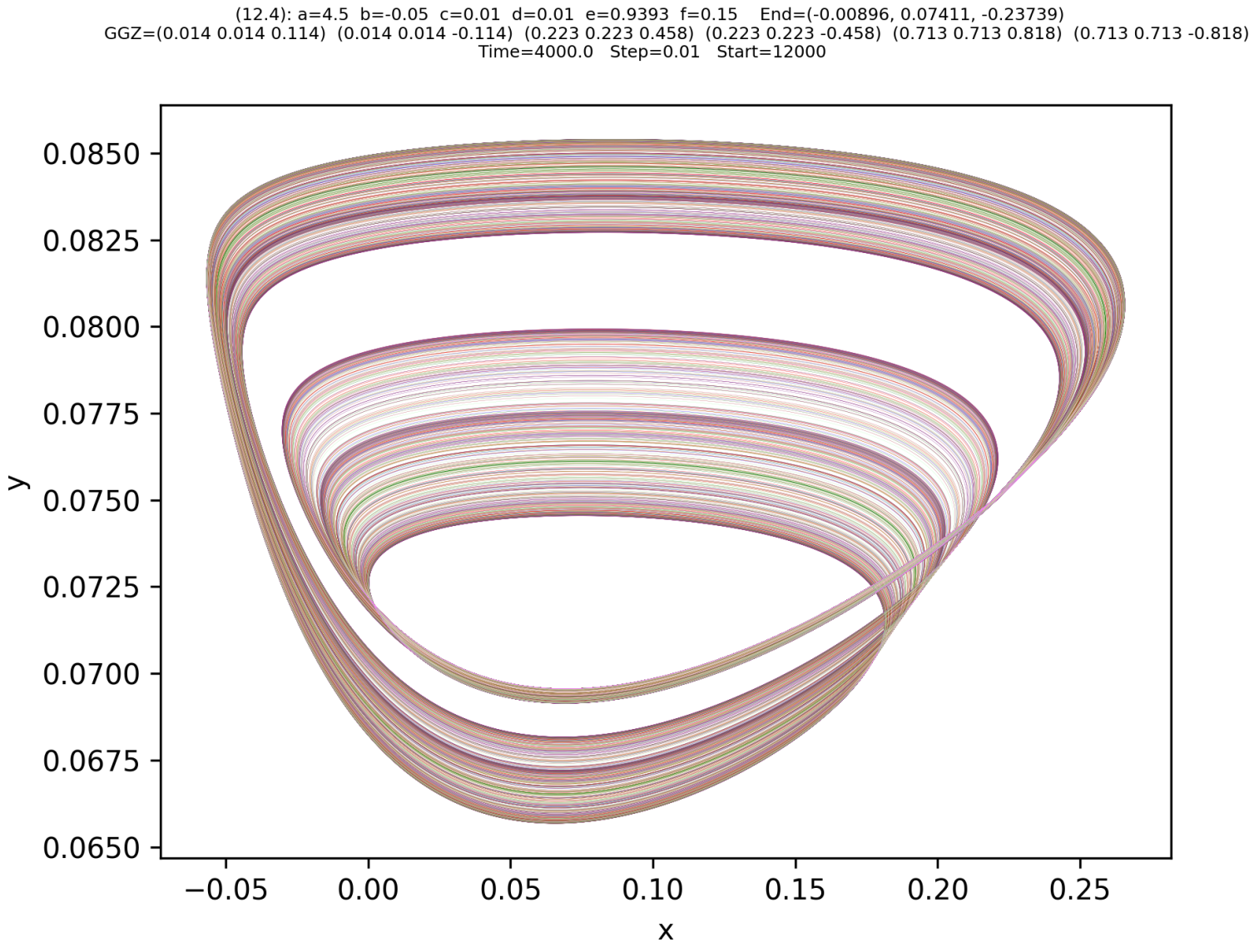
Legende: Chaos im **Beispiel 47**: $\lambda_1 \approx 0.012$
für $a = 1.3$, $b = 0.04$, $d = 0.04$, $e = 1.306$, $f = 0.03$.



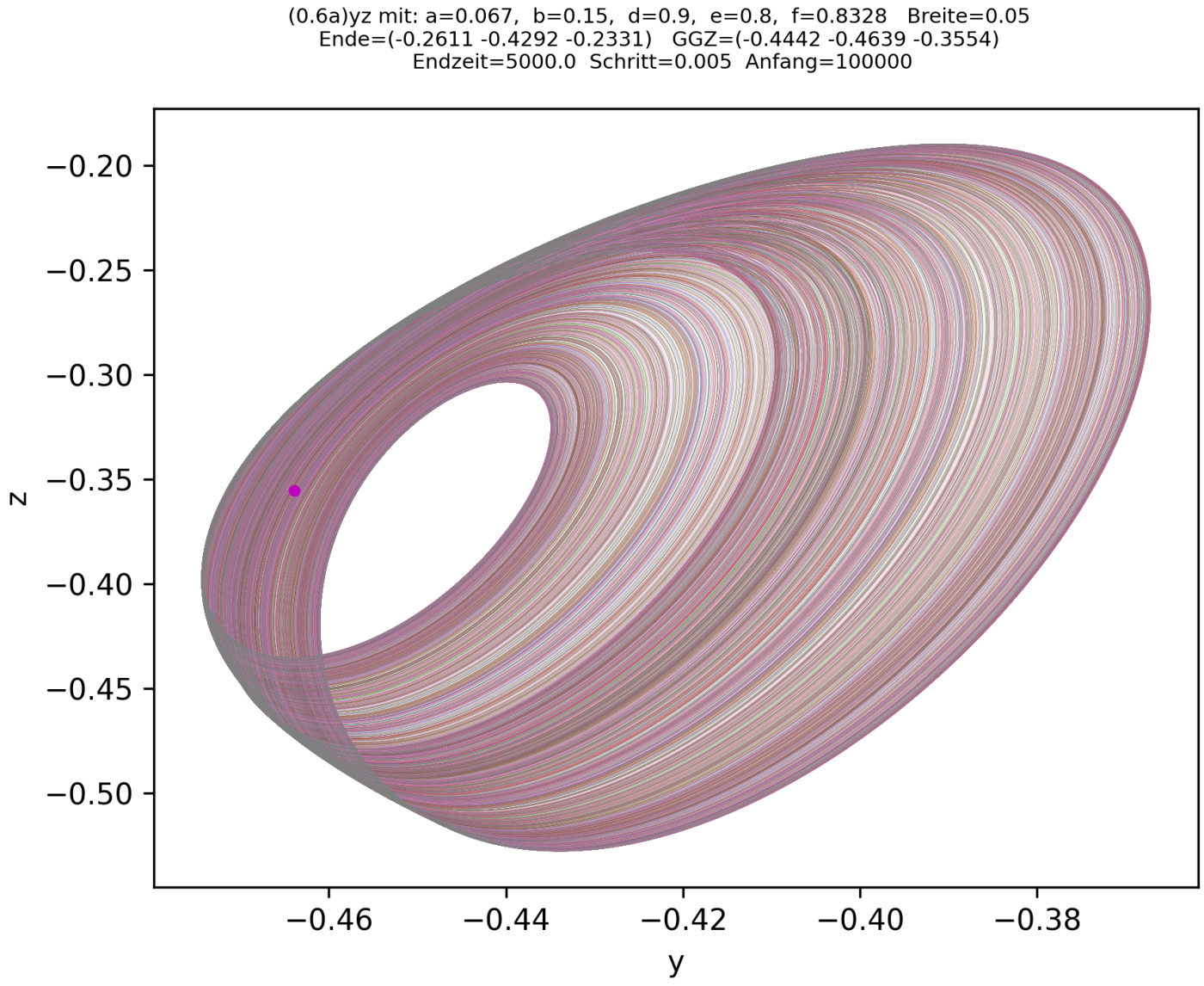
Legende: Chaos im **Beispiel 48**: $\lambda_1 \approx 0.041$
für $a = 2.5$, $b = 0.31$, $d = 0.1$, $e = 0.44$, $f = 0.0729$.



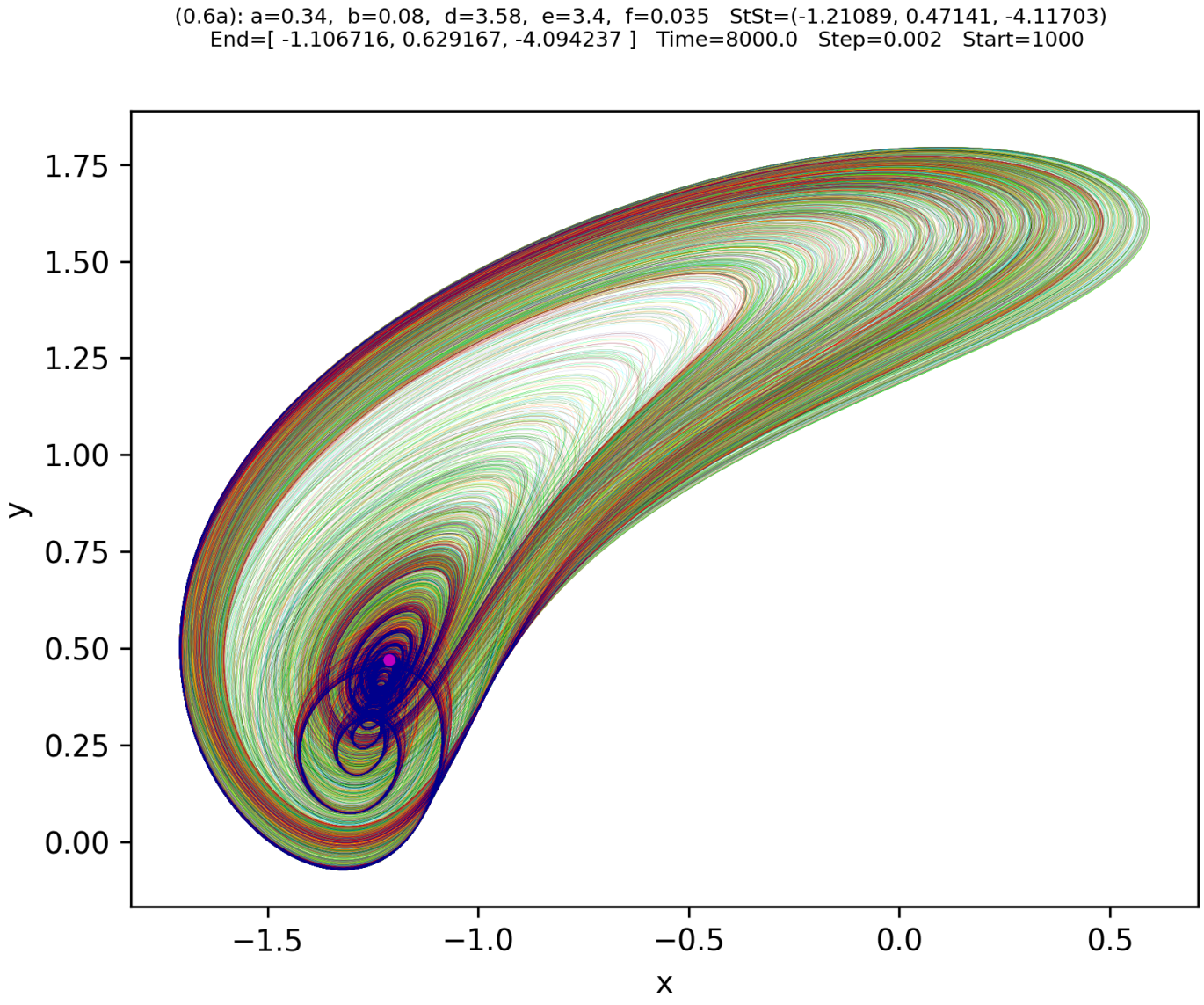
Legende: Chaos im **Beispiel 49**: $\lambda_1 \approx 0.0065$
für $a = 4.5,\ b = -0.05,\ c = d = 0.01,\ e = 0.9393,\ f = 0.15$.



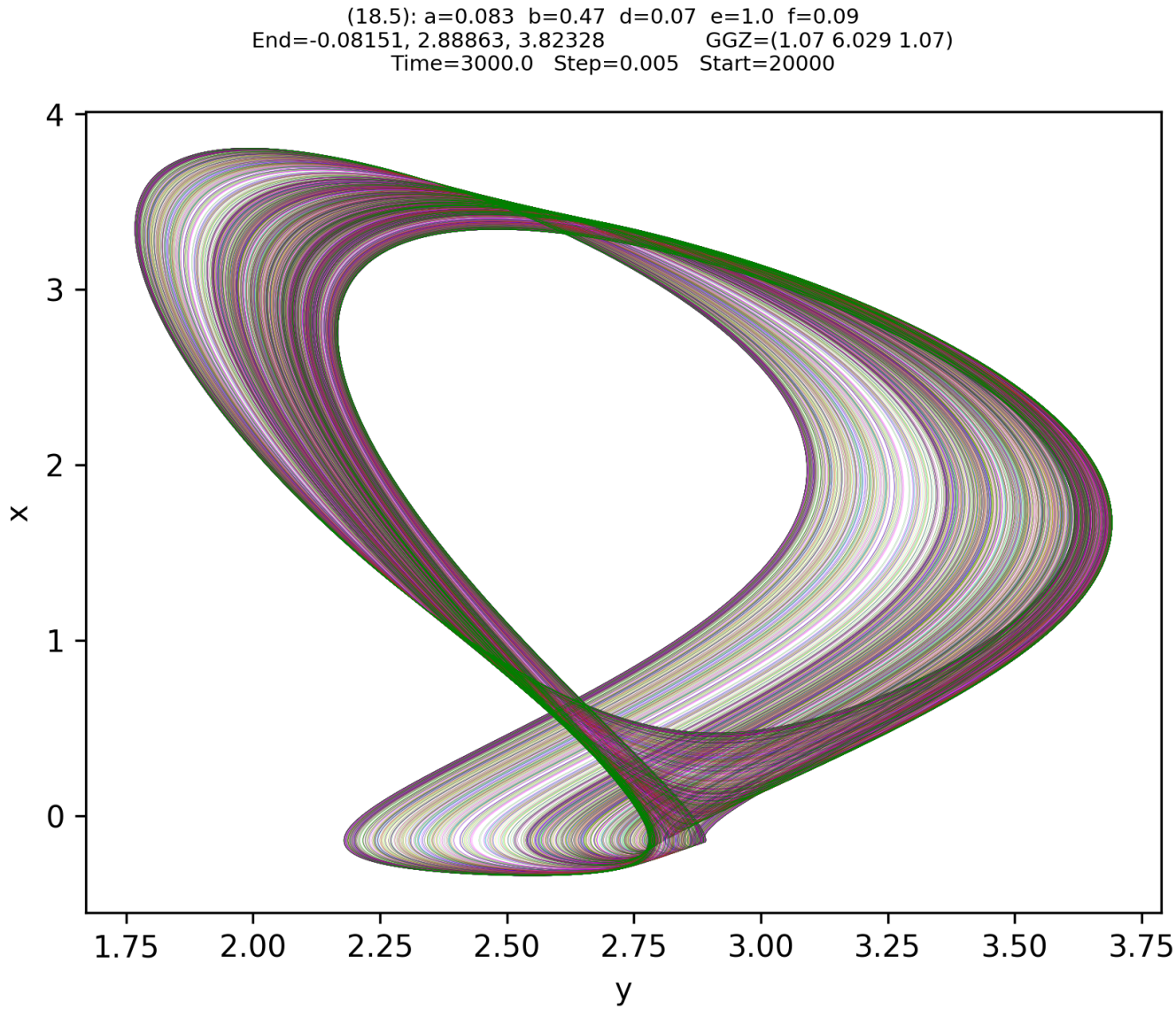
Legende: Chaos1 im **Beispiel 50**: $\lambda_1 \approx 0.0361$
für $a = 0.067$, $b = 0.15$, $d = 0.9$, $e = 0.8$, $f = 0.8328$.



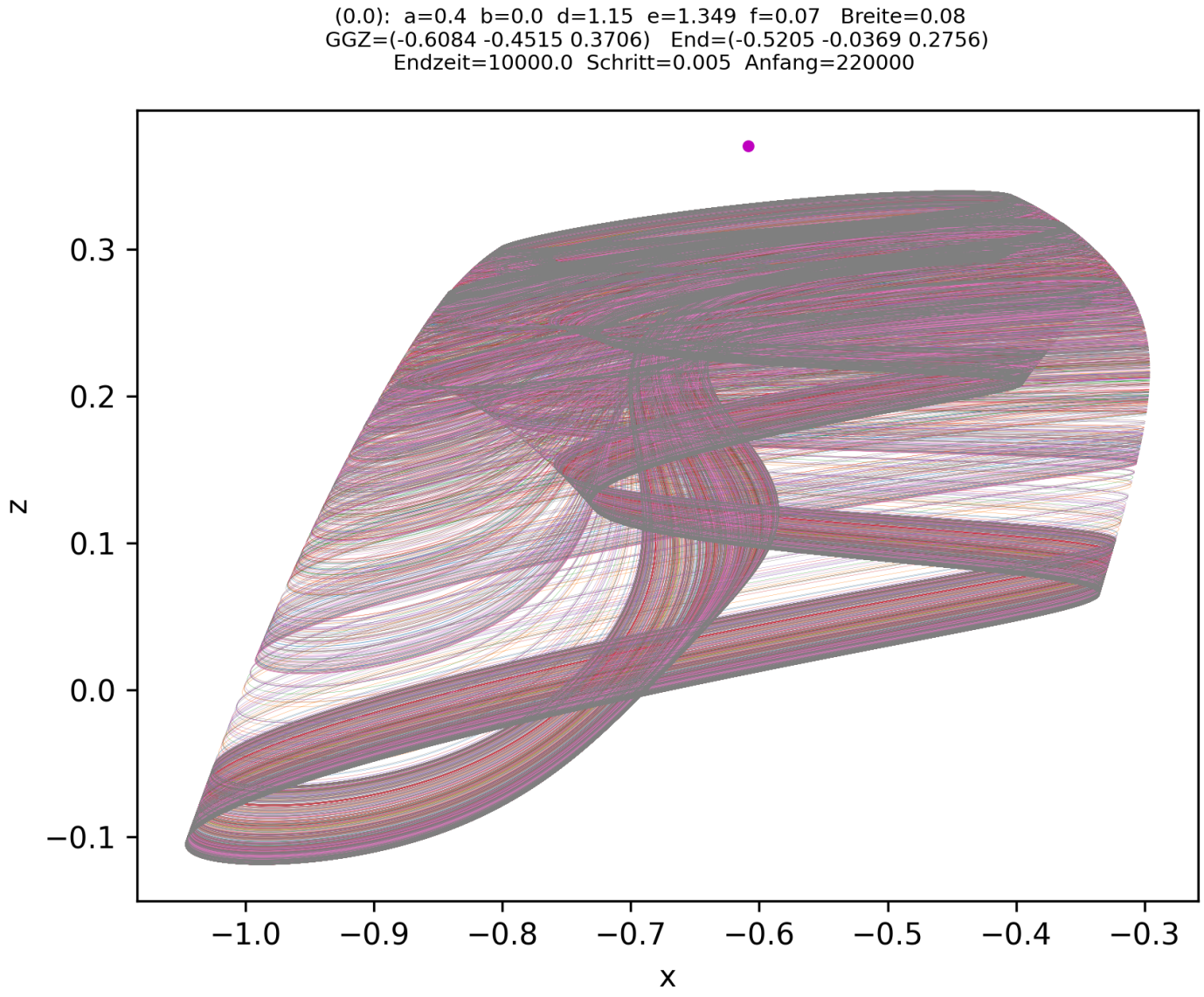
Legende: Chaos2 im **Beispiel 50**: $\lambda_1 \approx 0.024$
für $a = 0.34,\ b = 0.08,\ d = 3.58,\ e = 3.4,\ f = 0.035$.



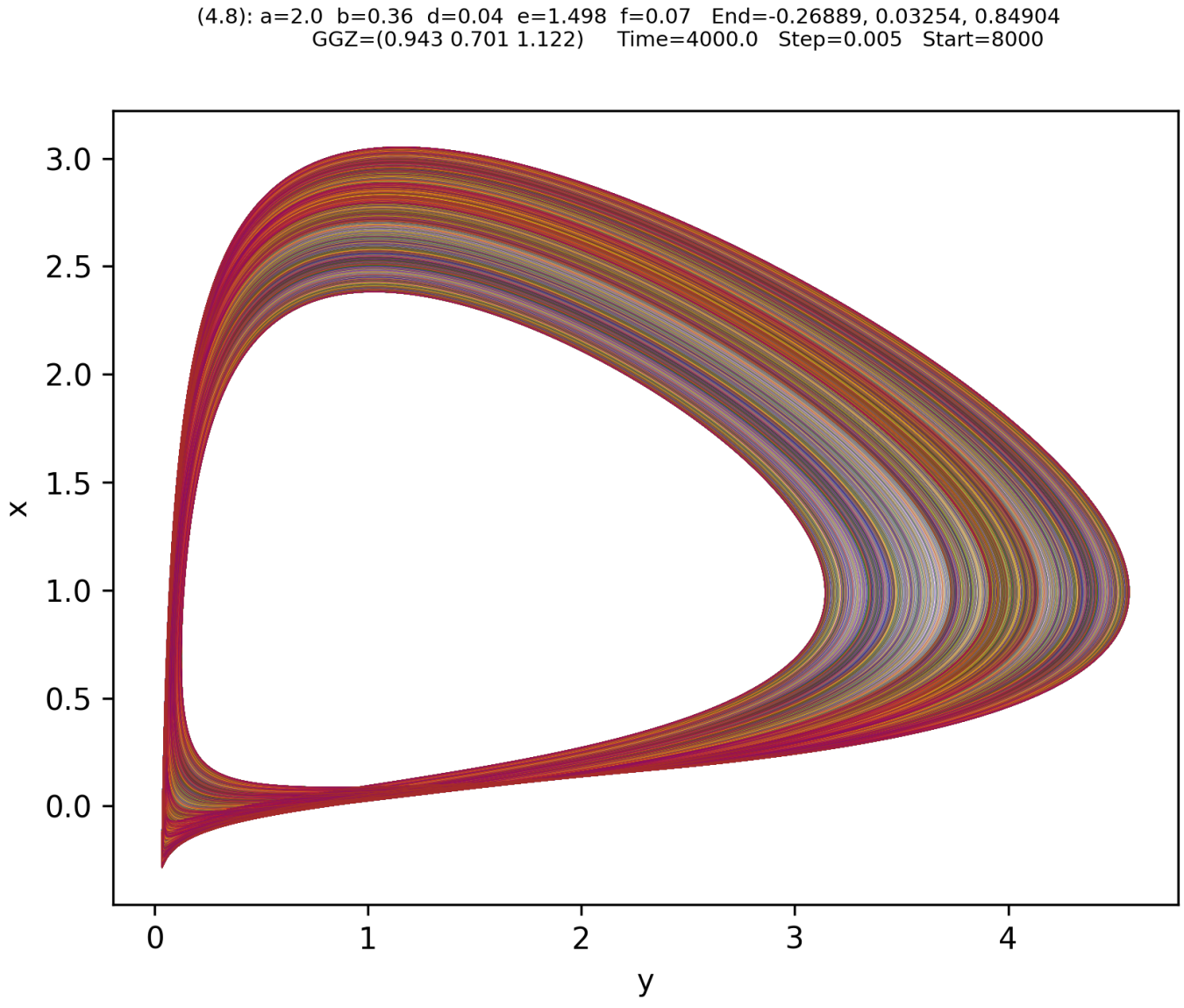
Legende: Chaos im **Beispiel 51**: $\lambda_1 \approx 0.0272$
für $a = 0.083$, $b = 0.47$, $d = 0.07$, $f = 0.09$.



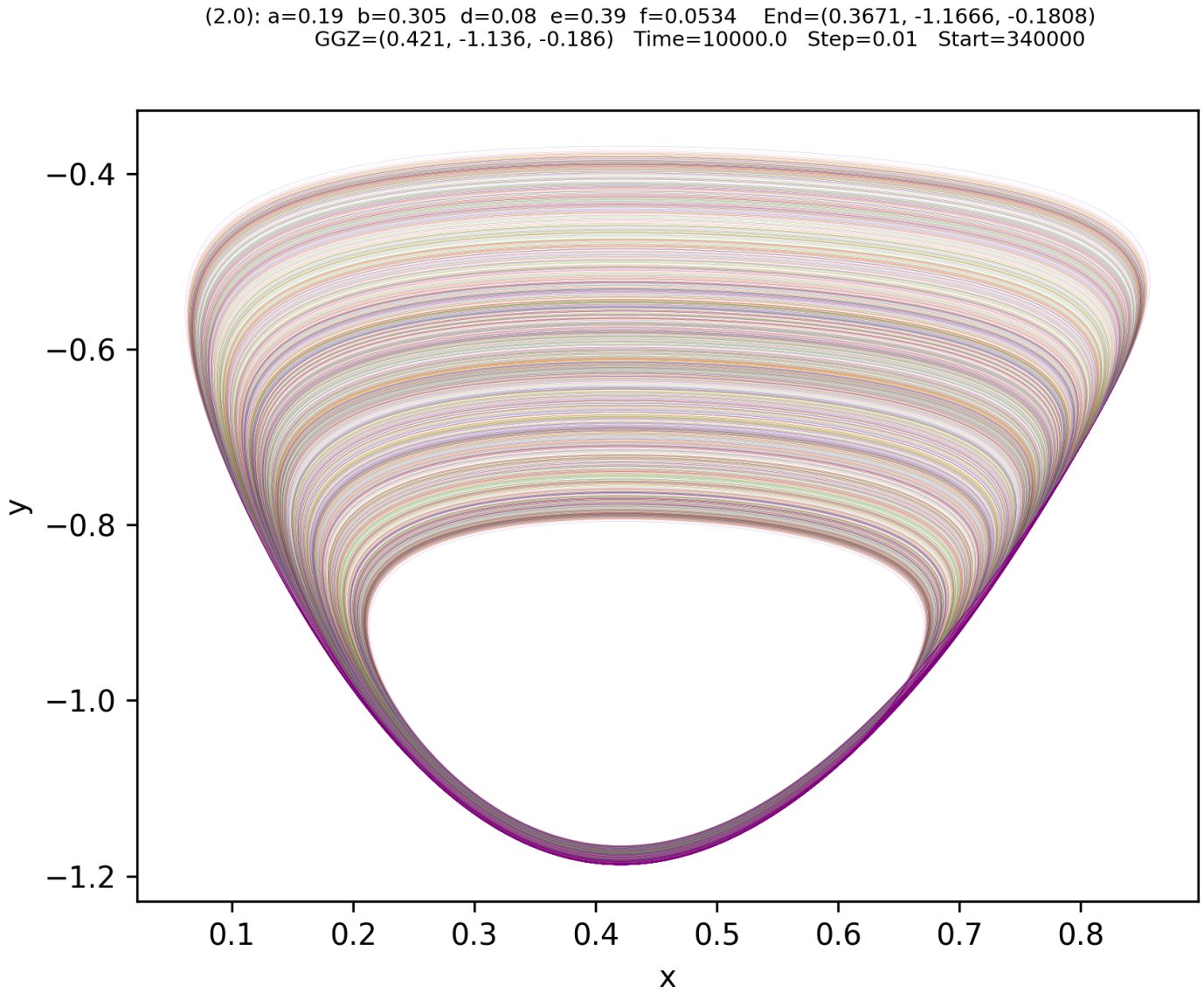
Legende: Chaos im **Beispiel 52**: $\lambda_1 \approx 0.0208$
für $a = 0.4$, $d = 1.15$, $e = 1.349$ $f = 0.07$.



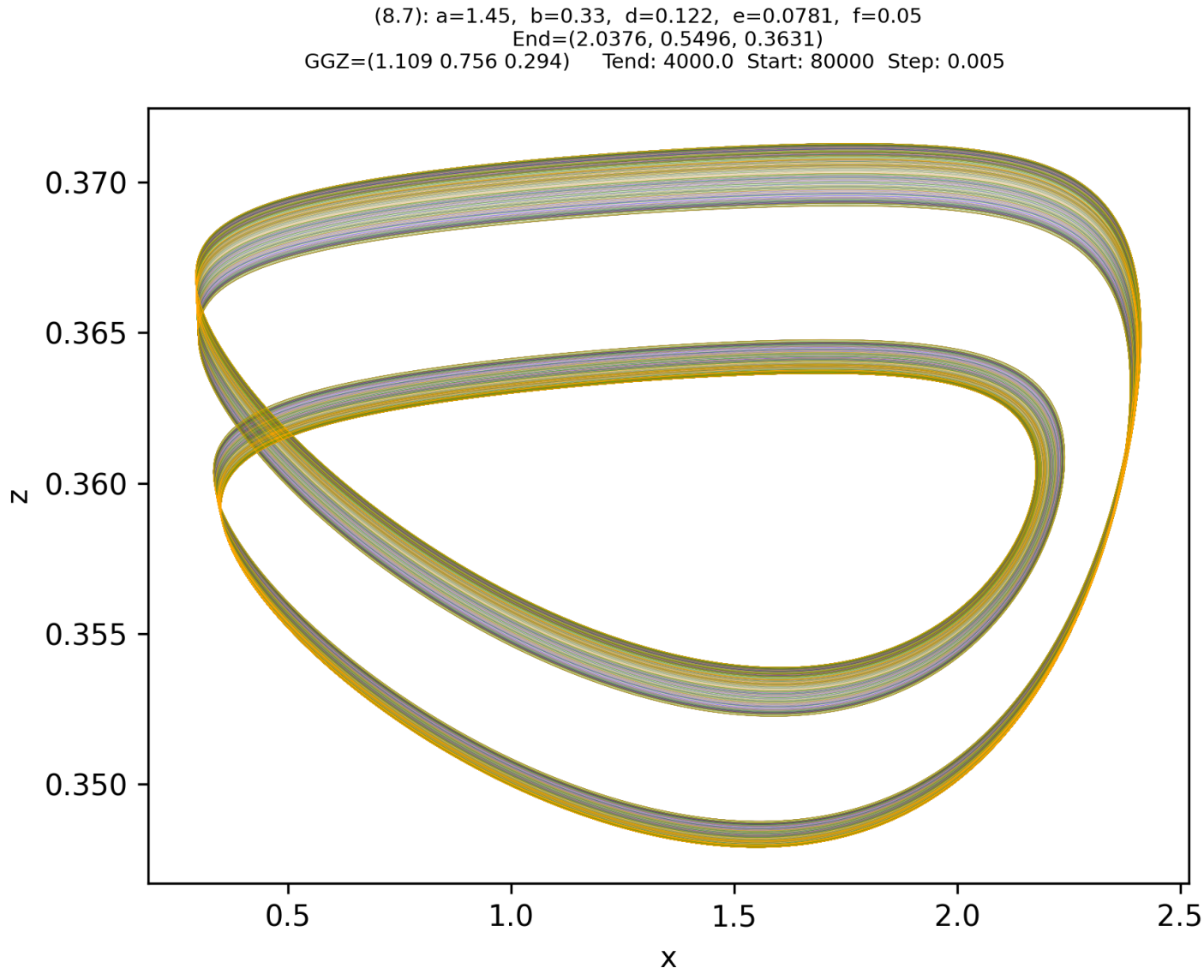
Legende: Chaos im **Beispiel 53**: $\lambda_1 \approx 0.0604$
für $a = 2.0$, $b = 0.36$, $d = 0.04$, $e = 1.498$, $f = 0.07$.



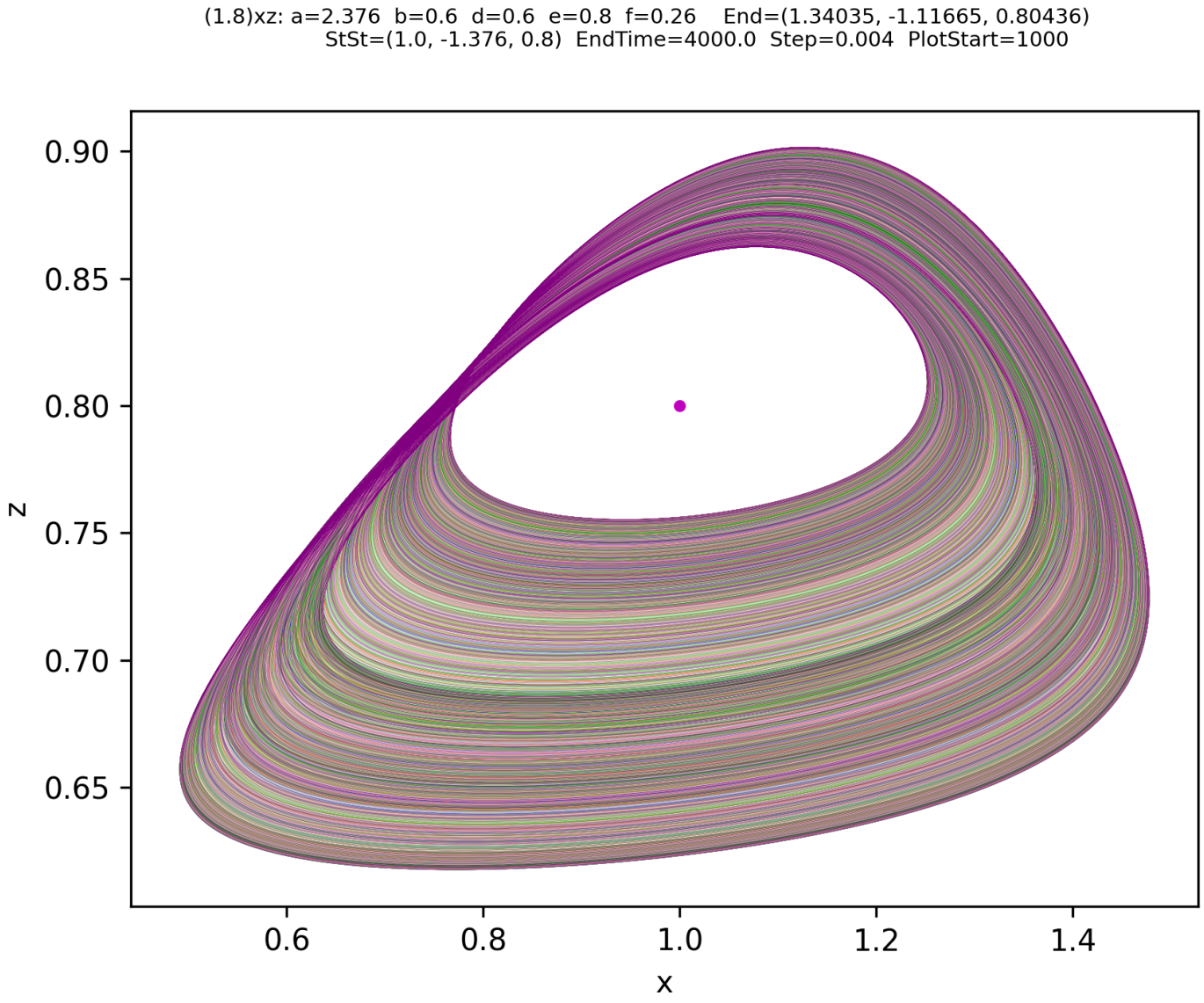
Legende: Chaos im **Beispiel 54**: $\lambda_1 \approx 0.011$
für $a = 0.19$, $b = 0.305$, $d = 0.08$, $e = 0.39$ $f = 0.0534$.



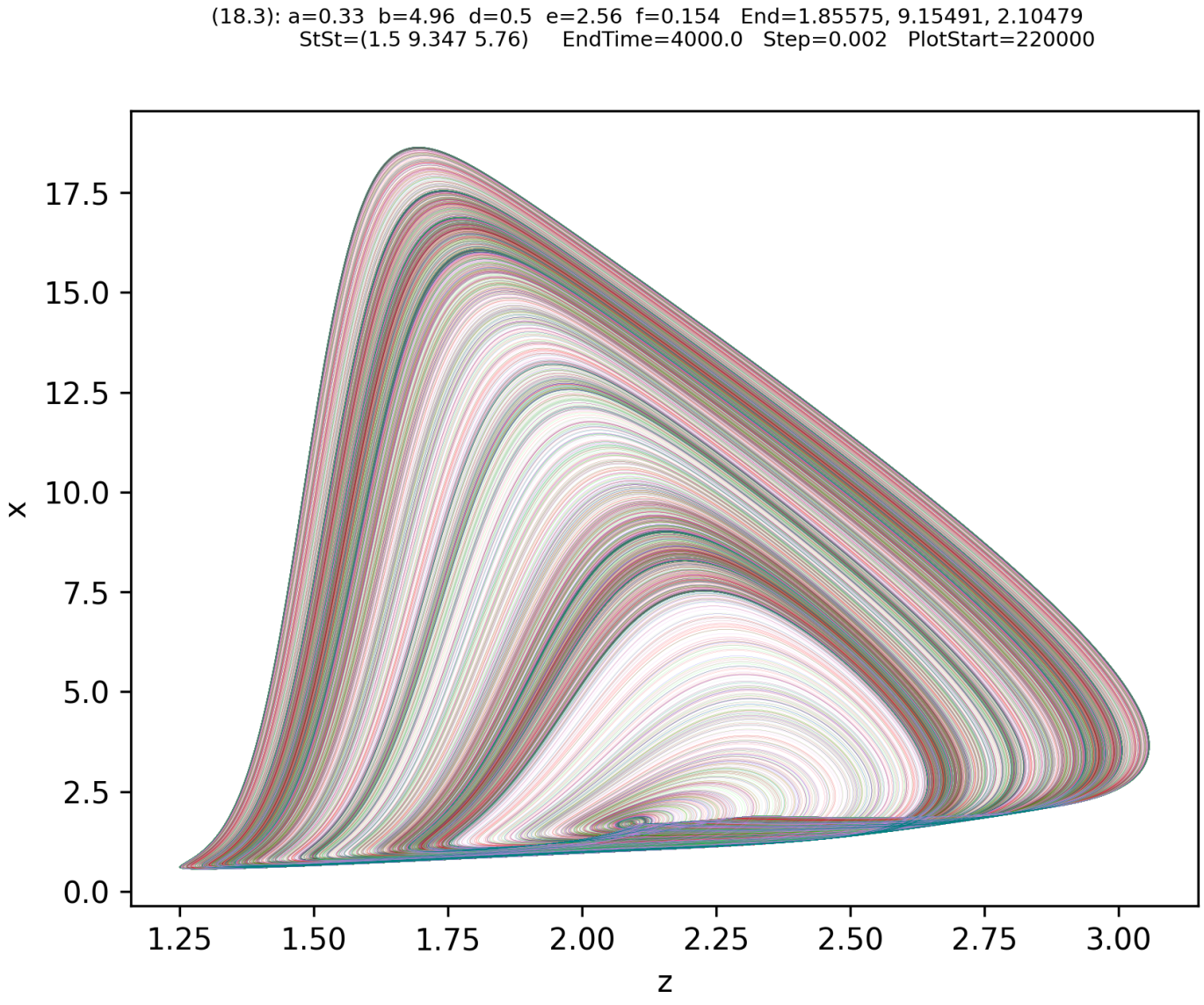
Legende: Chaos im **Beispiel 55**: $\lambda_1 \approx 0.095$
für $a = 1.45$, $b = 0.33$, $d = 0.122$, $e = 0.0781$, $f = 0.05$.



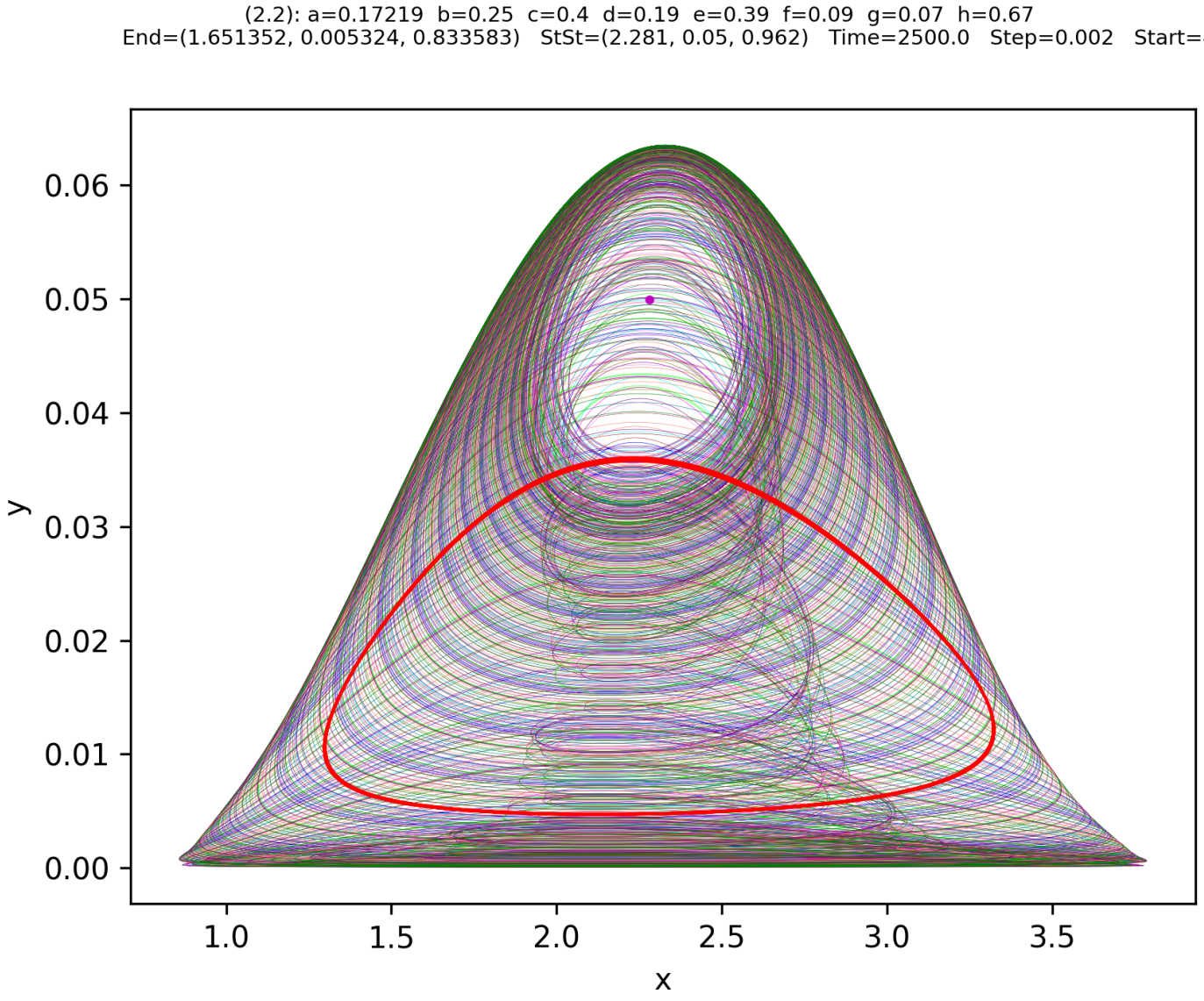
Legende: Chaos im **Beispiel 56**: $\lambda_1 \approx 0.0464$
für $a = 2.376,\ b = 0.6,\ d = 0.6,\ e = 0.8,\ f = 0.26$.



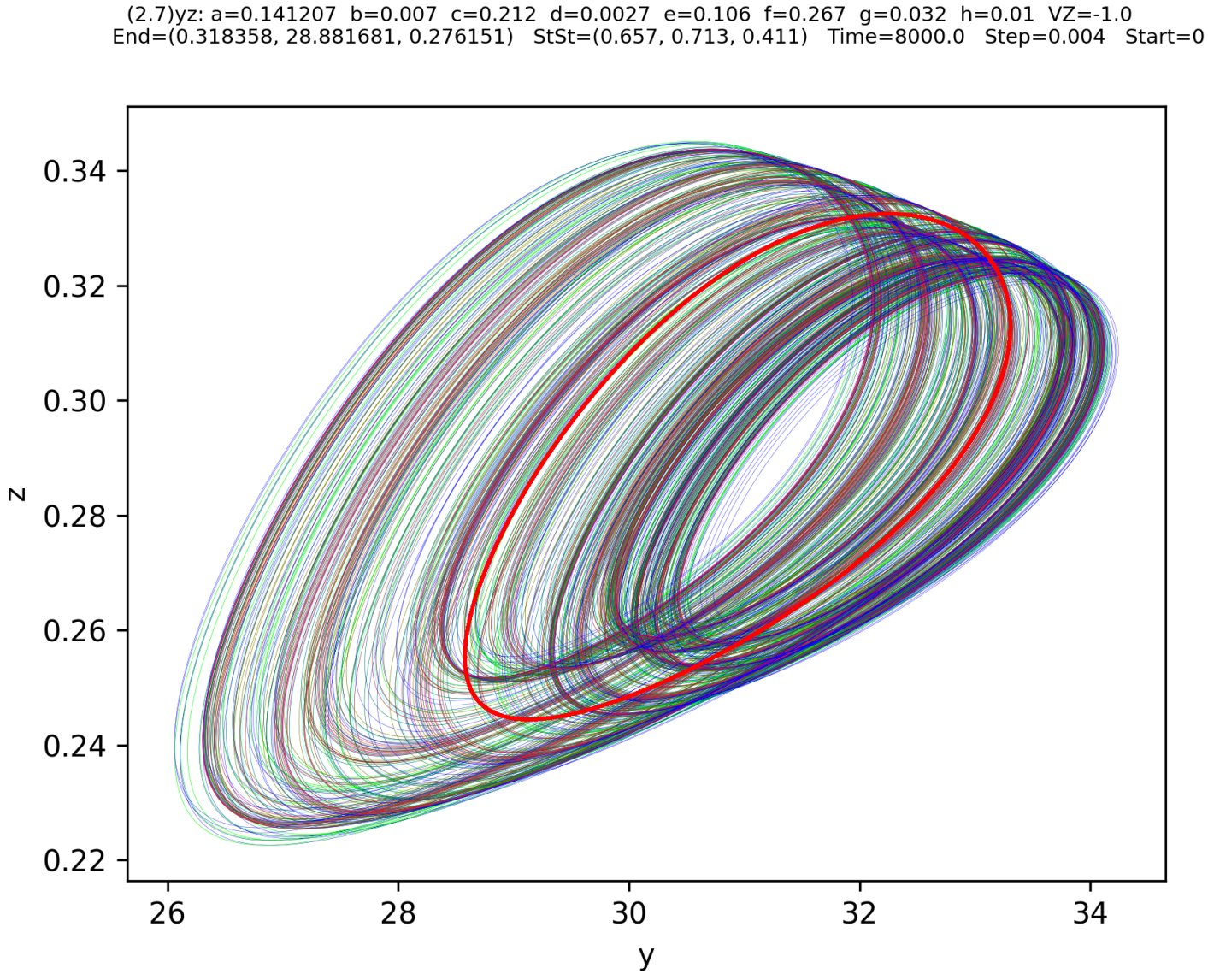
Legende: Chaos im **Beispiel 57**: $\lambda_1 \approx 0.035$
für $a = 0.33$, $b = 4.96$, $d = 0.5$, $e = 2.56$, $f = 0.154$.



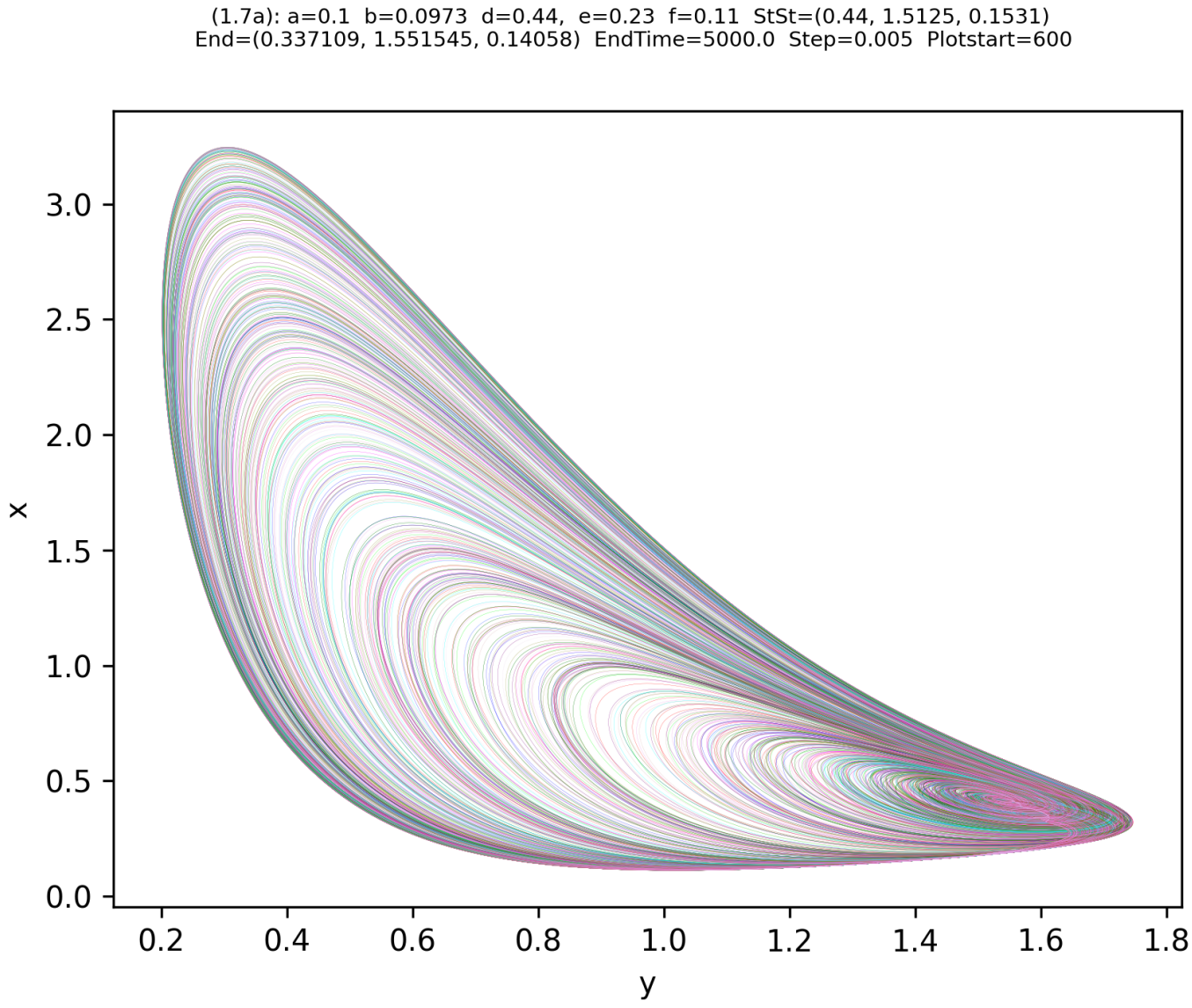
Legende: Chaos im **Beispiel 58**: $\lambda_1 \approx 0.0035$ für $a = 0.17219$, $b = 0.25$, $c = 0.4$, $d = 0.19$, $e = 0.39$, $f = 0.09$, $g = 0.07$, $h = 0.67$.



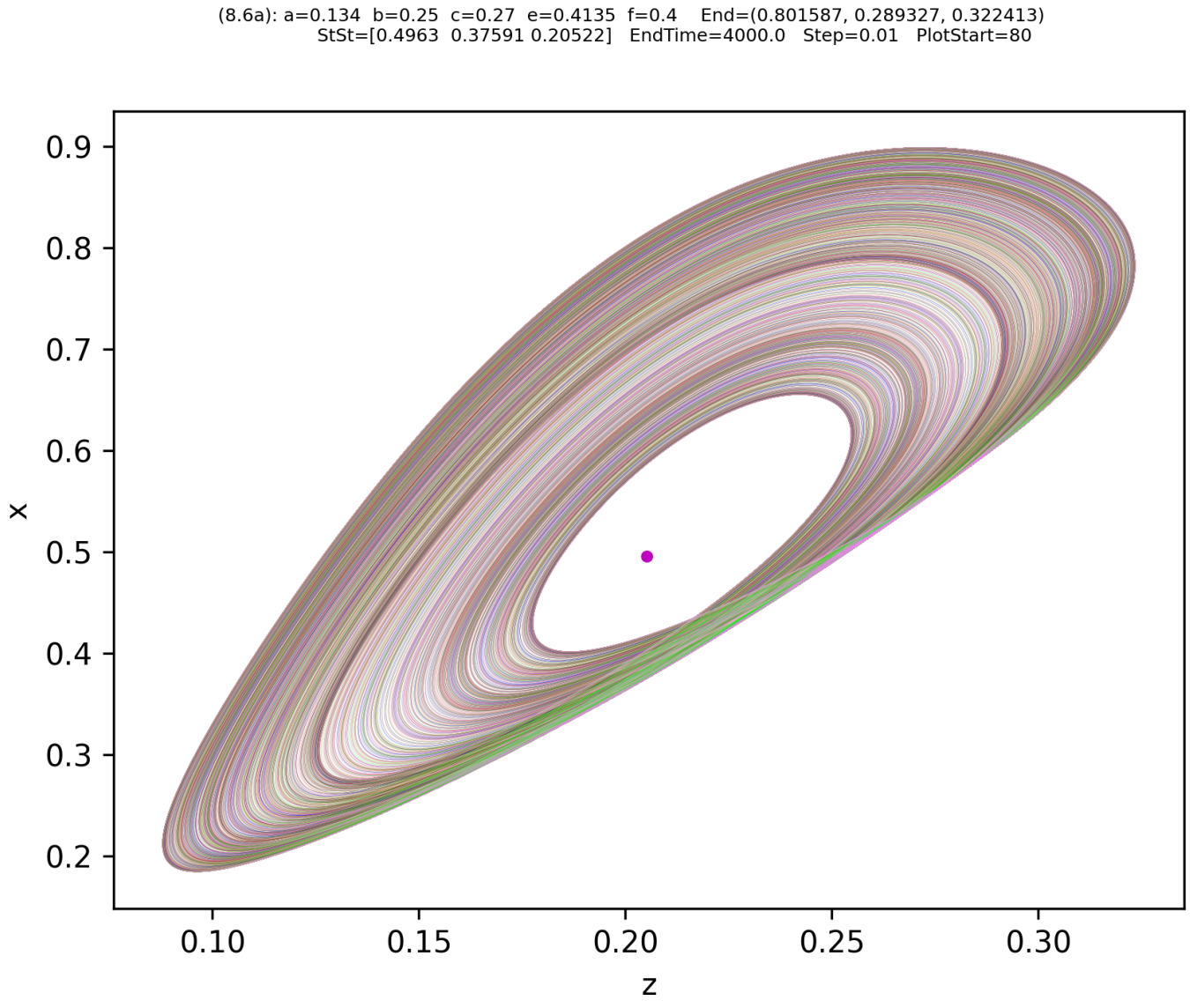
Legende: Chaos im **Beispiel 59**: $\lambda_1 \approx 0.0014$ für $a = 0.141207$, $b = 0.007$, $c = 0.212$, $d = 0.0027$, $e = 0.106$, $f = 0.267$, $g = 0.032$, $h = 0.01$.



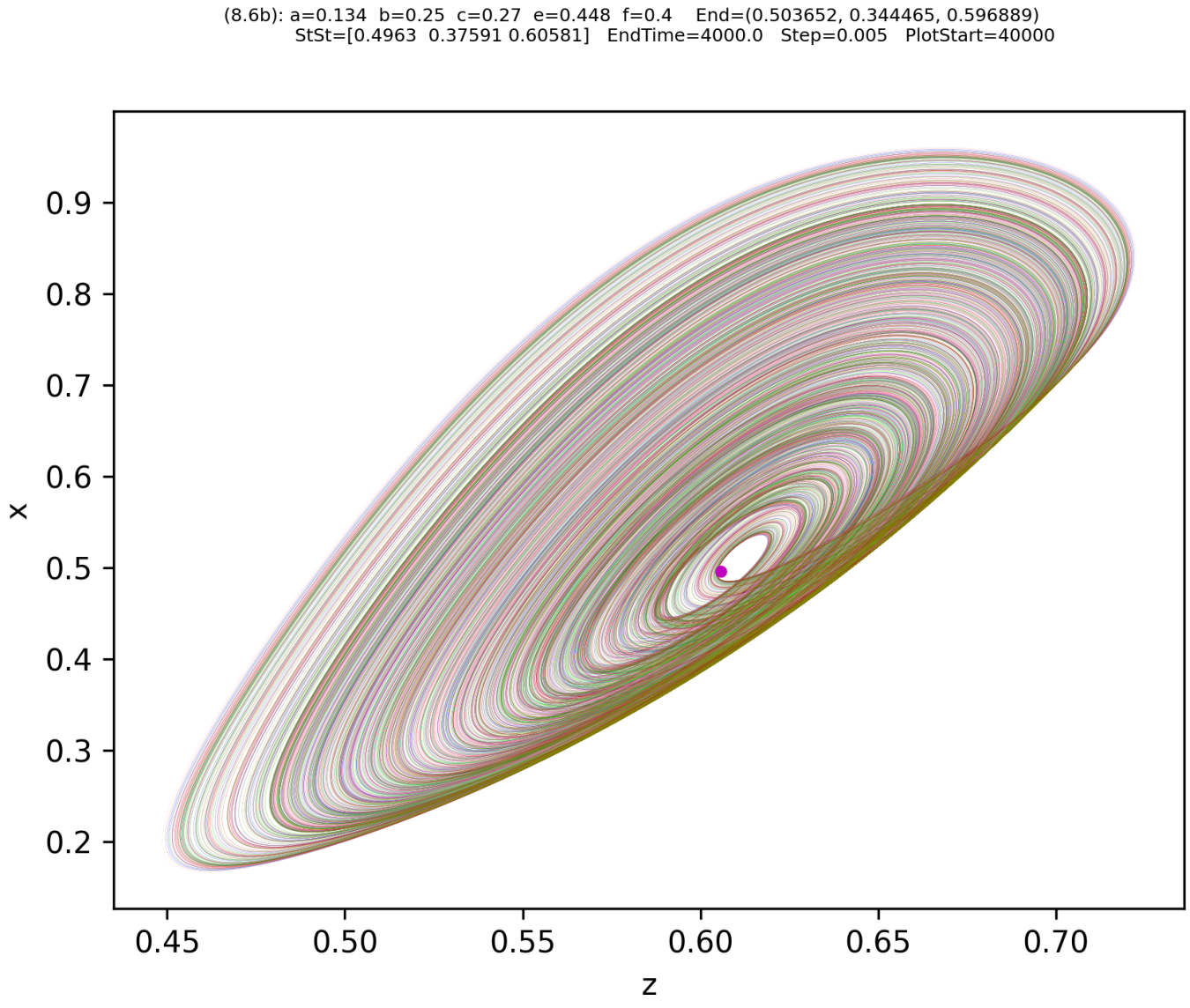
Legende: Chaos im **Beispiel 60**: $\lambda_1 \approx 0.014$ für:
$a = 0.1$, $b = 0.0973$, $d = 0.44$, $e = 0.23$, $f = 0.11$



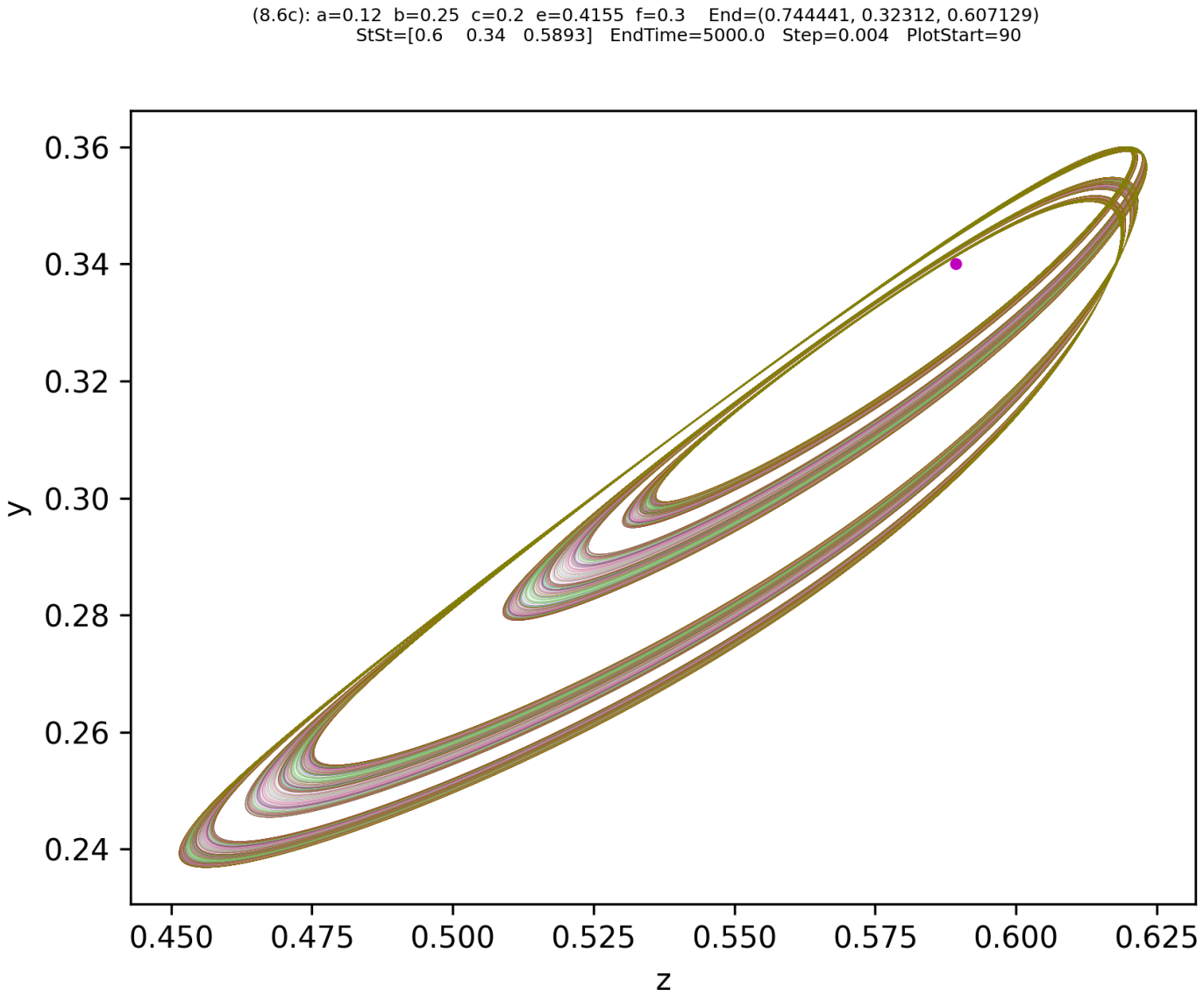
Legende: Chaos im **Beispiel 61**: $\lambda_1 \approx 0.0185$ für:
$a = 0.134$, $b = 0.25$, $c = 0.27$, $e = 0.4135$, $f = 0.4$.



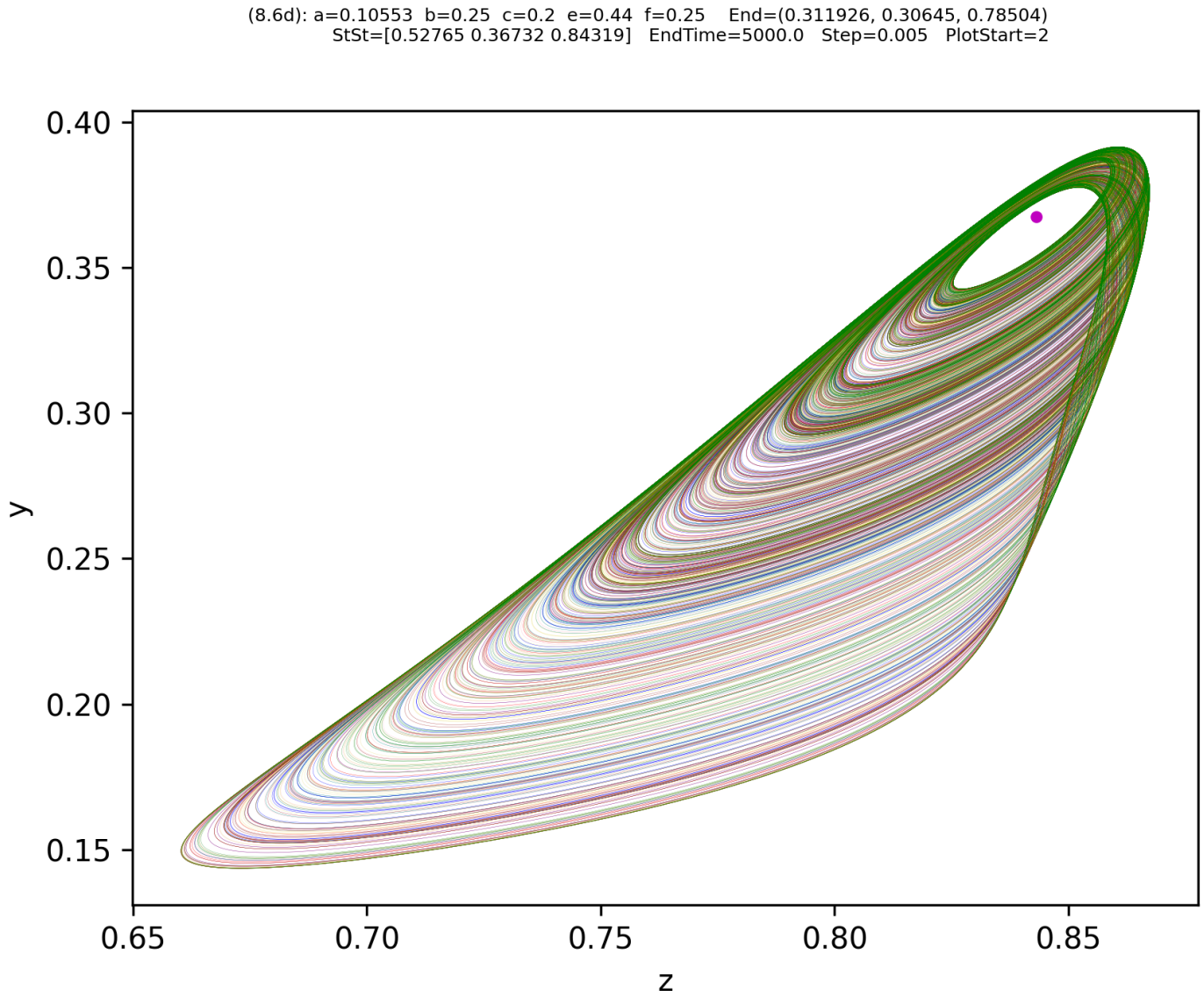
Legende: Chaos im **Beispiel 62**: $\lambda_1 \approx 0.0243$ für:
$a = 0.134,\ b = 0.25,\ c = 0.27,\ e = 0.448,\ f = 0.4\,.$



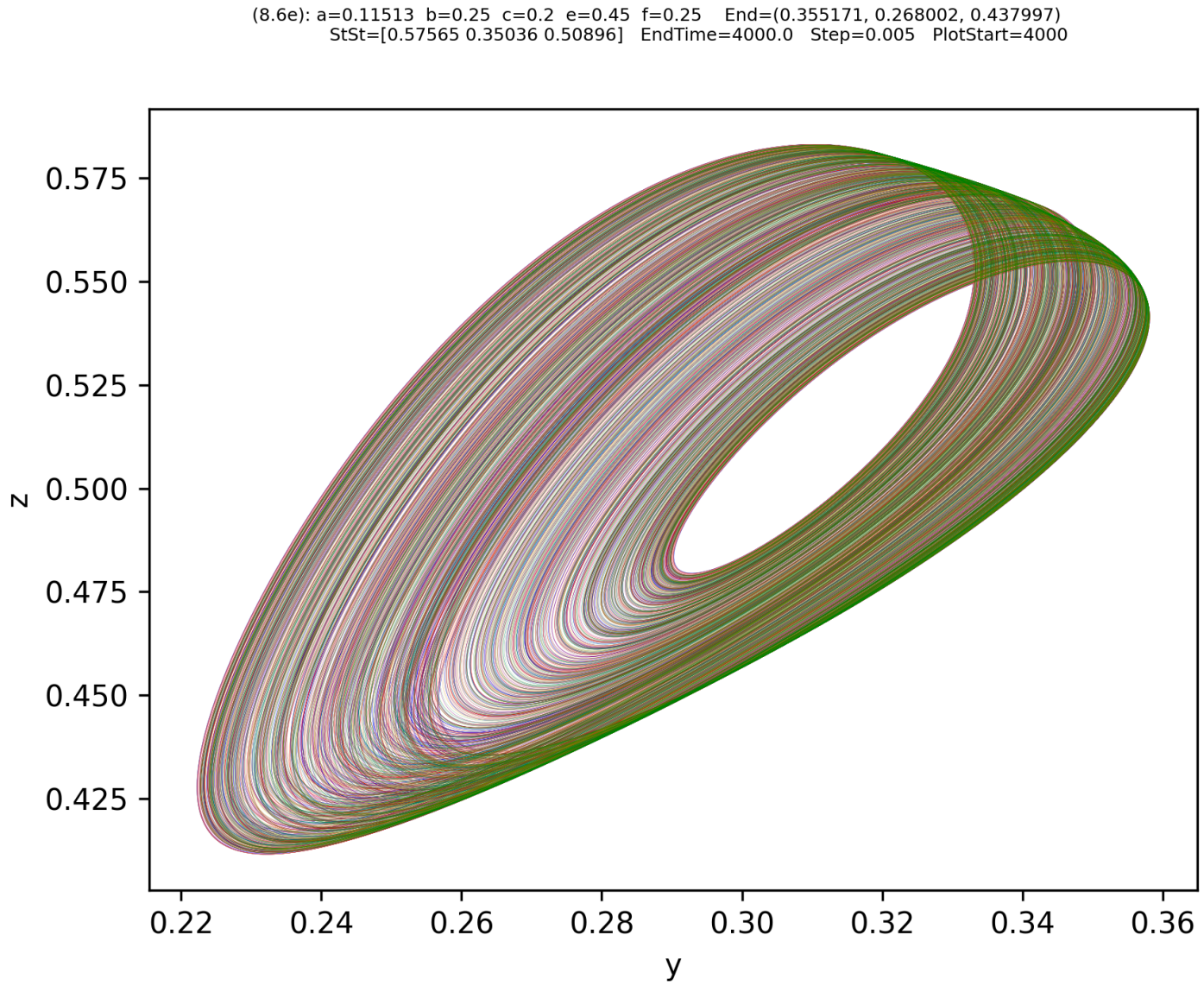
Legende: Chaos im **Beispiel 63**: $\lambda_1 \approx 0.004$ für:
$a = 0.12,\ b = 0.25,\ c = 0.2,\ e = 0.4155,\ f = 0.3\,.$



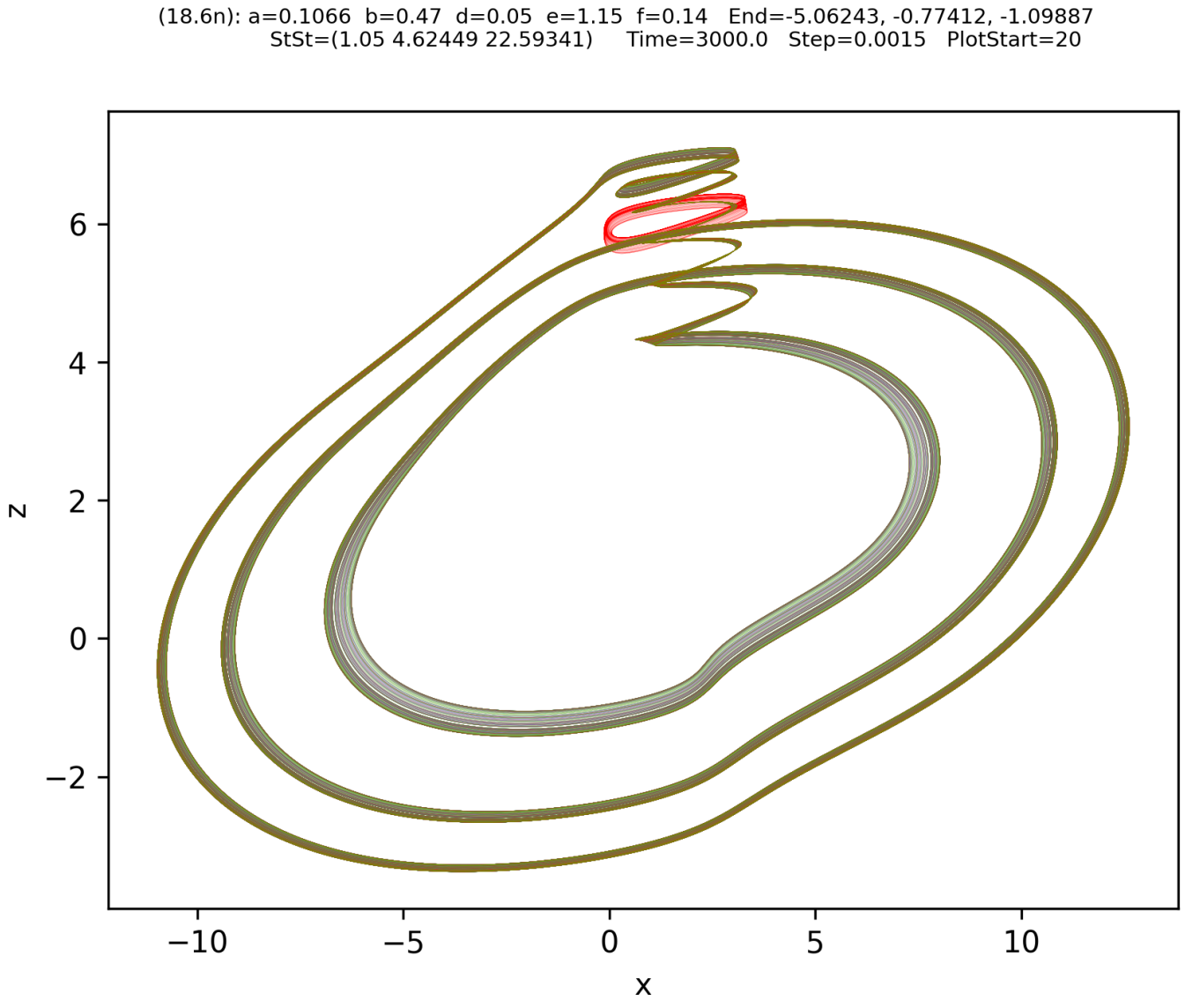
Legende: Chaos im **Beispiel 64**: $\lambda_1 \approx 0.015$ für:
$a = 10553,\ b = 0.25,\ d = 0.2,\ e = 0.44,\ f = 0.25\,.$



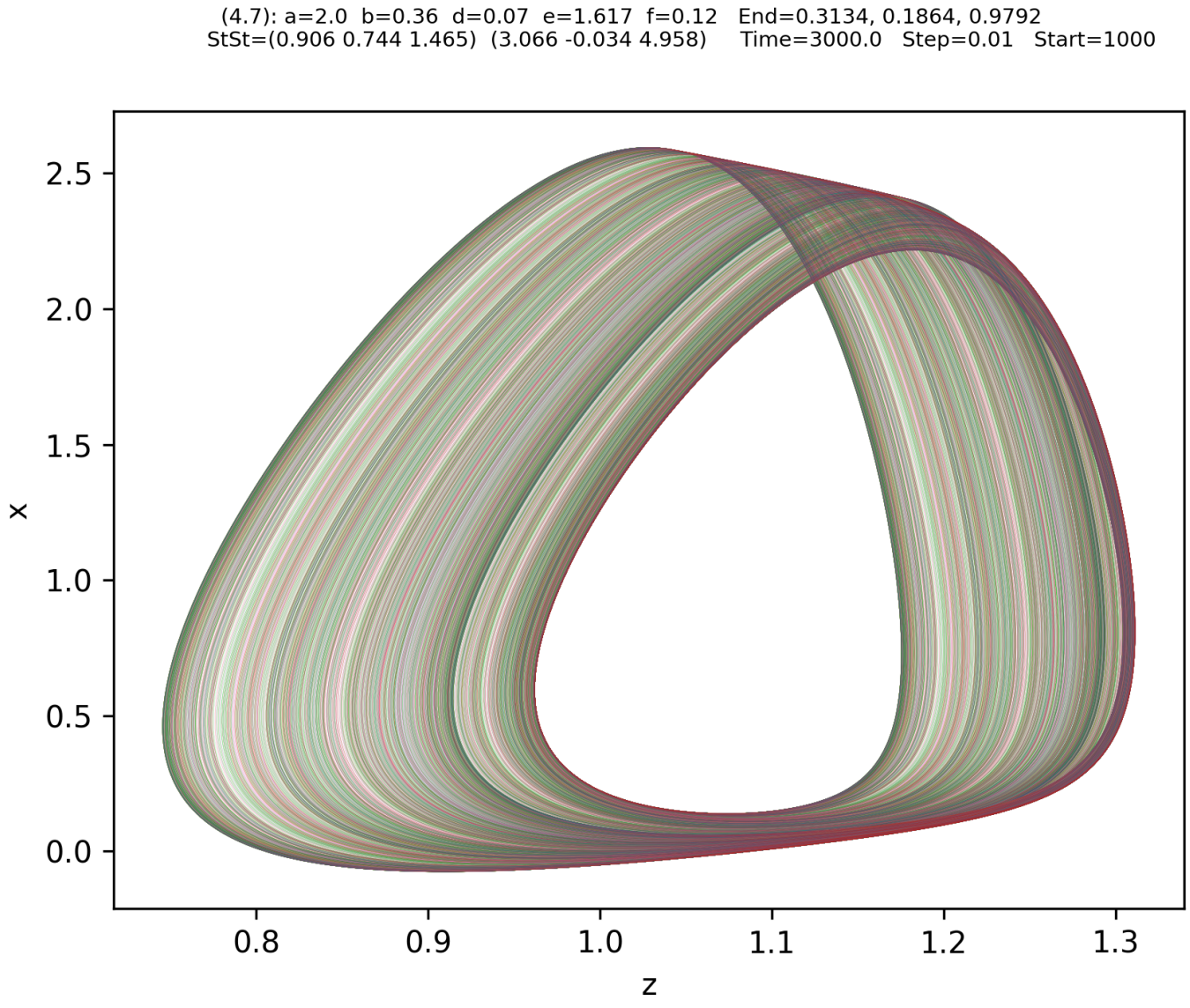
Legende: Chaos im **Beispiel 65**: $\lambda_1 \approx 0.019$ für:
$a = 0.11513,\ b = 0.25,\ d = 0.2,\ e = 0.45,\ f = 0.25\,.$



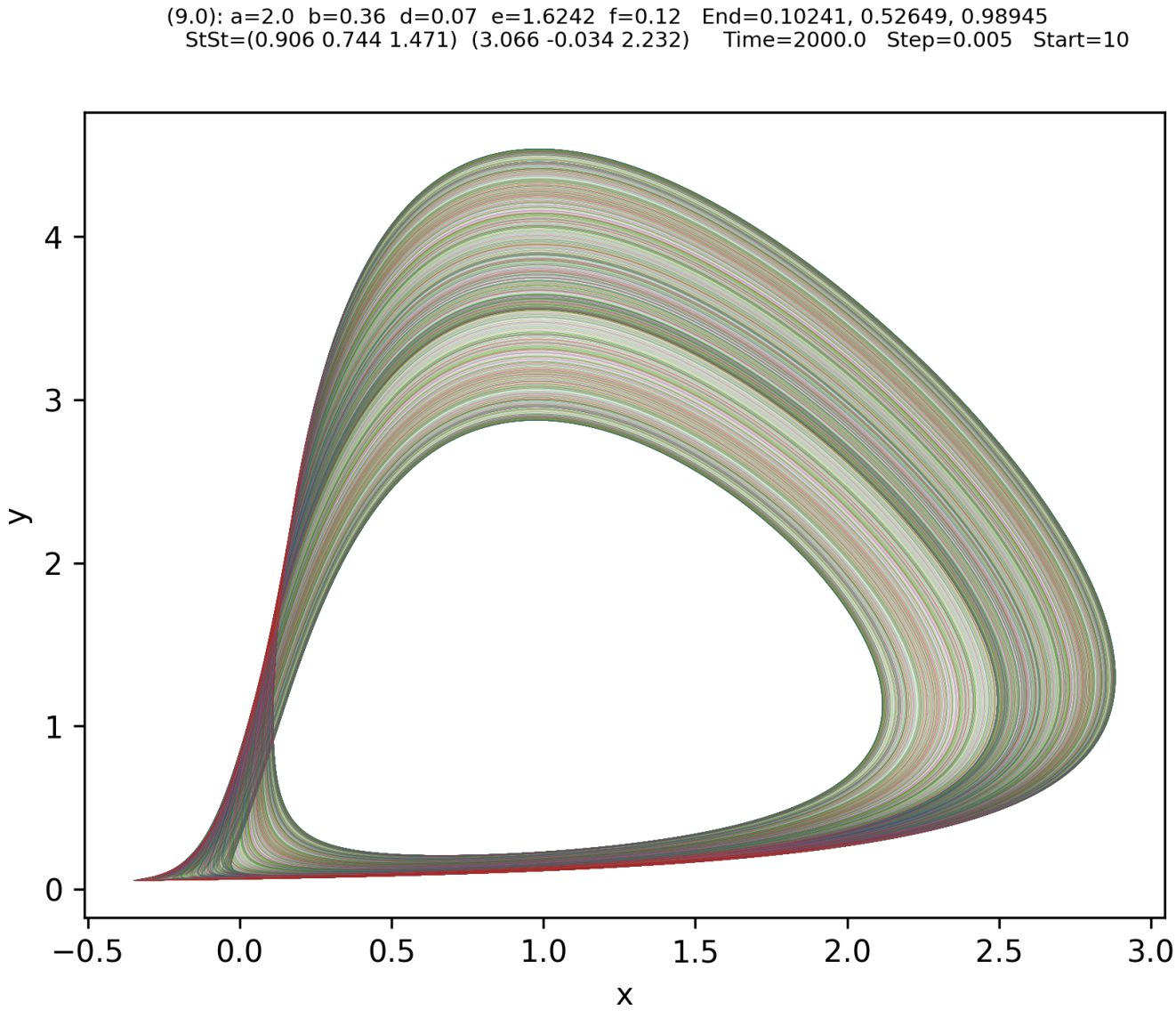
Legende: Doppel-Chaos im **Beispiel 66**: $\lambda_1 \approx 0.049, \lambda_1 \approx 0.004$ für: $a = 0.1066,\ b = 0.47,\ d = 0.05,\ e = 1.15,\ f = 0.14$.



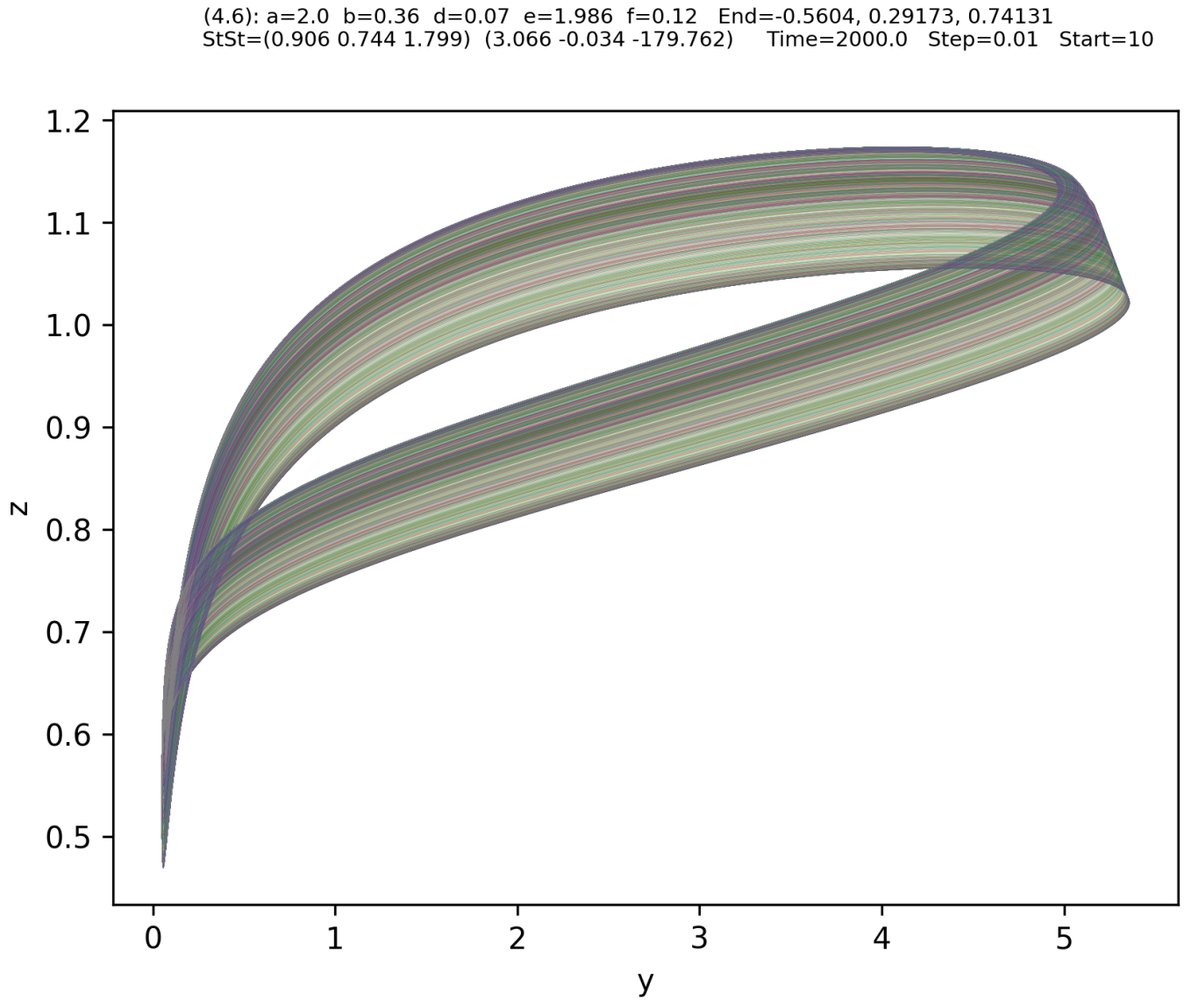
Legende: Chaos im **Beispiel 67**: $\lambda_1 \approx 0.063$ für:
$a = 2.0$, $b = 0.36$, $d = 0.07$, $e = 1.1617$, $f = 0.12$.



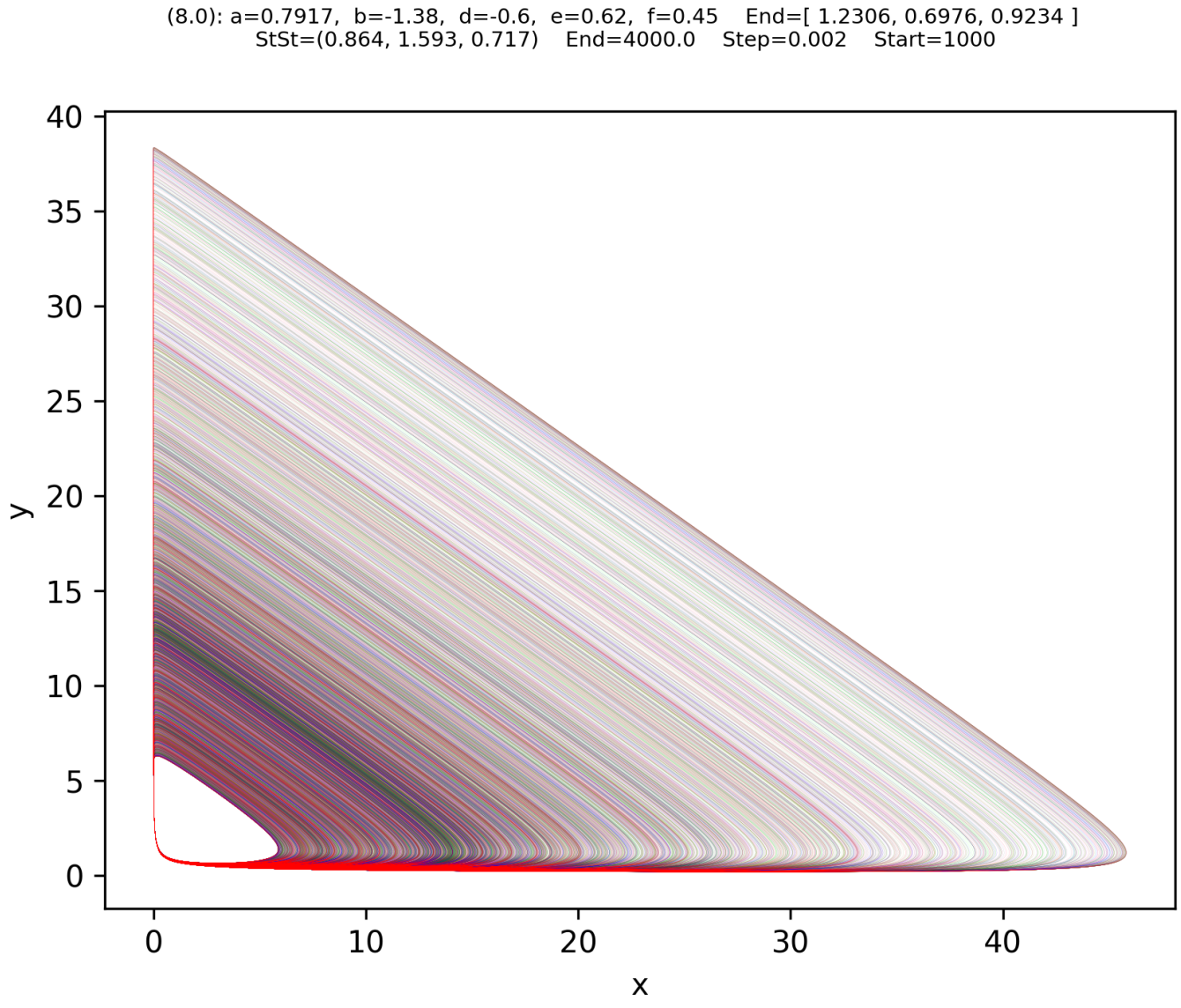
Legende: Chaos im **Beispiel 68**: $\lambda_1 \approx 0.075$ für:
$a = 2.0$, $b = 0.36$, $d = 0.07$, $e = 1.16242$, $f = 0.12$.



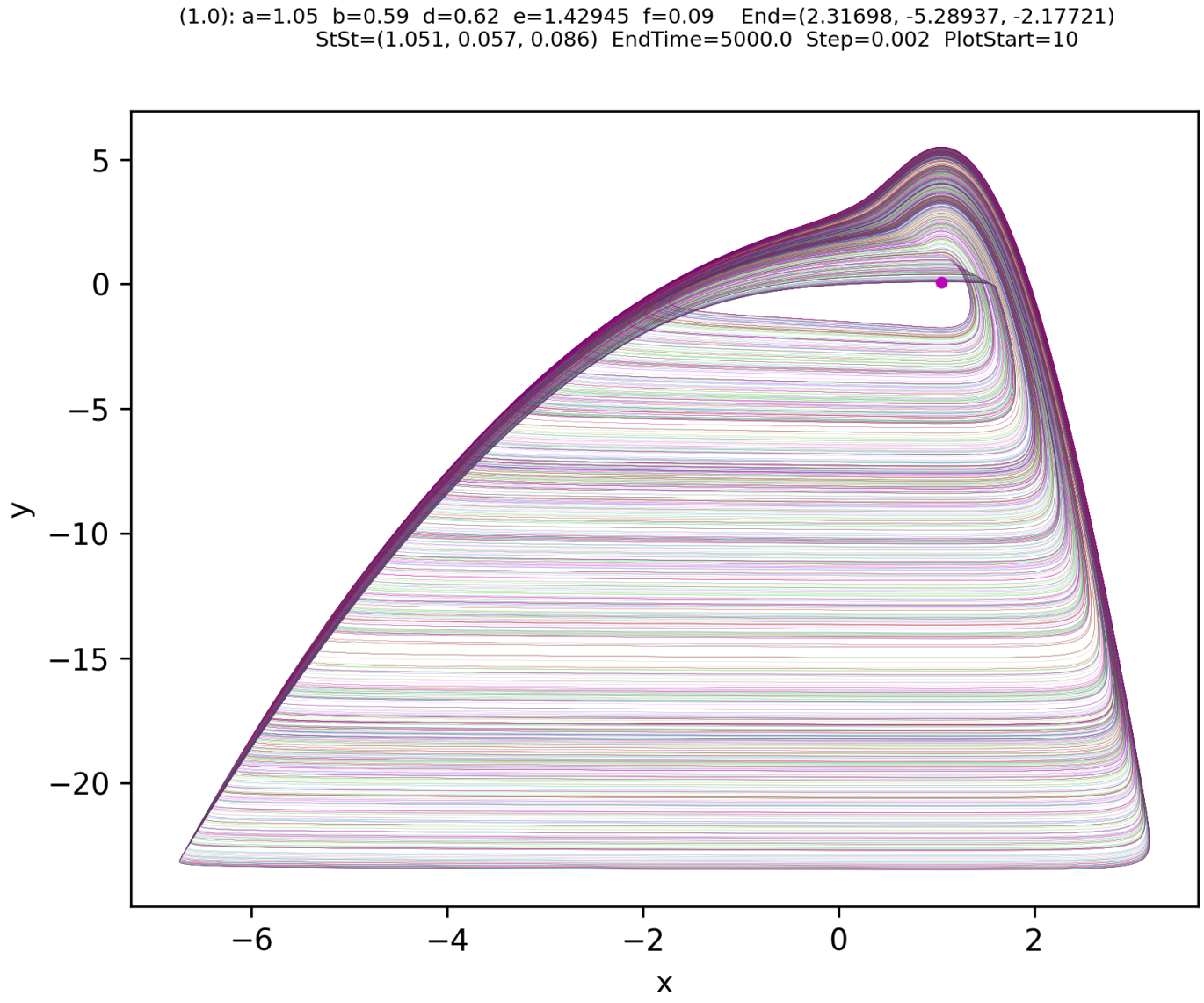
Legende: Chaos im **Beispiel 69**: $\lambda_1 \approx 0.077$ für:
$a = 2.0$, $b = 0.36$, $d = 0.07$, $e = 1.986$, $f = 0.12$.



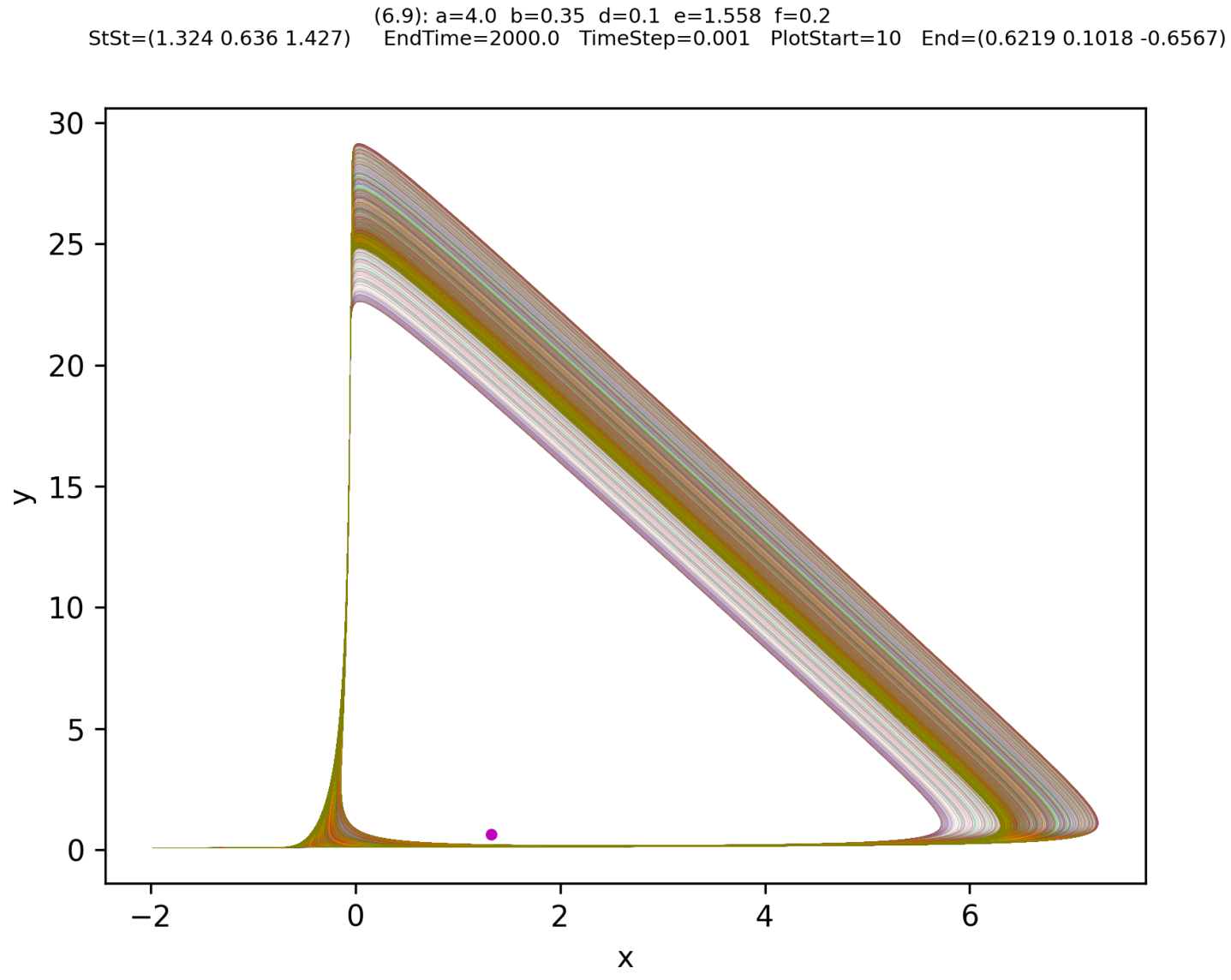
Legende: Chaos im **Beispiel 70**: $\lambda_1 \approx 0.069$ für:
$a = 0.7917$, $b = -1.38$, $d = -0.6$, $e = 0.62$, $f = 0.45$.



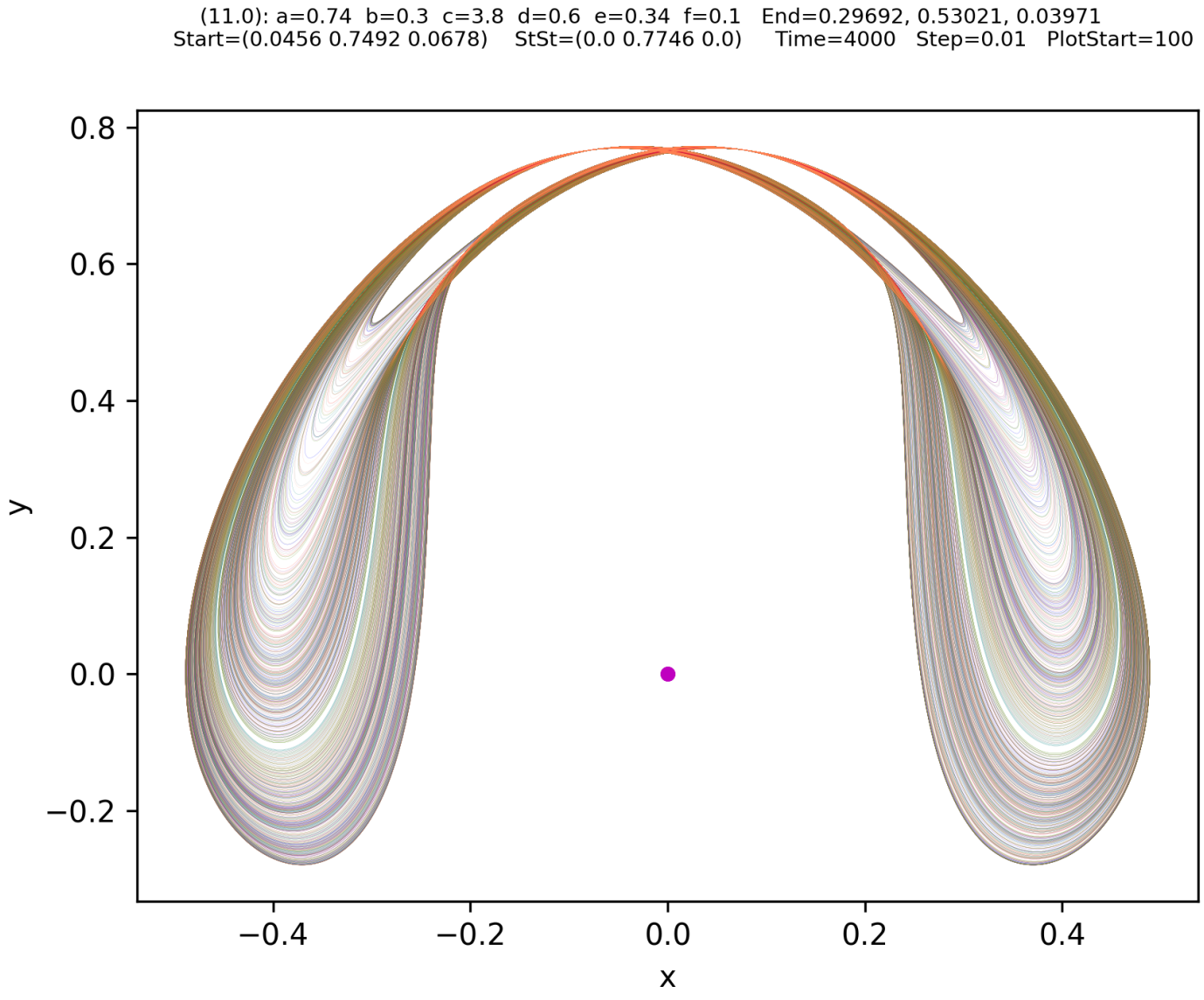
Legende: Chaos im **Beispiel 71**: $\lambda_1 \approx 0.012$ für:
$a = 1.05$, $b = 0.59$, $d = 0.62$, $e = 1.42945$, $f = 0.09$.



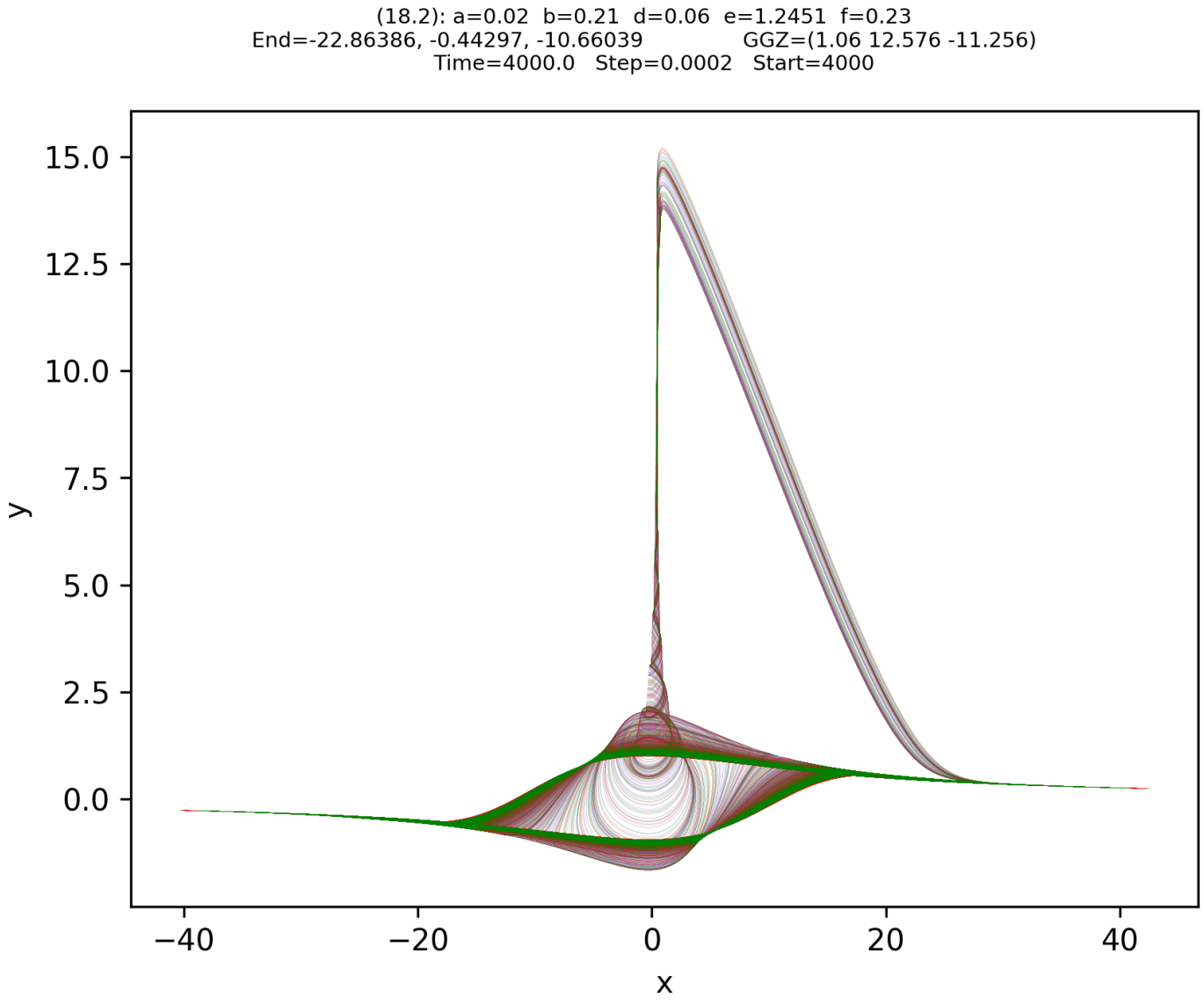
Legende: Chaos im **Beispiel 72**: $\lambda_1 \approx 0.126$ für:
$a = 4.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 1.558$, $f = 0.2$.



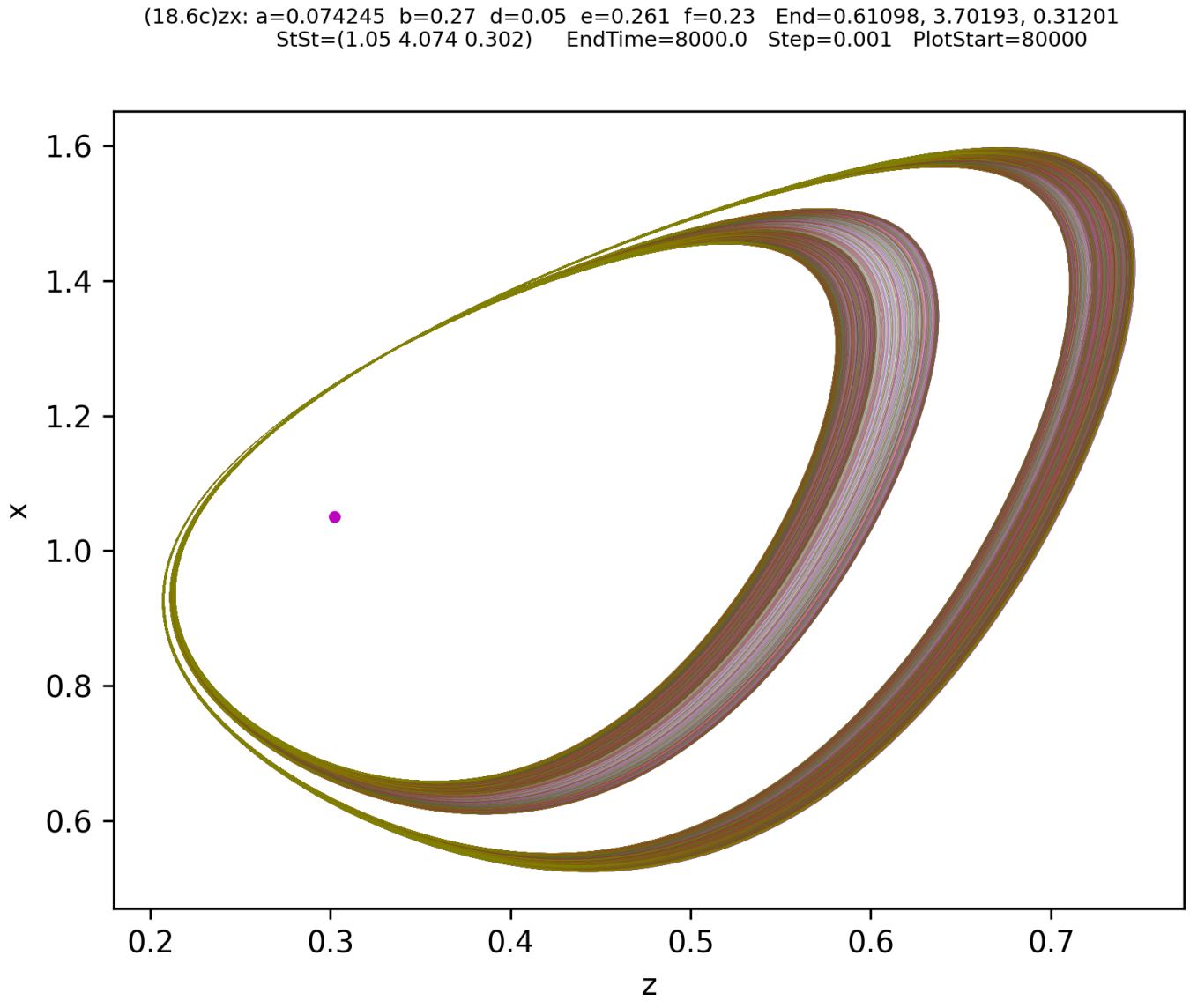
Legende: Chaos im **Beispiel 73**: $\lambda_1 \approx 0.014$ für:
$a = 0.74$, $b = 0.3$, $d = 0.6$, $e = 0.34$, $f = 0.1$.



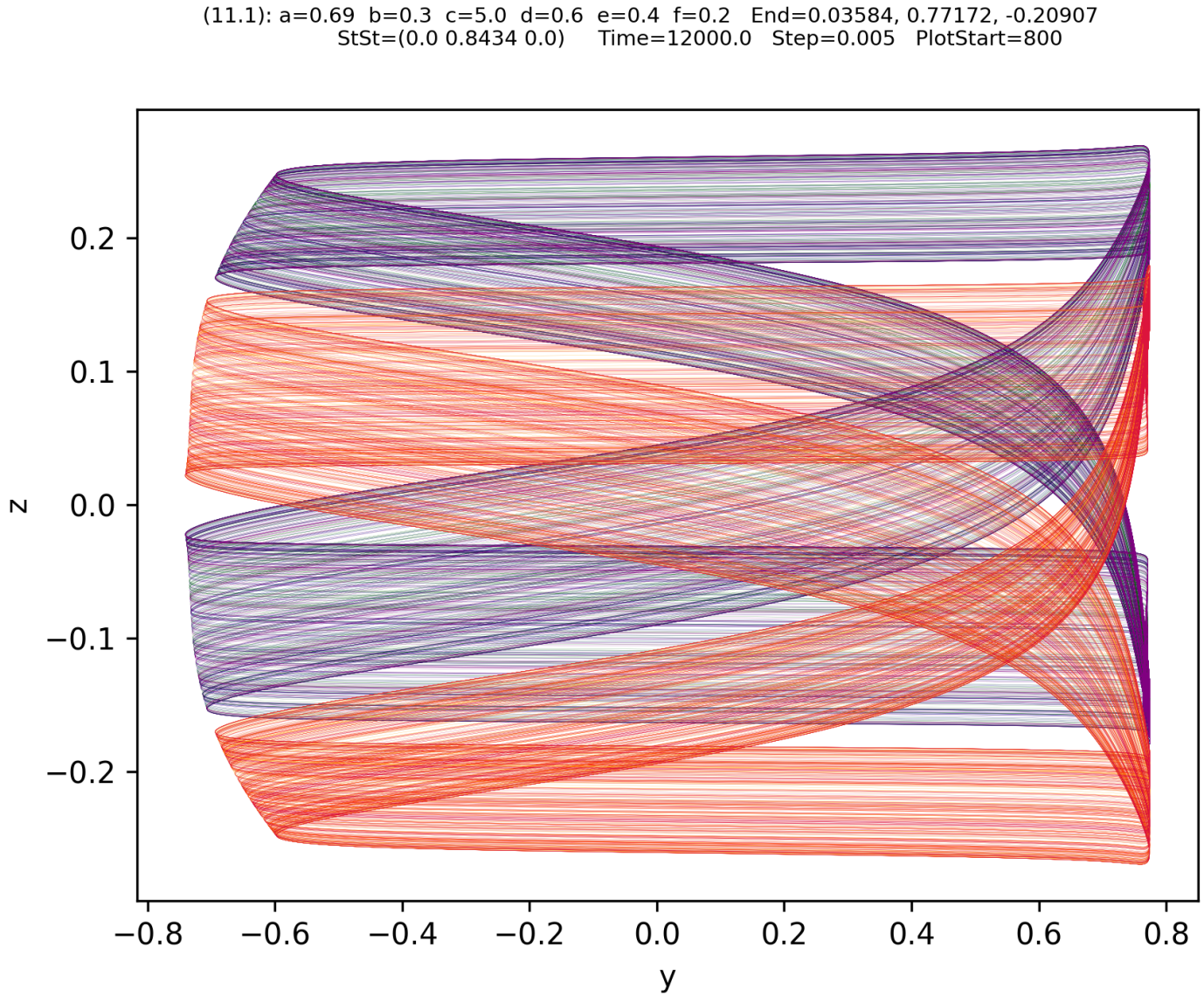
Legende: Chaos im **Beispiel 74**: $\lambda_1 \approx 0.007$ für:
$a = 0.02,\ b = 0.21,\ d = 0.06,\ e = 1.2451,\ f = 0.23$.



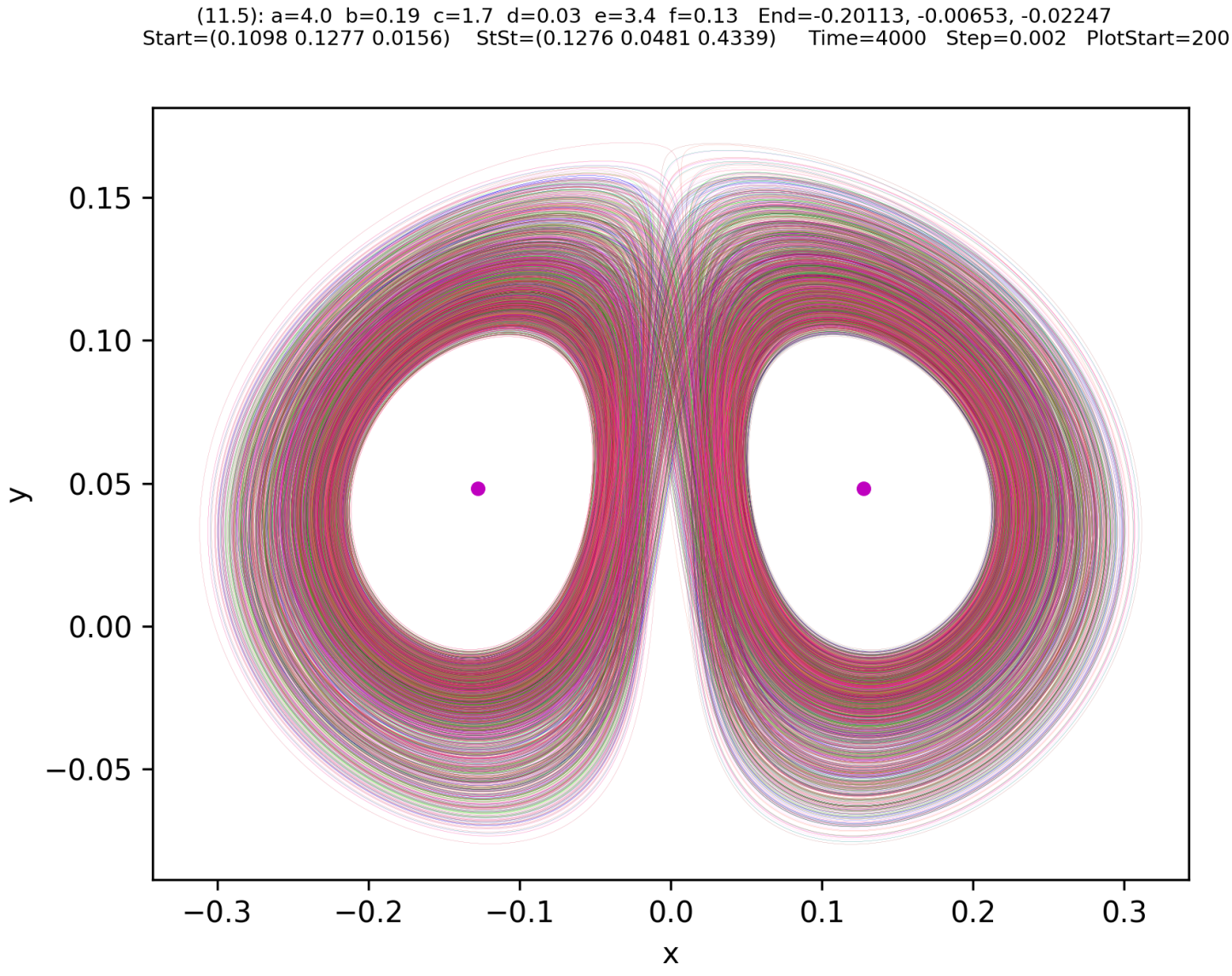
Legende: Chaos im **Beispiel 75**: $\lambda_1 \approx 0.012$ für:
$a = 0.074245$, $b = 0.27$, $d = 0.05$, $e = 0.261$, $f = 0.23$.



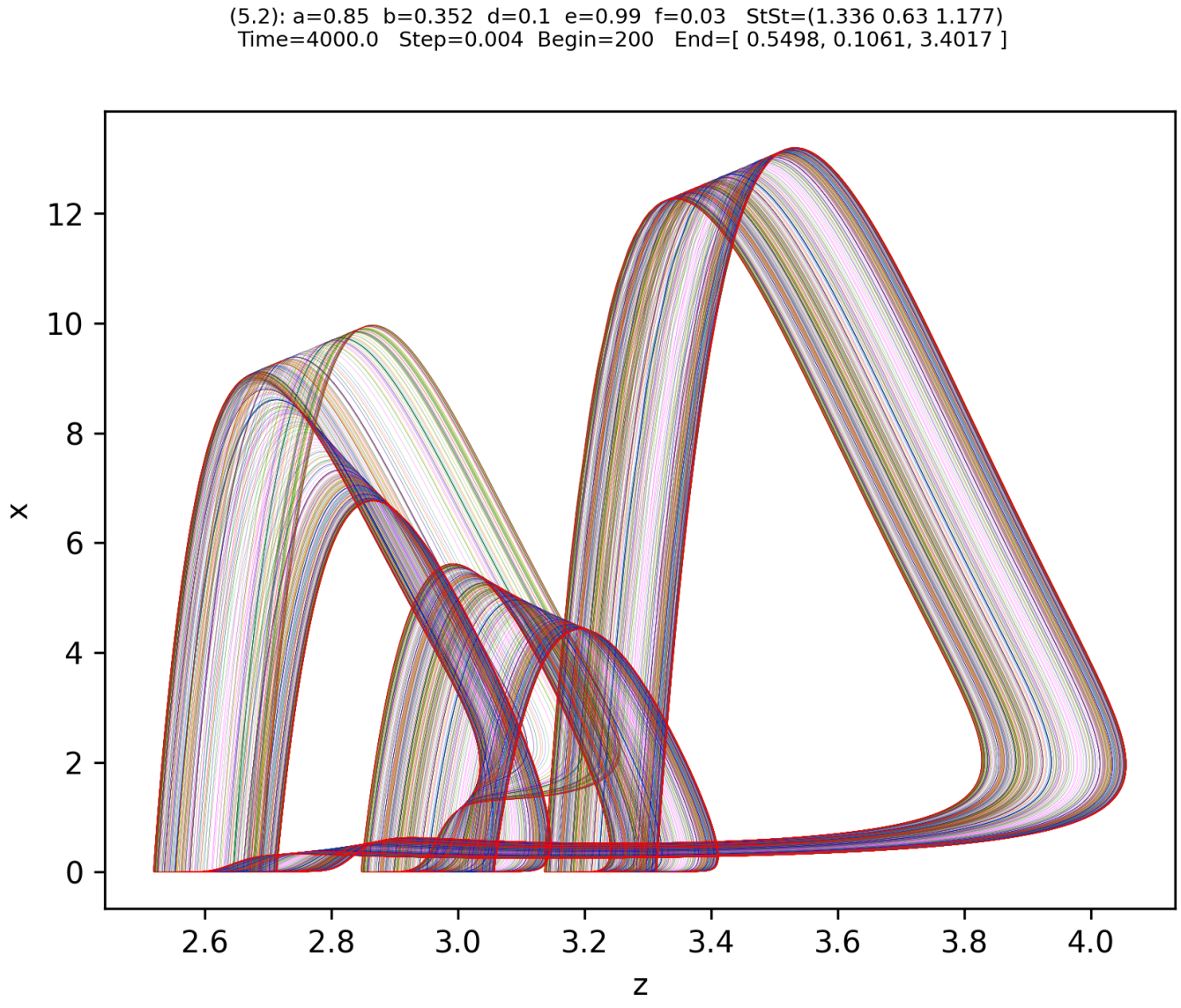
Legende: Chaos im **Beispiel 76**: $\lambda_1 \approx 0.005$ für:
$a = 0.69$, $b = 0.3$, $c = 5.0$, $d = 0.6$, $e = 0.4$, $f = 0.2$.
Doppelchaos wegen der Symmetrien in den Differentialgleichungen.



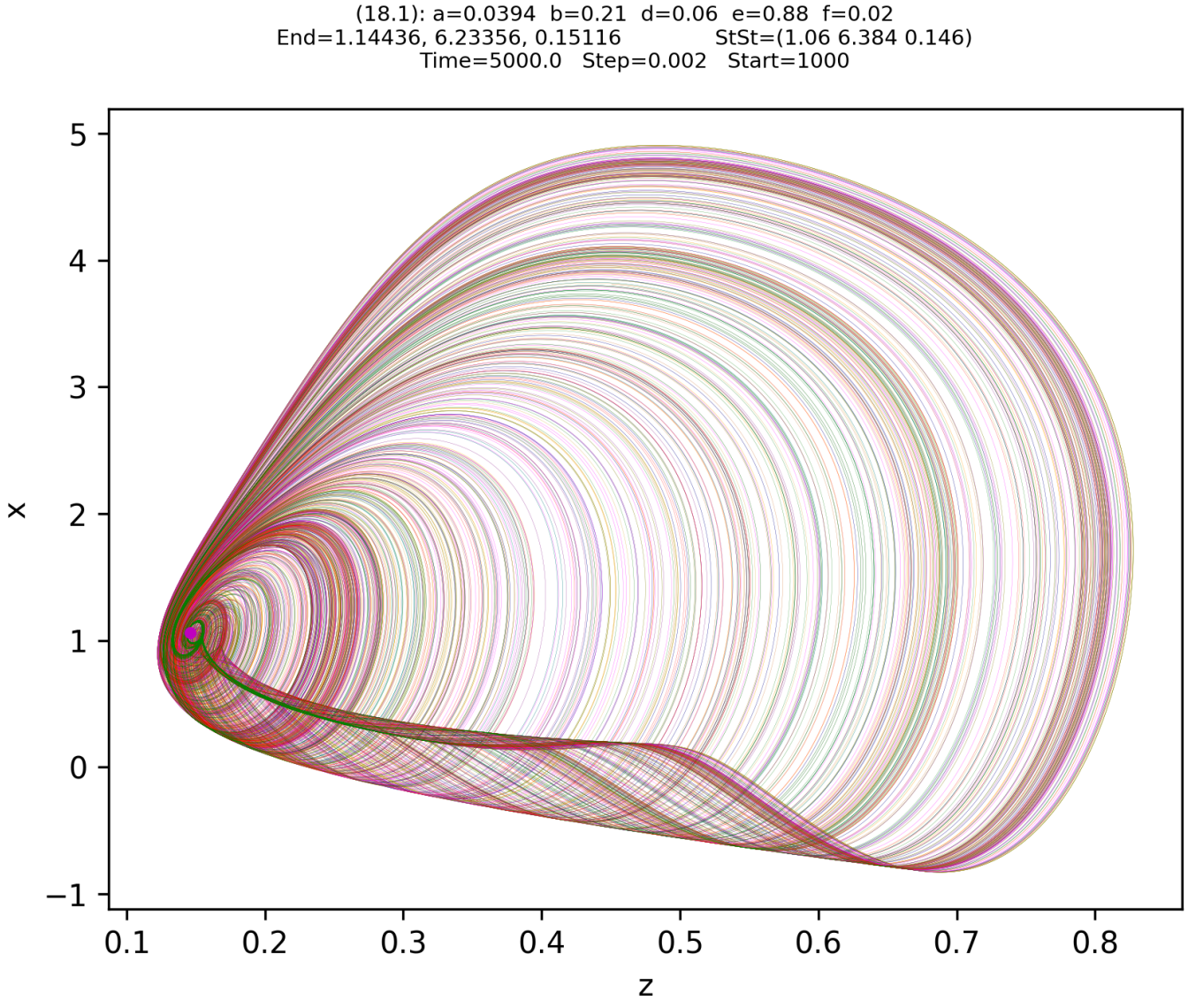
Legende: Chaos im **Beispiel 77**: $\lambda_1 \approx 0.012$ für:
$a = 0.69$, $b = 0.3$, $c = 5.0$, $d = 0.6$, $e = 0.4$ und $f = 0.1$.



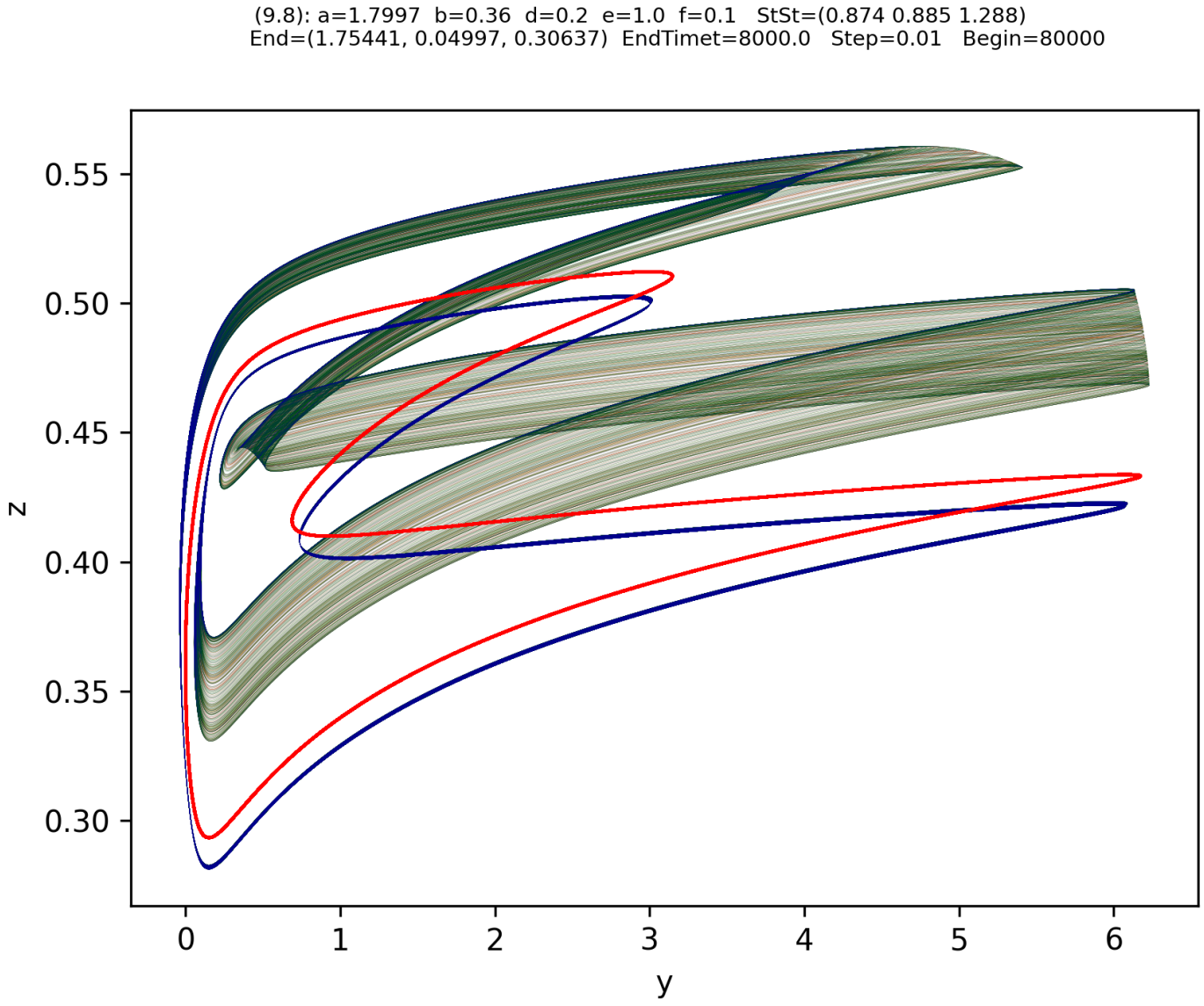
Legende: Chaos im **Beispiel 78**: $\lambda_1 \approx 0.0425$ für:
$a = 0.85$, $b = 0.352$, $d = 0.1$, $e = 0.99$ und $f = 0.03$.



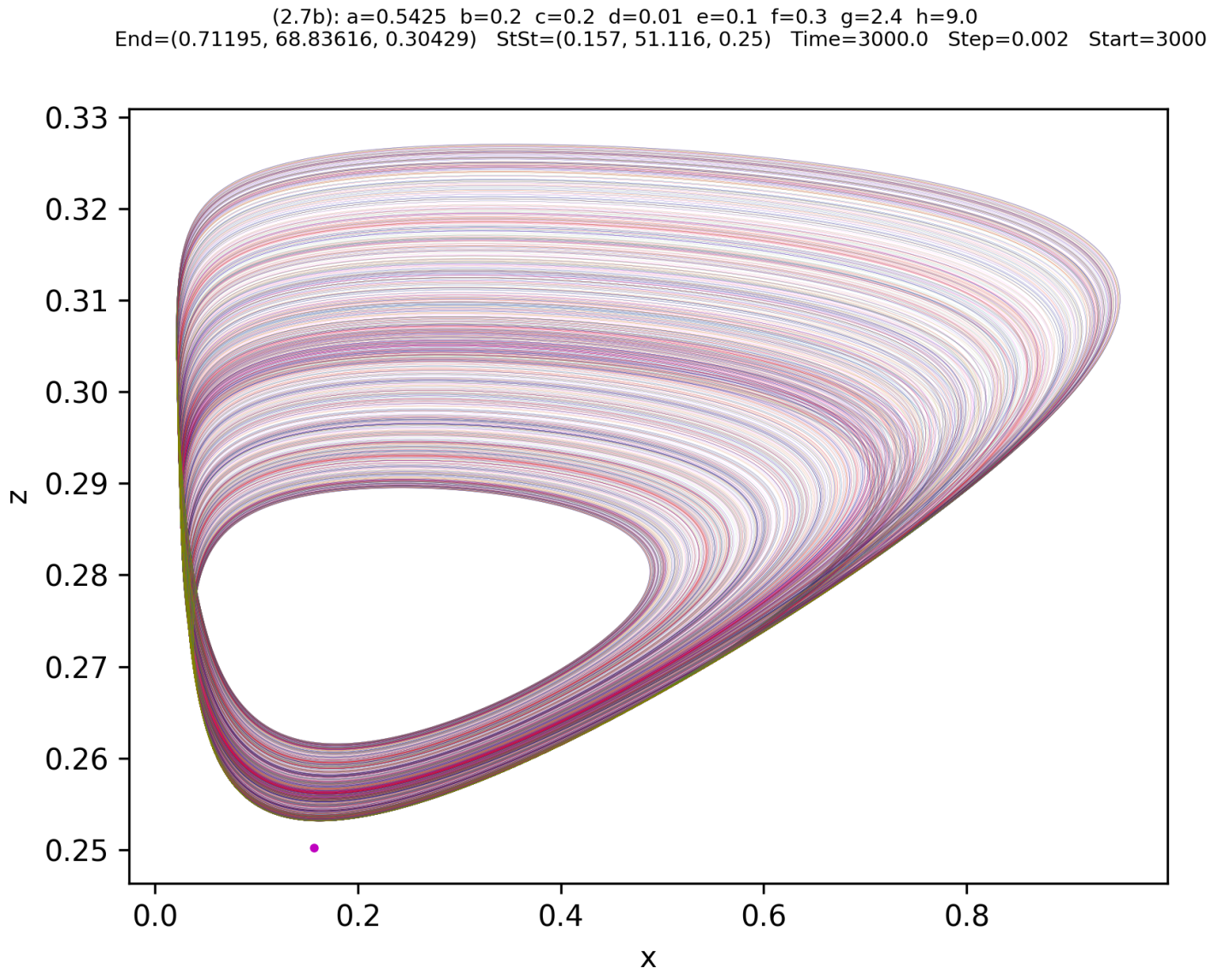
Legende: Chaos im **Beispiel 79**: $\lambda_1 \approx 0.014$ für:
$a = 0.0394$, $b = 0.21$, $d = 0.06$, $e = 0.88$ und $f = 0.02$.



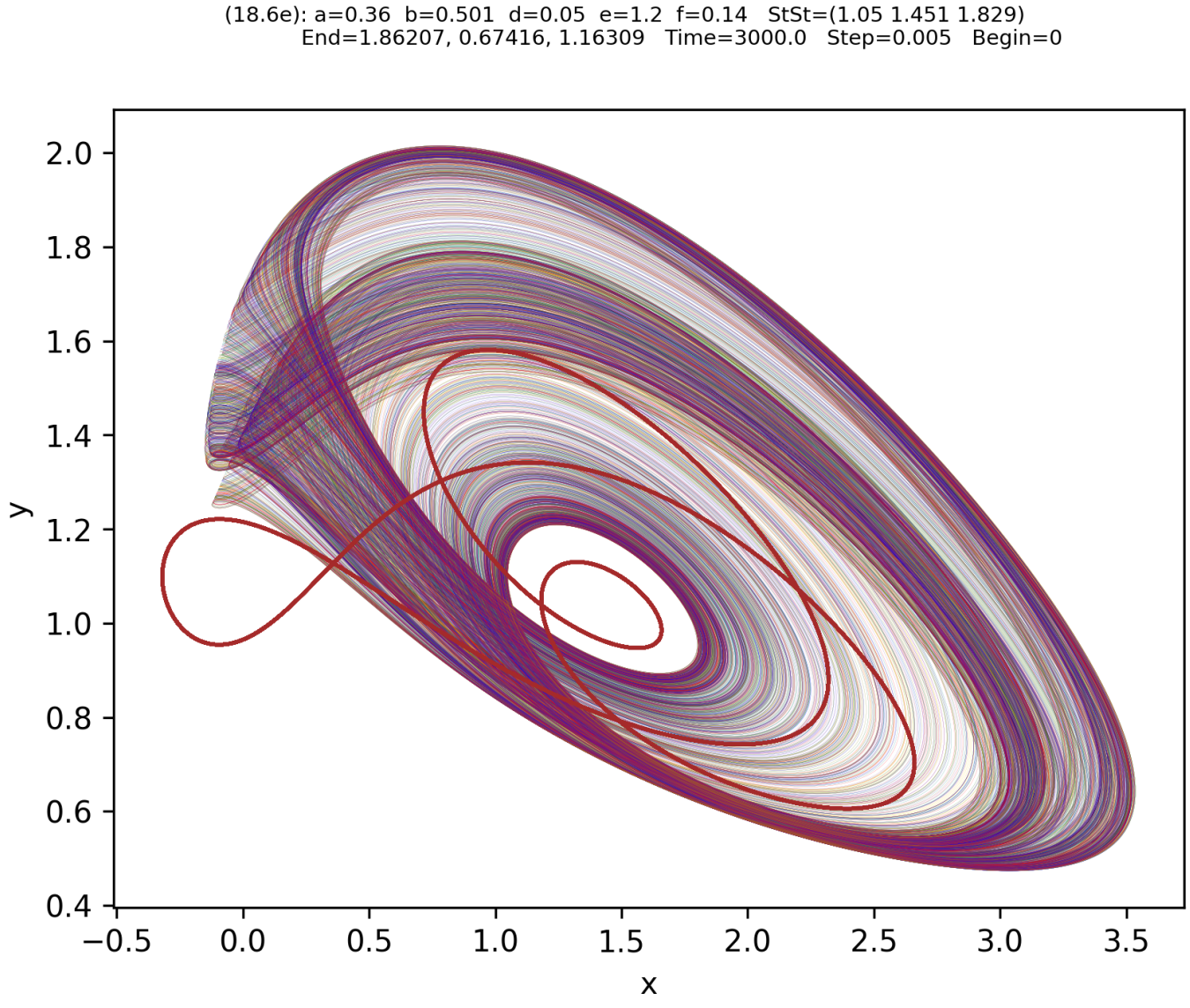
Legende: Chaos im **Beispiel 80**: $\lambda_1 \approx 0.017$ für:
$a = 1.7997$, $b = 0.36$, $d = 0.2$, $e = 1.0$ und $f = 0.1$.
Koexistenz mit einem benachbarten Grenzzyklus (rot).



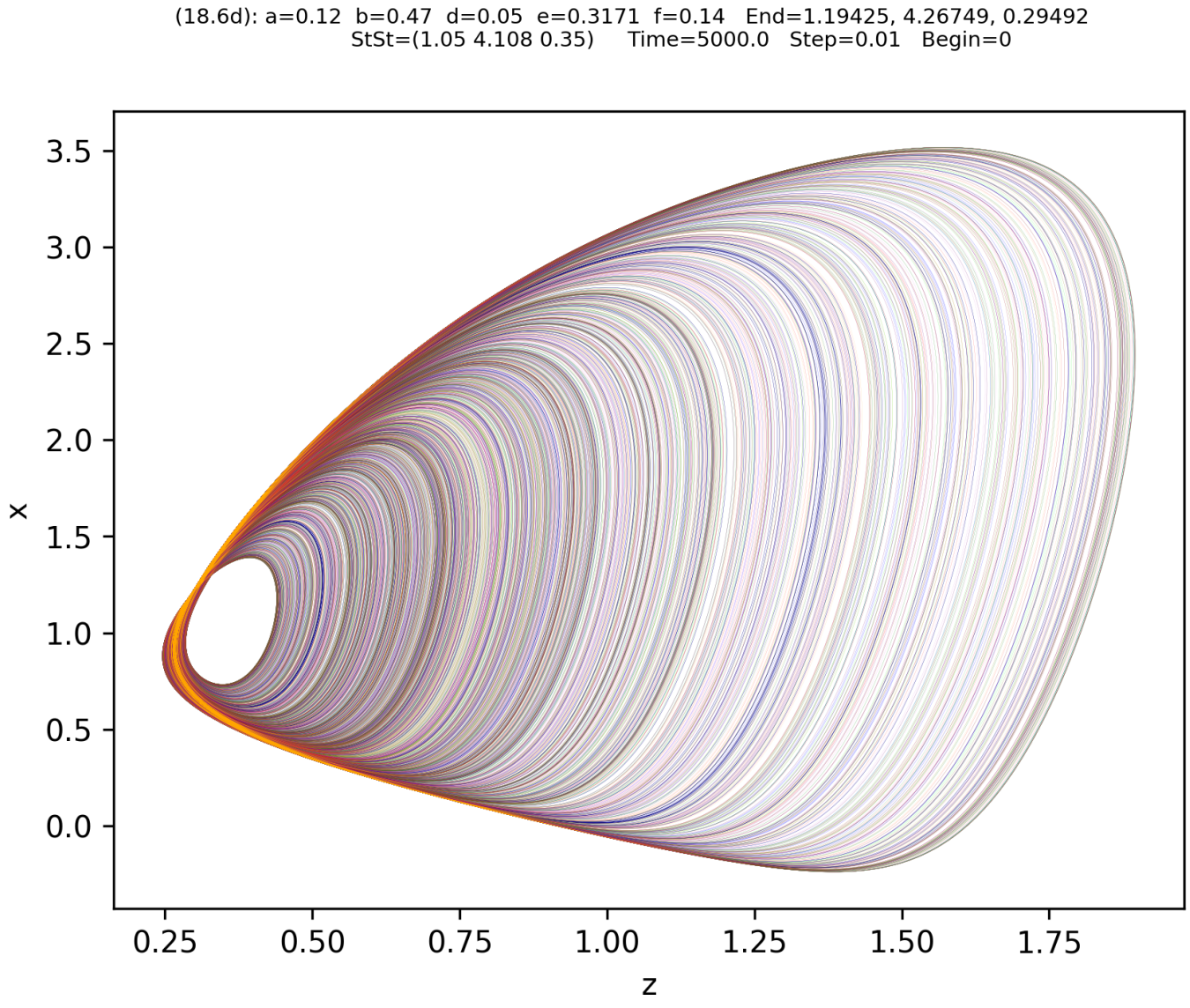
Legende: Chaos im **Beispiel 81**: $\lambda_1 \approx 0.022$ für: $a = 0.5425$
$b = 0.2$, $c = 0.2$, $d = 0.01$, $e = 1.0$, $f = 0.3$, $g = 2.4$, $h = 9.0$.



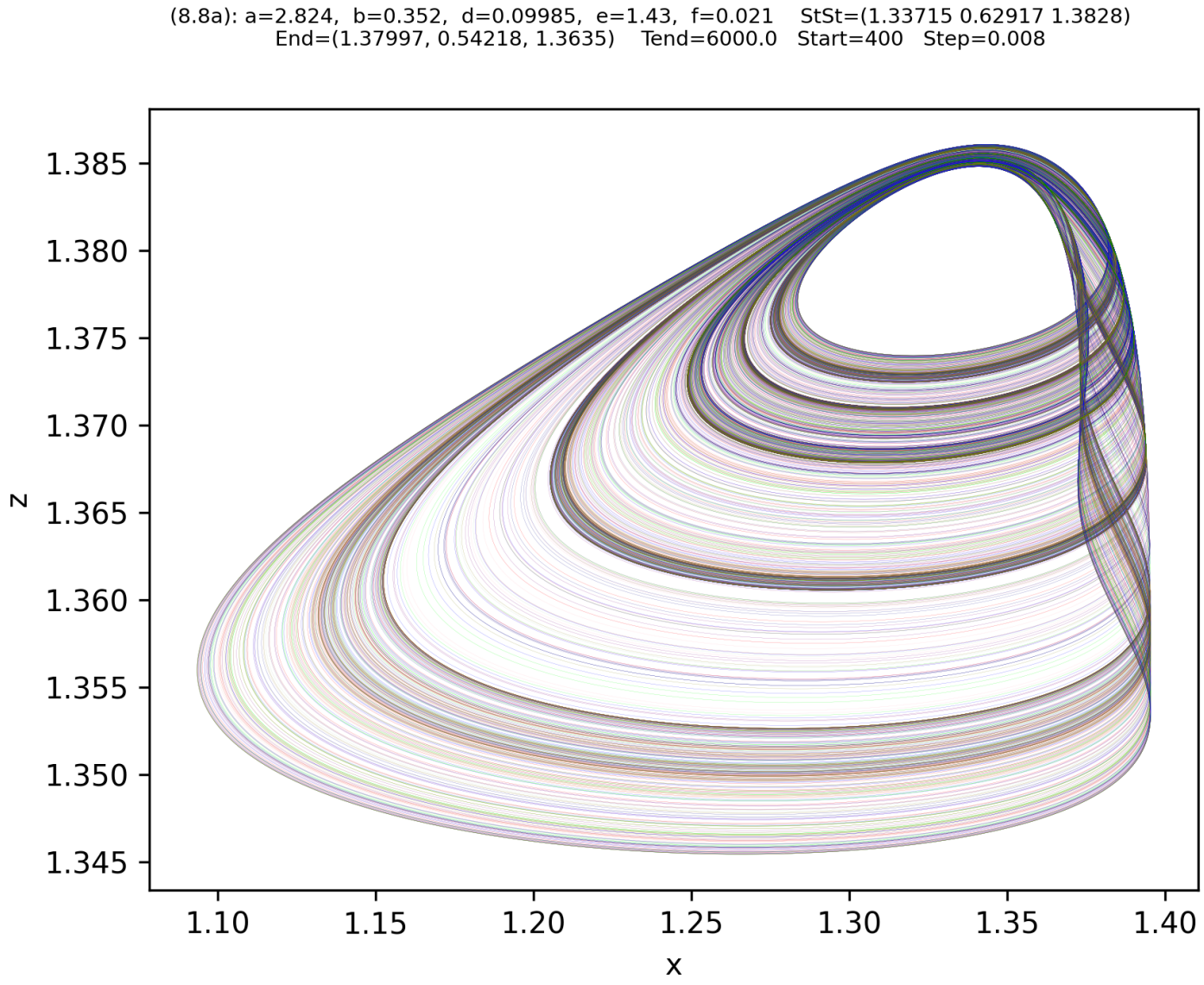
Legende: Chaos im **Beispiel 82**: $\lambda_1 \approx 0.044$ für:
$a = 0.36$, $b = 0.501$, $d = 0.05$, $e = 1.2$ und $f = 0.14$, .
Koexistenz mit einem verdrehten Grenzzyklus (braun).



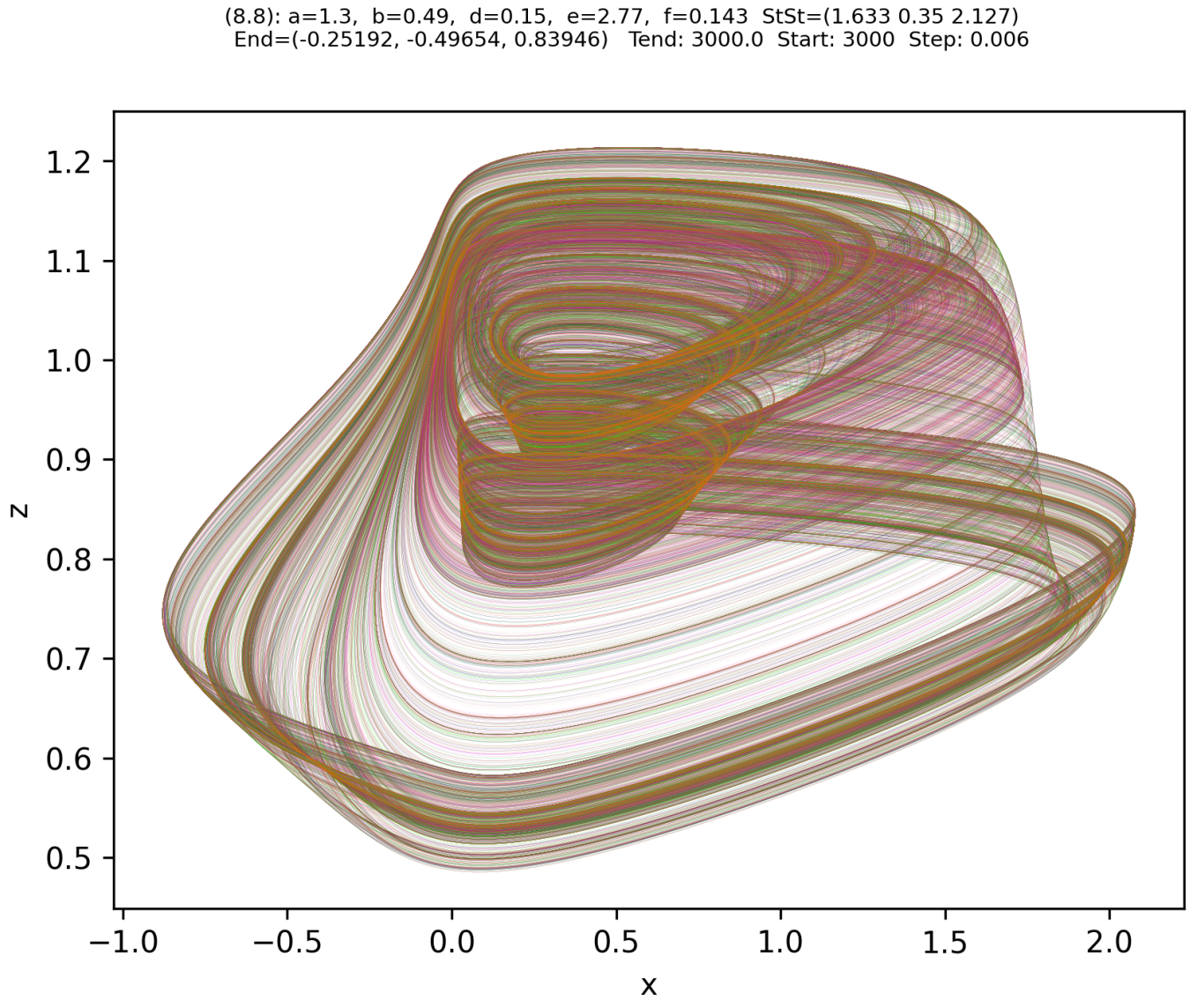
Legende: Chaos im **Beispiel 83**: $\lambda_1 \approx 0.016$ für:
$a = 0.12$, $b = 0.47$, $d = 0.05$, $e = 0.3171$ und $f = 0.14$.



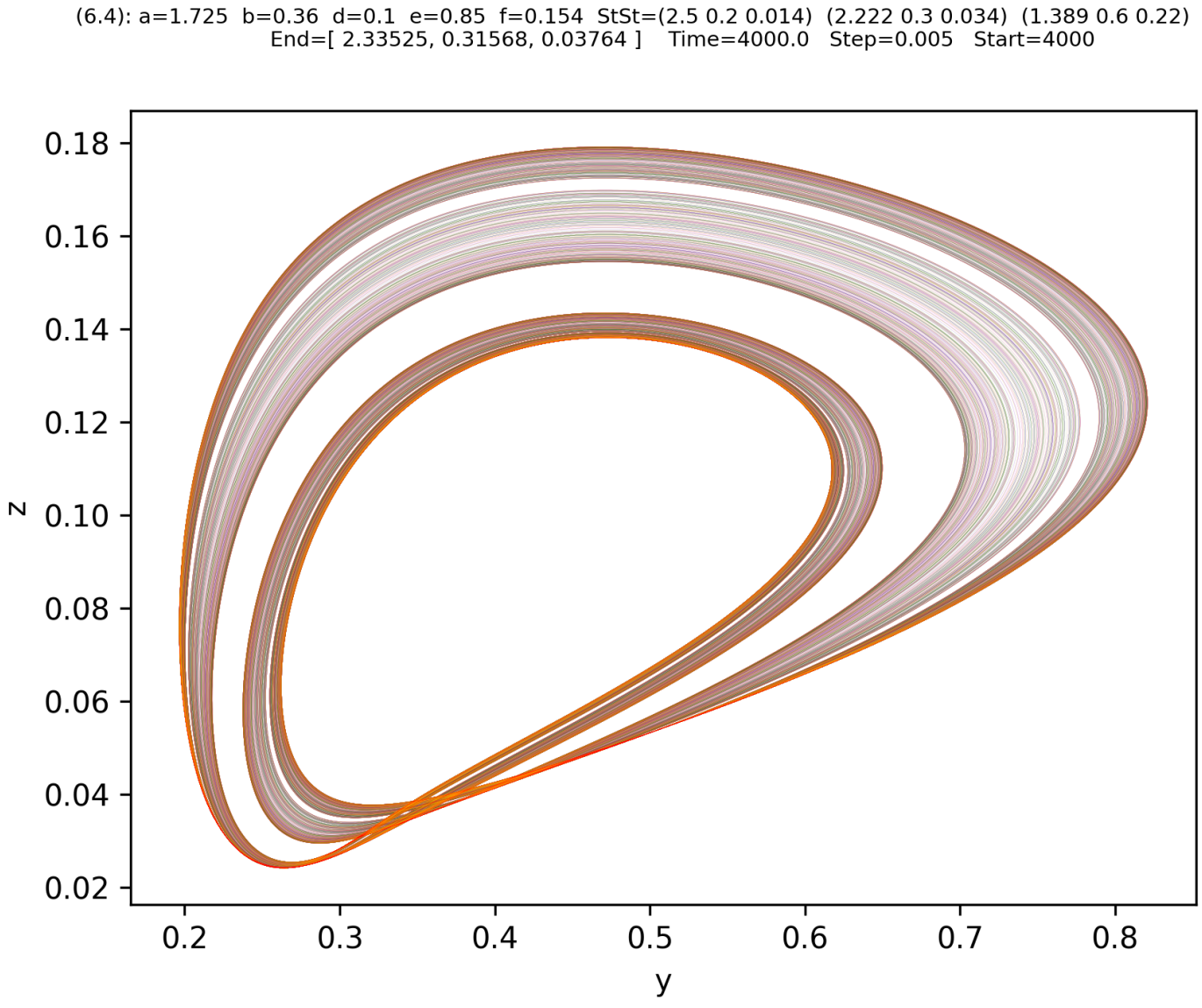
Legende: Chaos im **Beispiel 84**: $\lambda_1 \approx 0.007$ für:
$a = 2.824$, $b = 0.352$, $d = 0.09985$, $e = 1.43$ und $f = 0.021$.



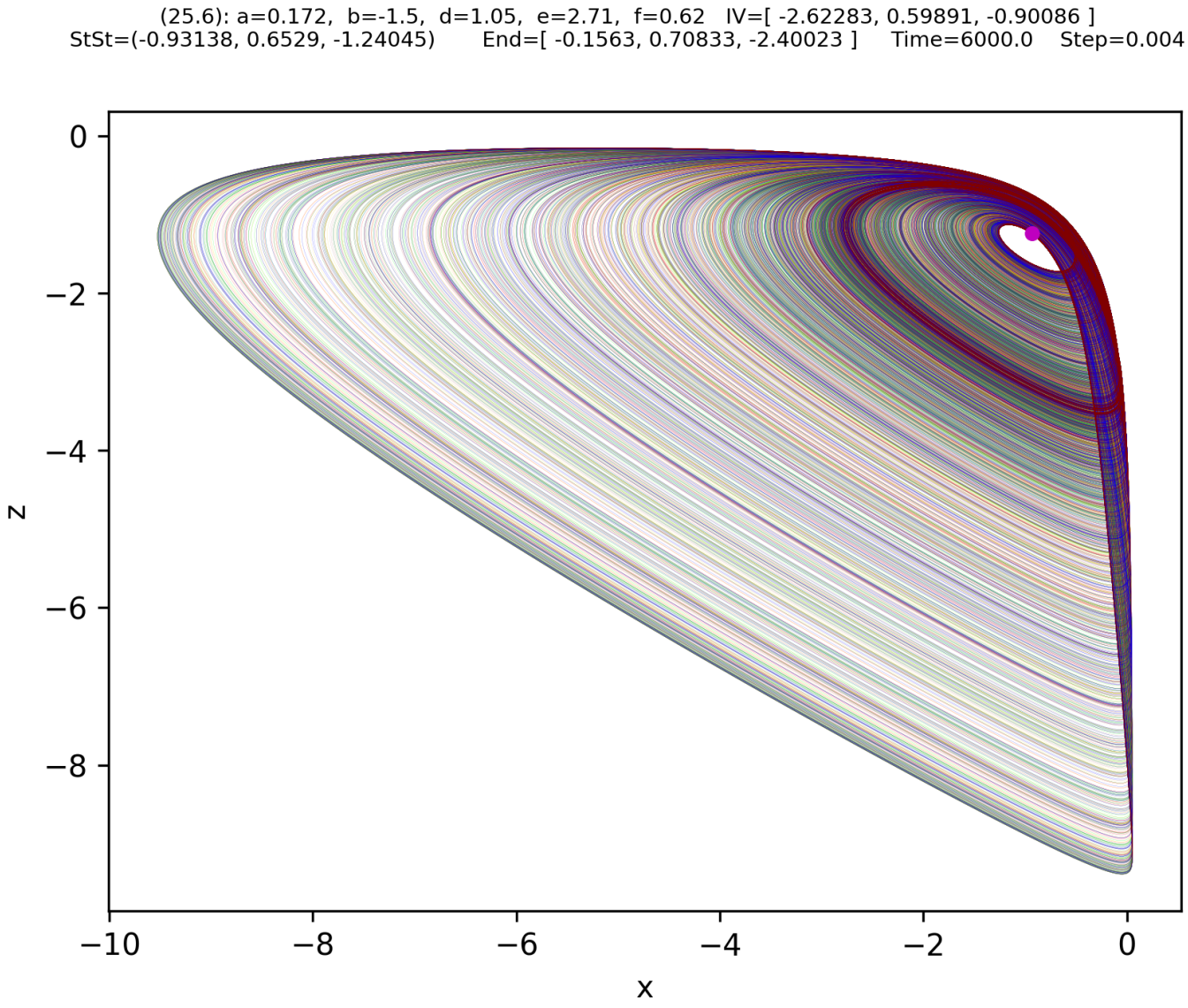
Legende: Chaos im **Beispiel 85**: $\lambda_1 \approx 0.079$ für:
$a = 1.3$, $b = 0.49$, $d = 0.15$, $e = 2.77$ und $f = 0.143$.



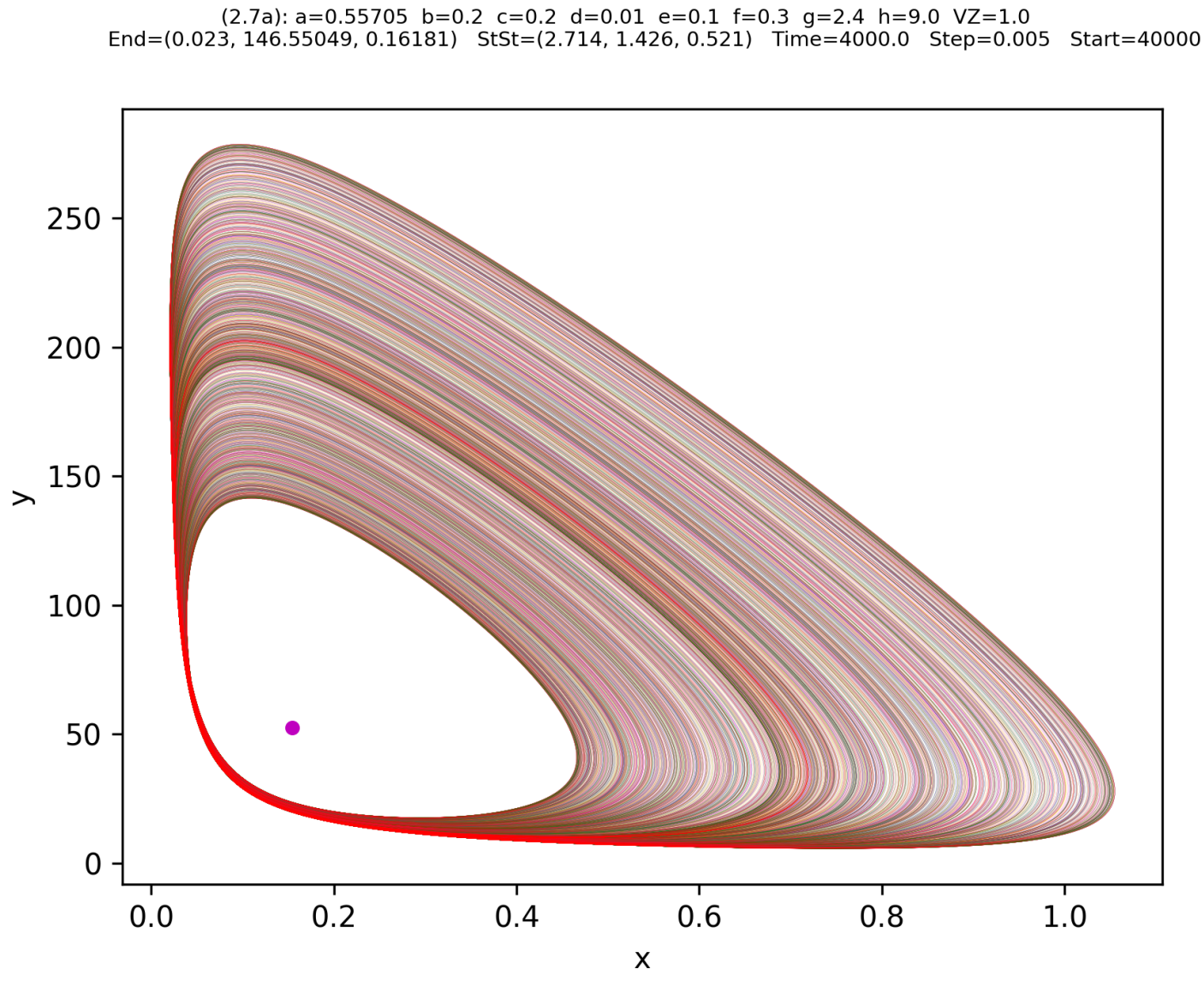
Legende: Chaos im **Beispiel 86**: $\lambda_1 \approx 0.006$ für:
$a = 1.725$, $b = 0.36$, $d = 0.1$, $e = 0.85$ und $f = 0.154$.



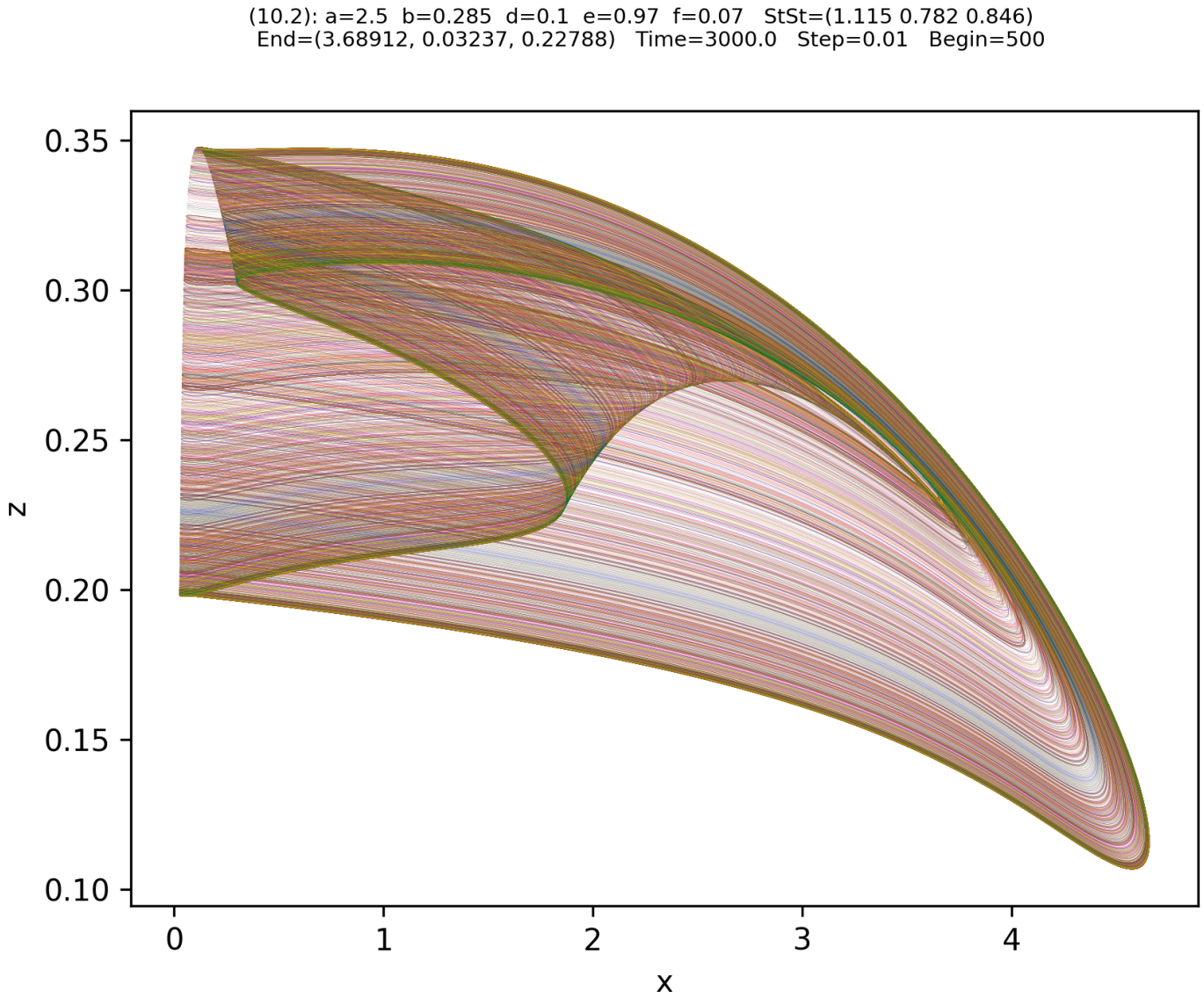
Legende: Chaos im **Beispiel 86**: $\lambda_1 = 0.035$ für
$a = 0.172,\ b = -1.5,\ d = 1.05,\ e = 2.71,\ f = 0.62$.



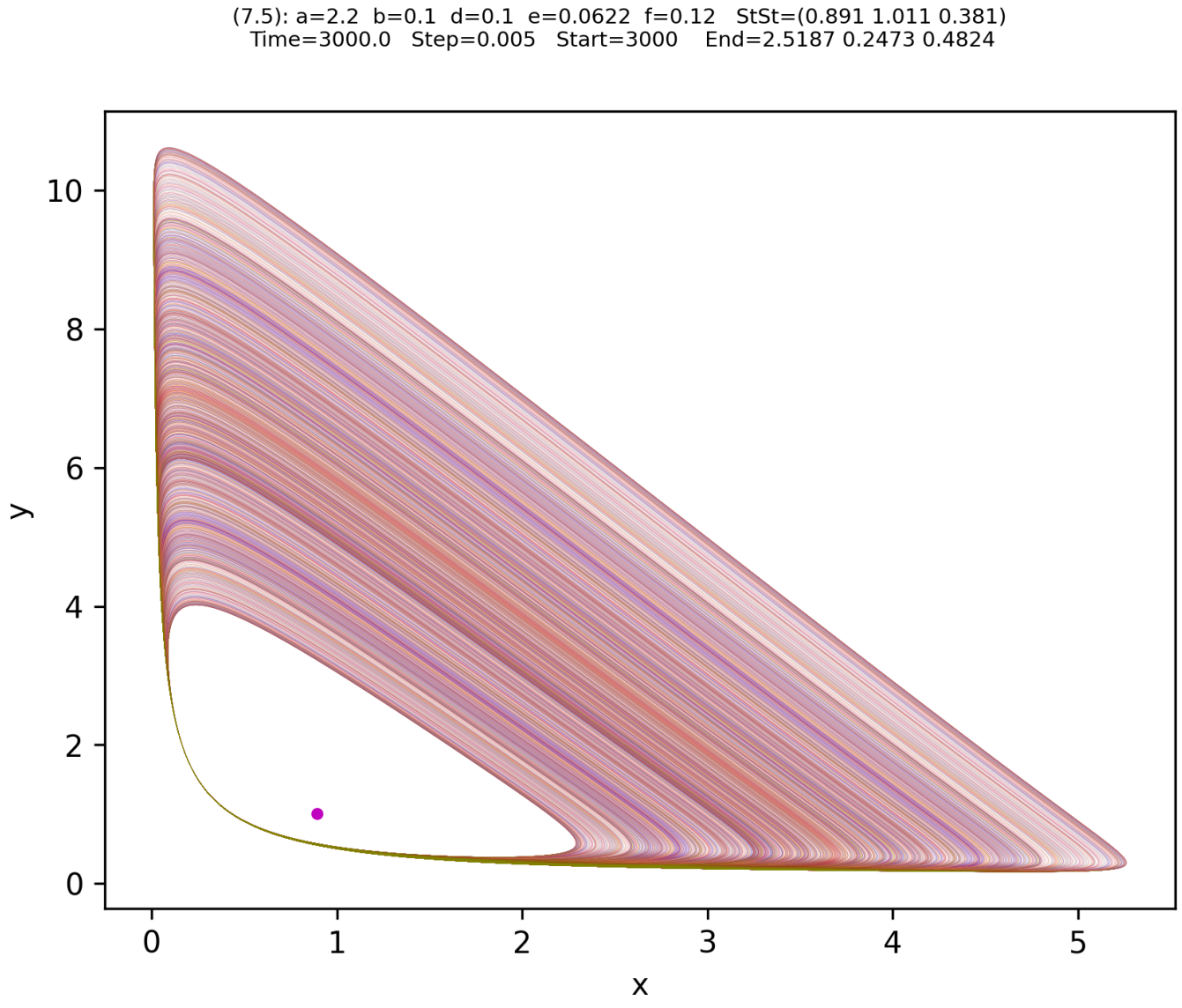
Legende: Chaos im **Beispiel 87**: $\lambda_1 \approx 0.024$ für: $a = 0.55705$, $b = 0.2$, $c = 0.2, d = 0.01$, $e = 0.1$, $f = 0.3$, $g = 2.4$, $h = 0.1$.



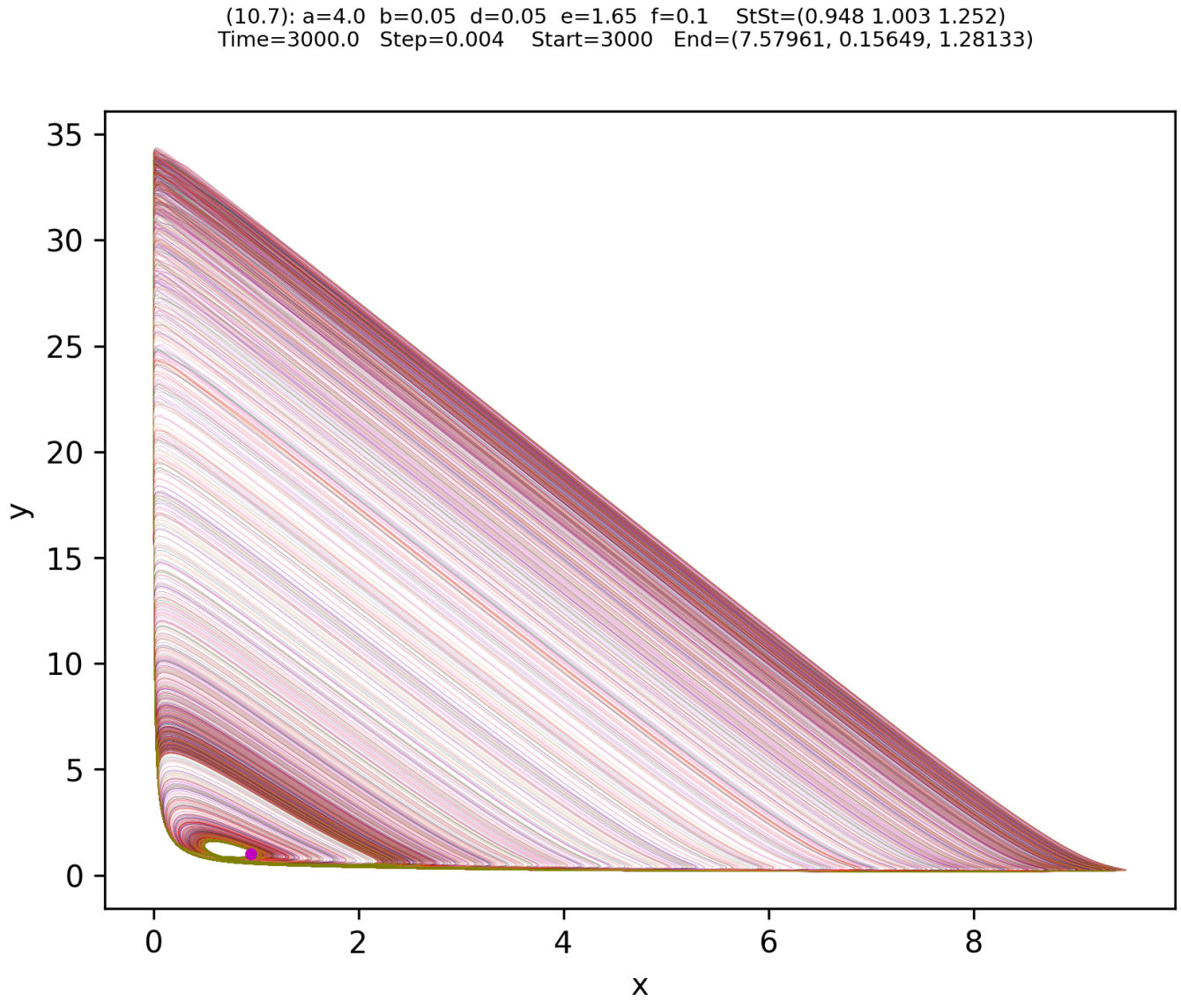
Legende: Chaos im **Beispiel 88**: $\lambda_1 \approx 0.030$ für:
$a = 2.5$, $b = 0.285$, $d = 0.1$, $e = 0.97$ und $f = 0.07$.



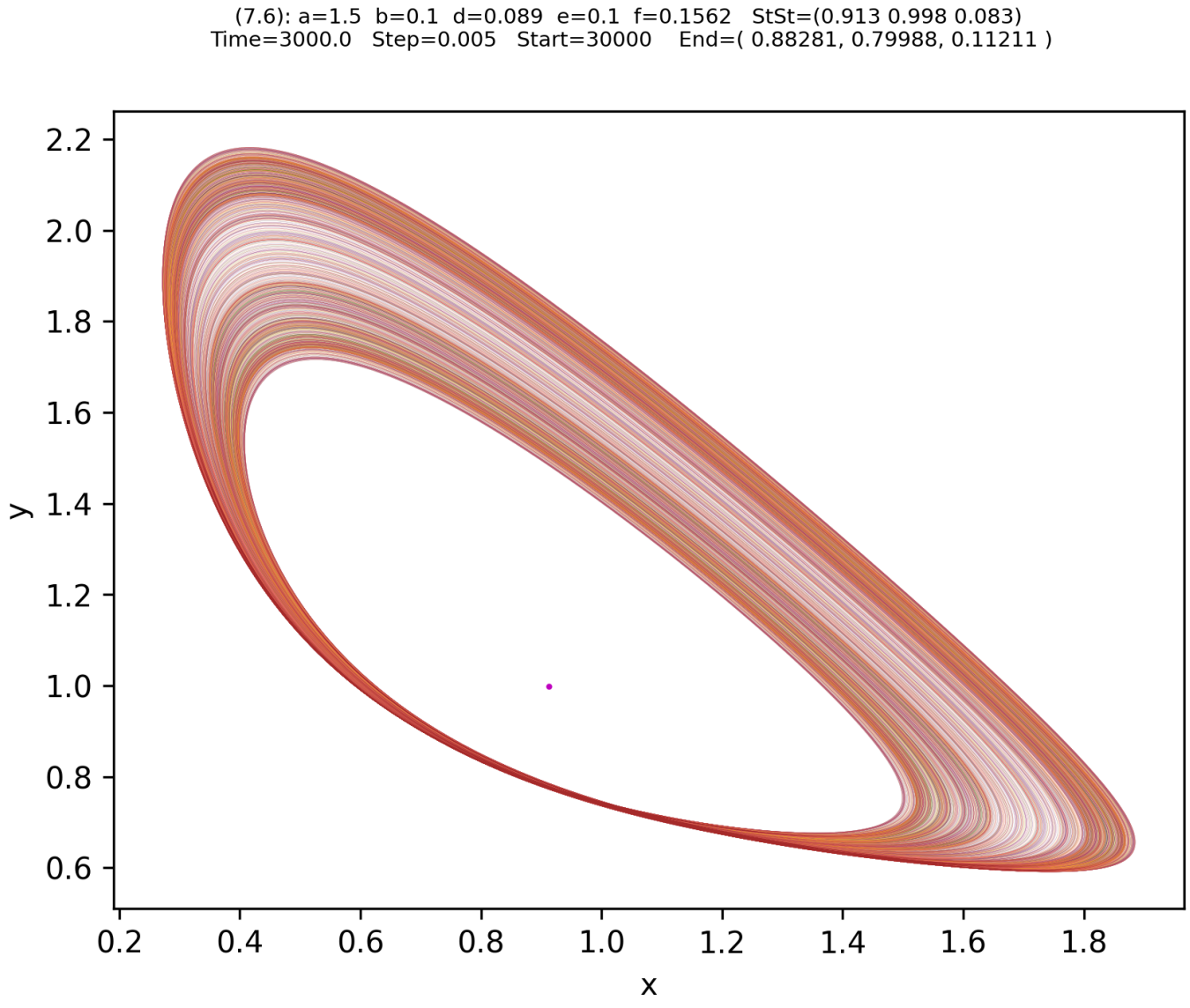
Legende: Chaos im **Beispiel 89**: $\lambda_1 \approx 0.056$ für:
$a = 2.2$, $b = 0.1$, $d = 0.1$, $e = 0.0622$ und $f = 0.12$.



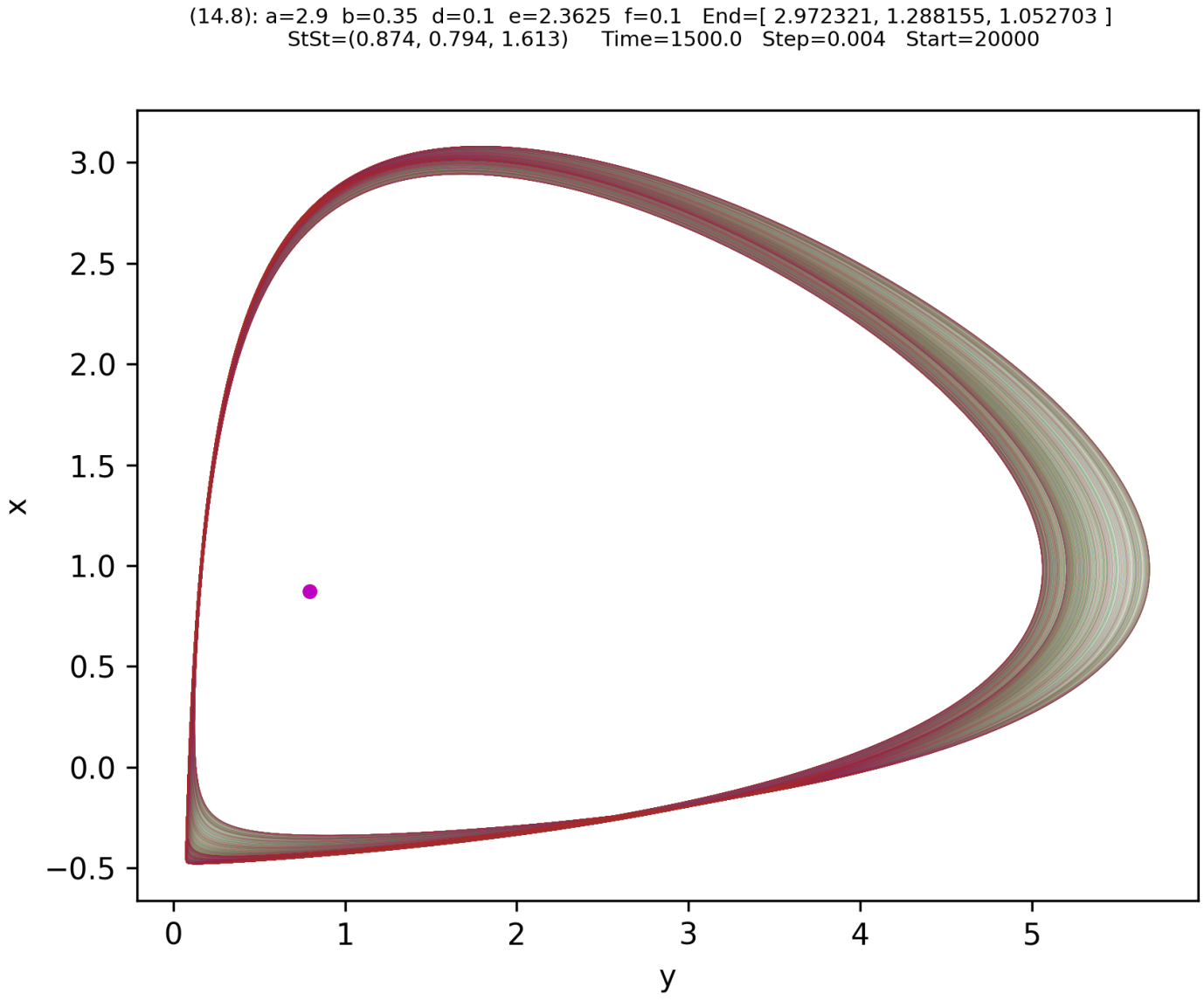
Legende: Chaos im **Beispiel 90**: $\lambda_1 \approx 0.114$ für:
$a = 4.0$, $b = 0.05$, $d = 0.05$, $e = 1.65$ und $f = 0.1$.



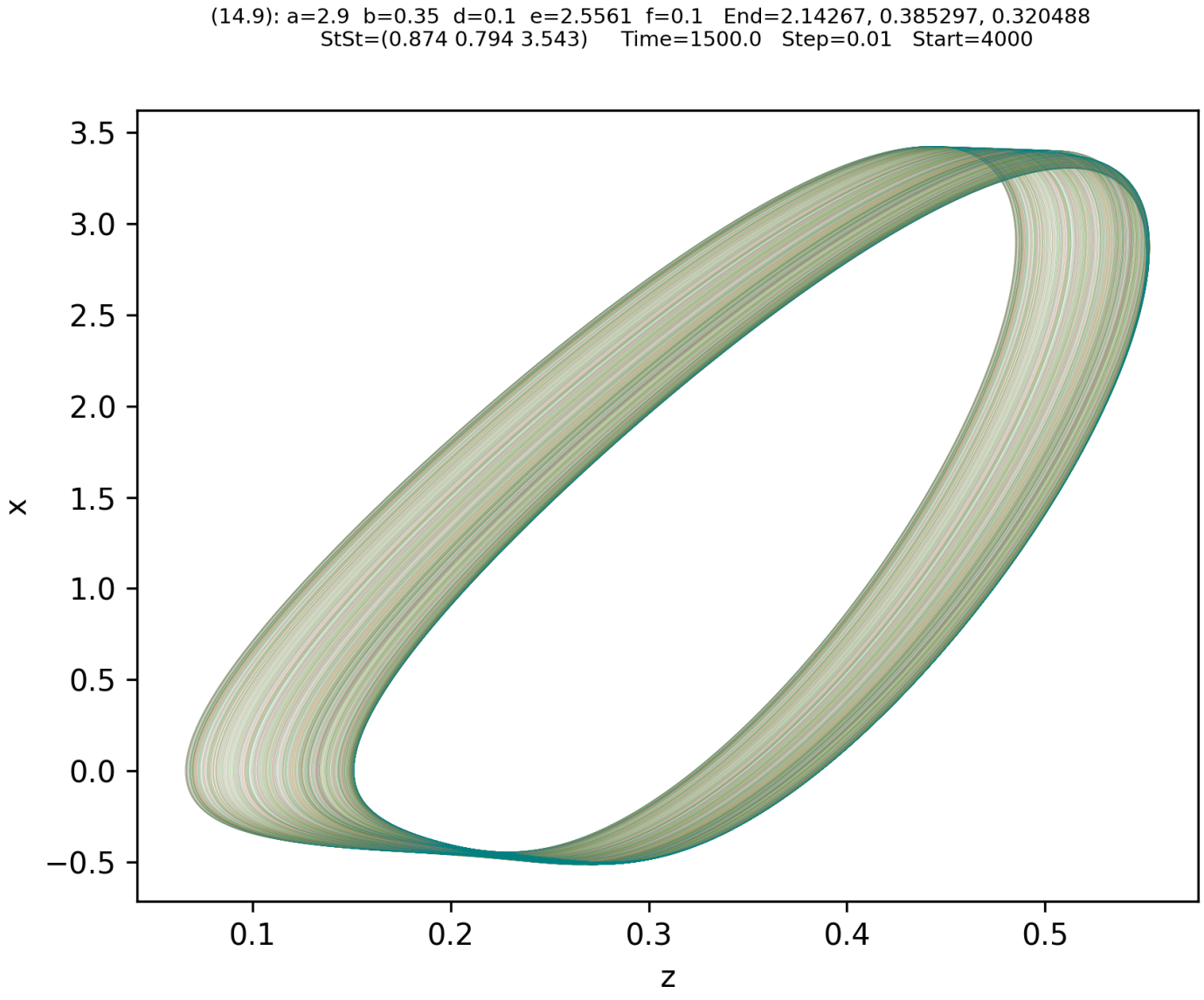
Legende: Chaos im **Beispiel 91**: $\lambda_1 \approx 0.040$ für:
$a = 1.5$, $b = 0.1$, $d = 0.089$, $e = 0.1$ und $f = 0.1562$.



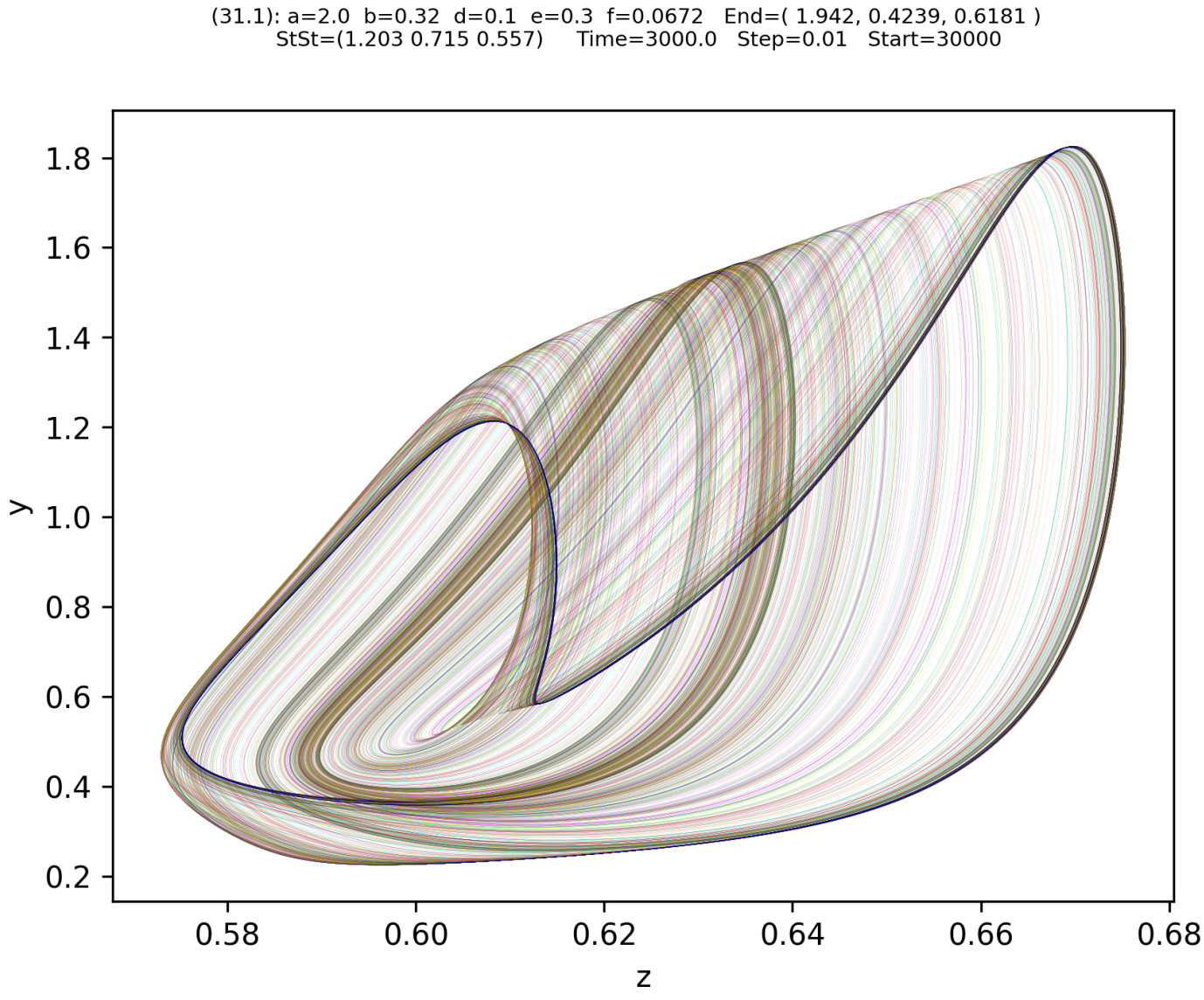
Legende: Chaos im **Beispiel 92**: $\lambda_1 \approx 0.119$ für:
$a = 2.9$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 2.3625$ und $f = 0.1$.



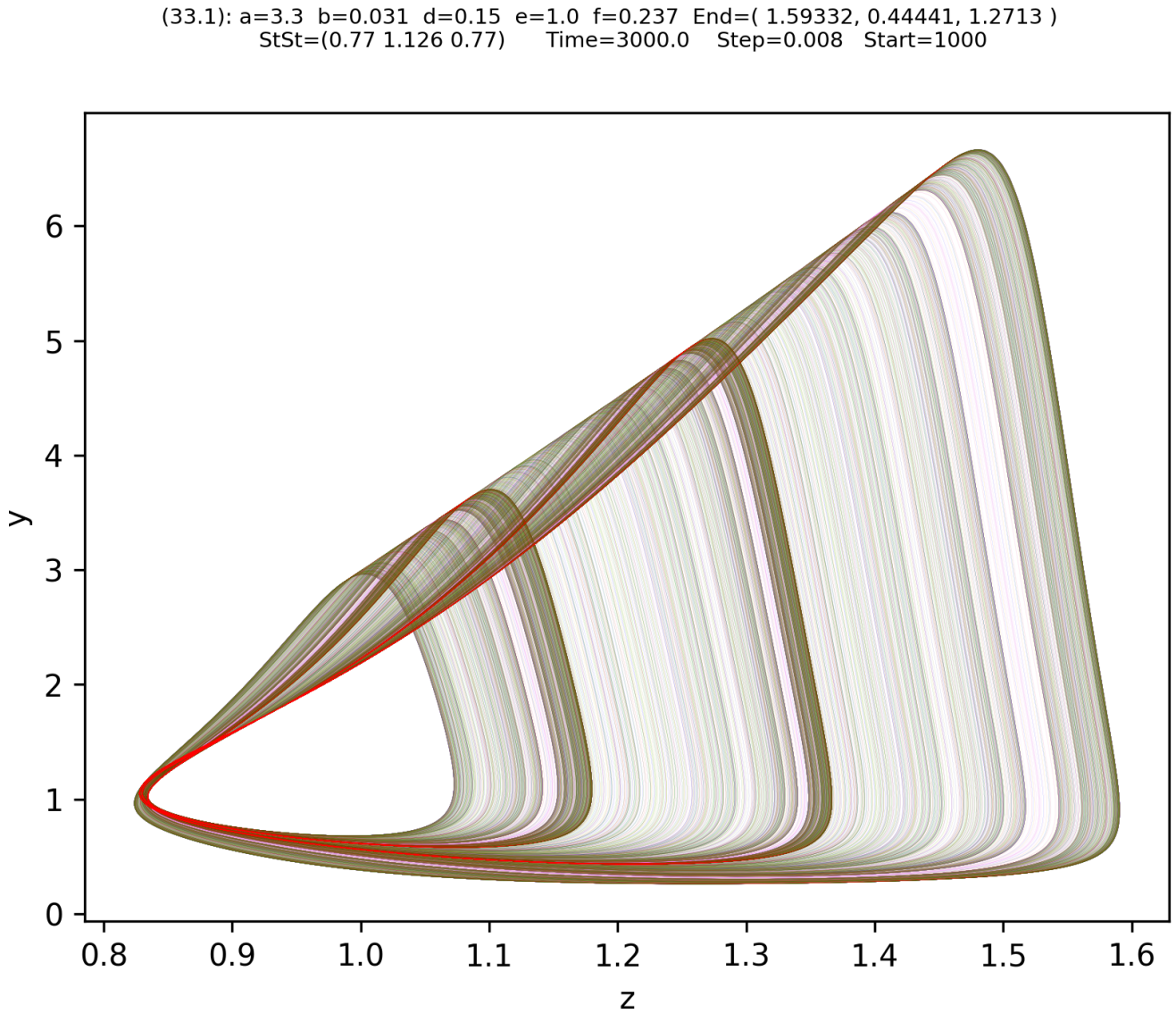
Legende: Chaos im **Beispiel 93**: $\lambda_1 \approx 0.132$ für:
$a = 2.9$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 2.5561$ und $f = 0.1$.



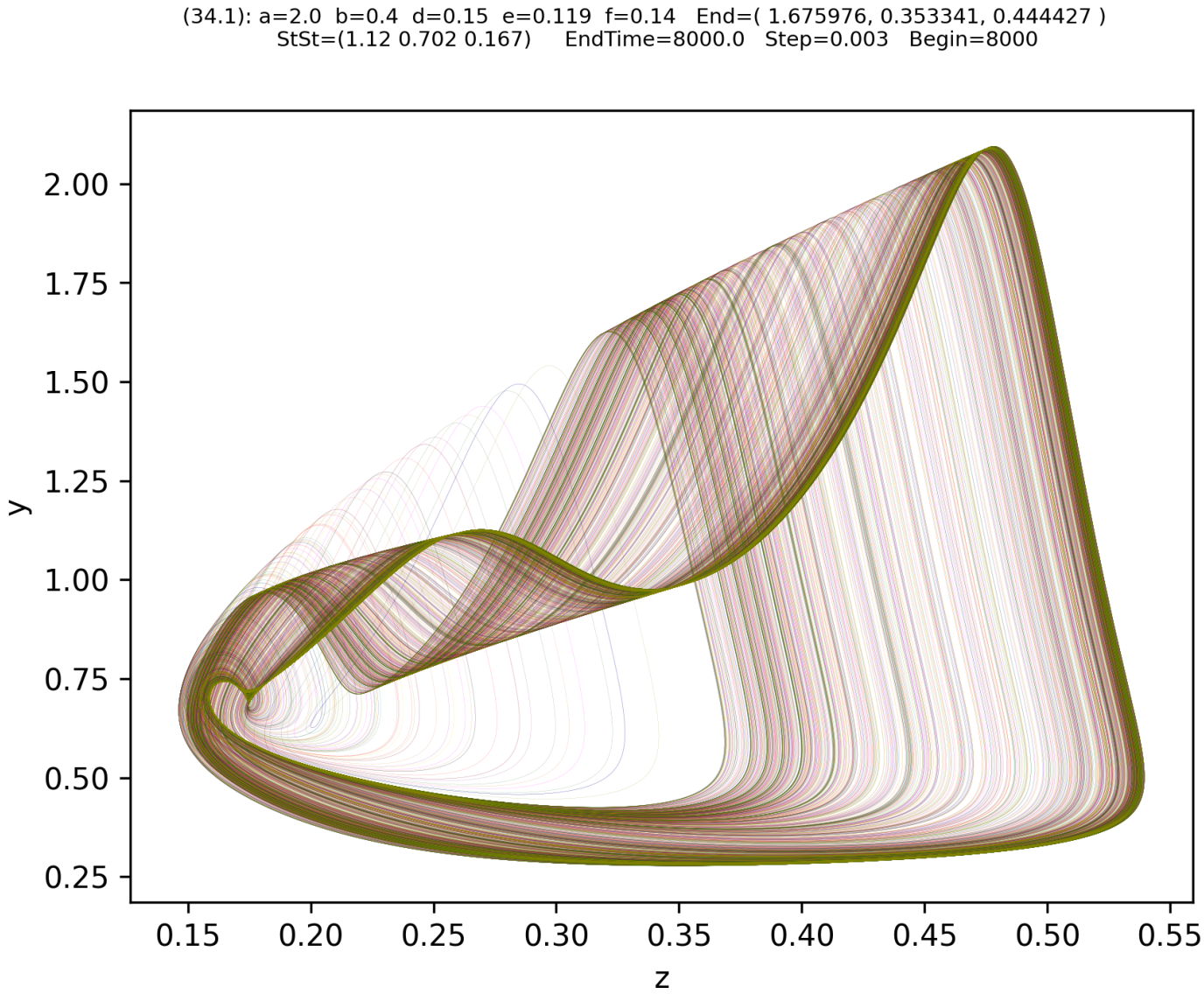
Legende: Chaos im **Beispiel 94**: $\lambda_1 \approx 0.020$ für:
$a = 2.0$, $b = 0.32$, $d = 0.1$, $e = 0.3$ und $f = 0.0672$.



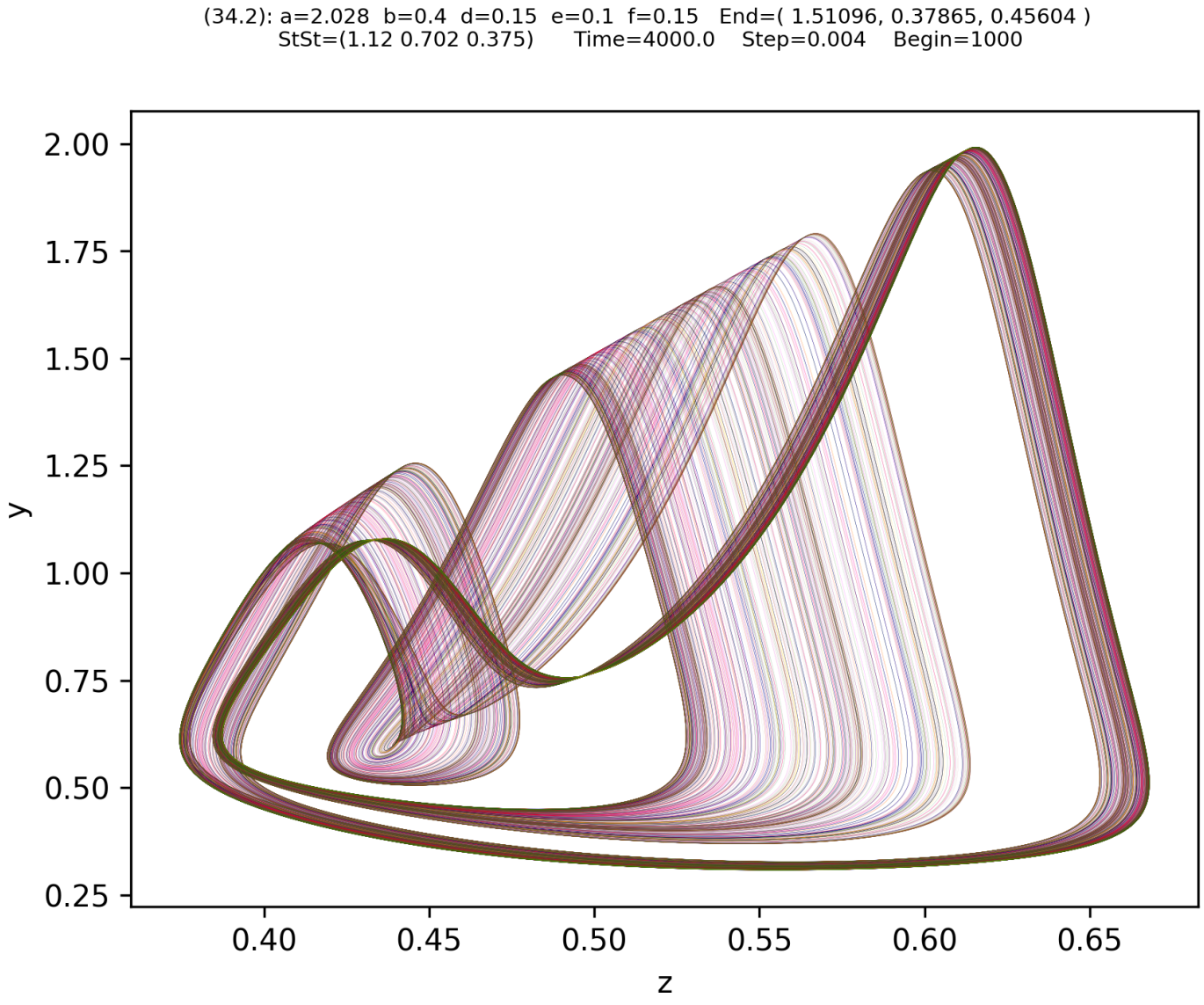
Legende: Chaos im **Beispiel 95**: $\lambda_1 \approx 0.024$ für:
$a = 3.3$, $b = 0.031$, $d = 0.15$, $e = 1.0$ und $f = 0.237$.



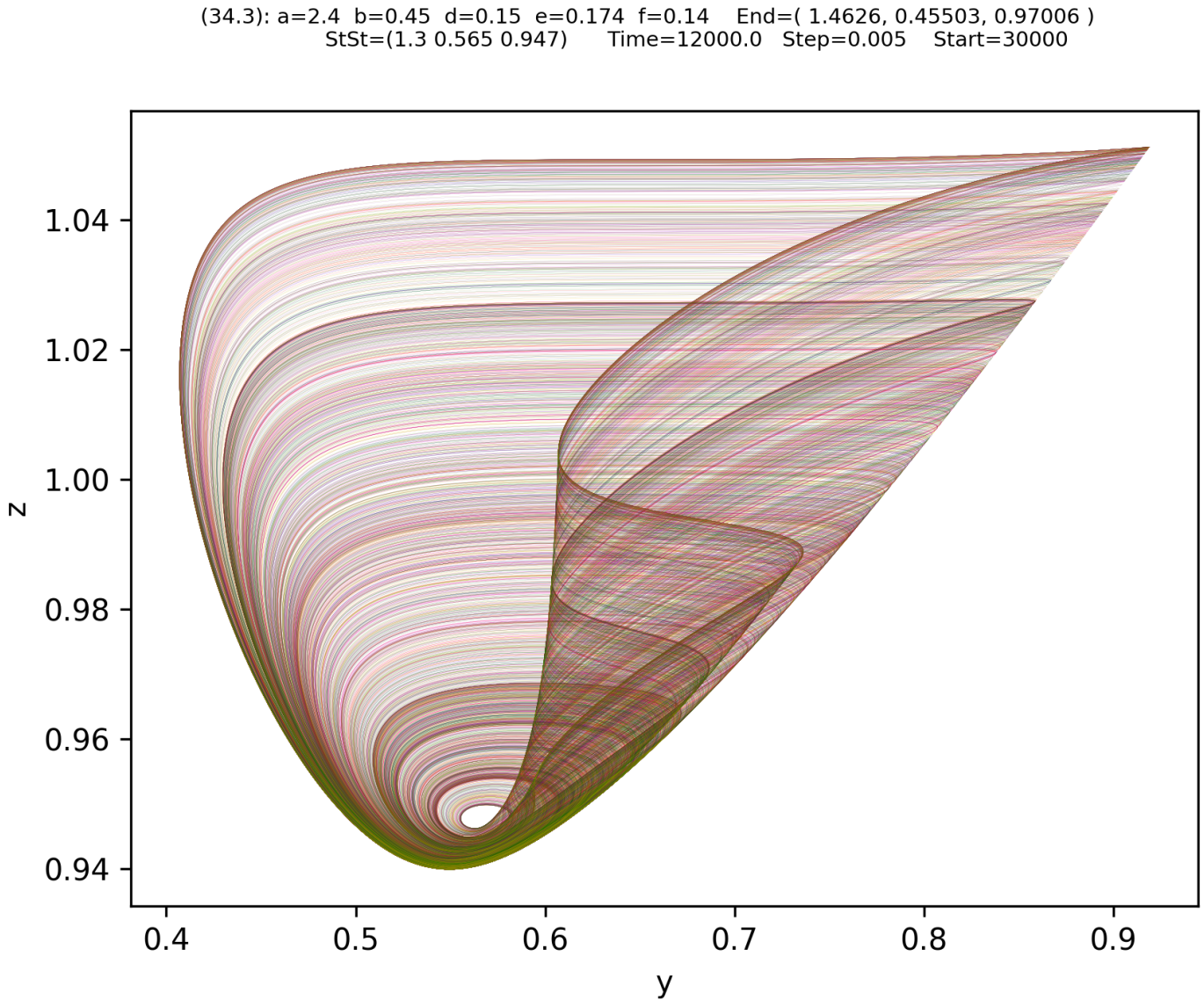
Legende: Chaos im **Beispiel 96**: $\lambda_1 \approx 0.008$ für:
$a = 2.0$, $b = 0.4$, $d = 0.15$, $e = 0.119$ und $f = 0.14$.



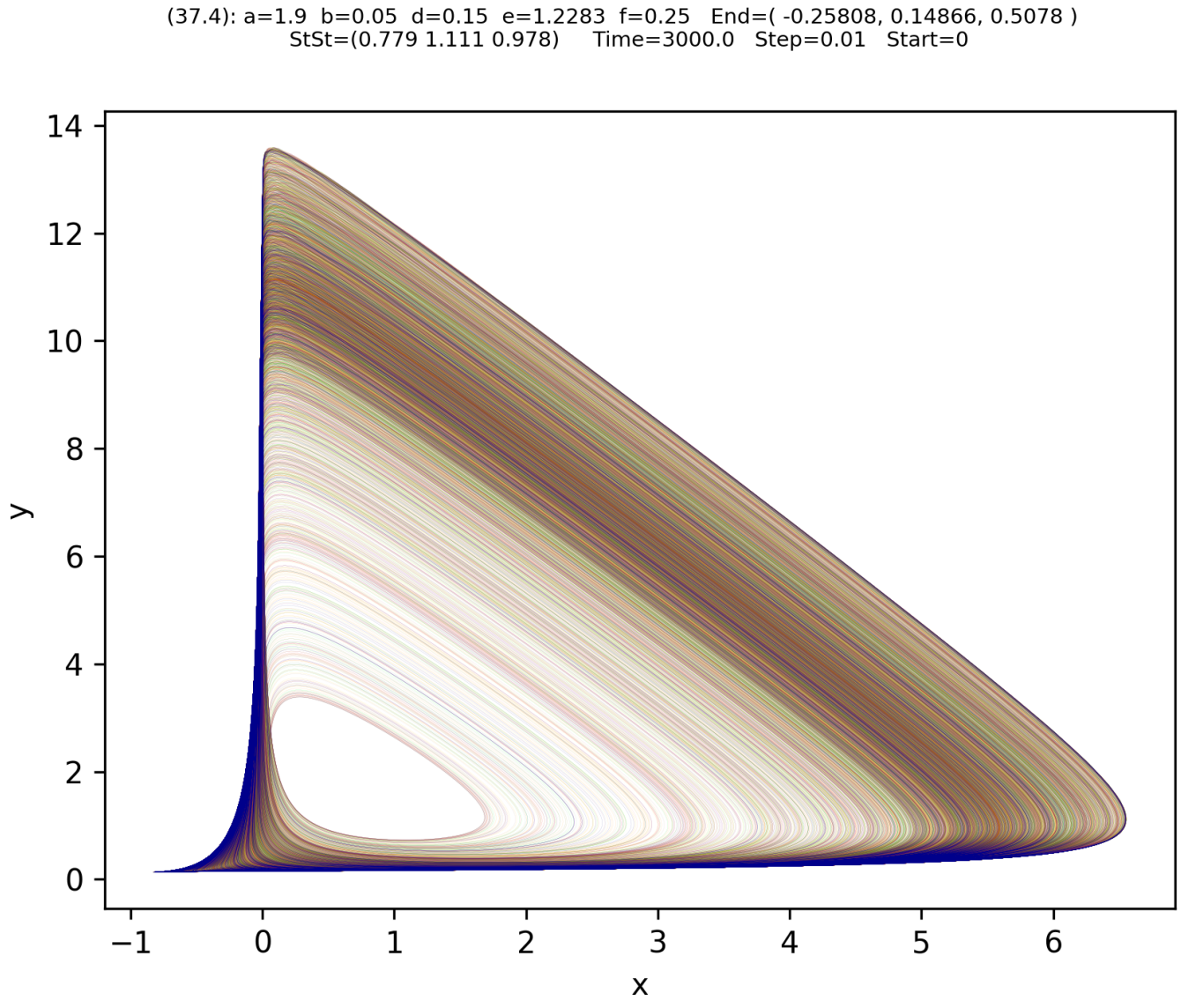
Legende: Chaos im **Beispiel 97**: $\lambda_1 \approx 0.058$ für:
$a = 2.028$, $b = 0.4$, $d = 0.15$, $e = 0.1$ und $f = 0.15$.



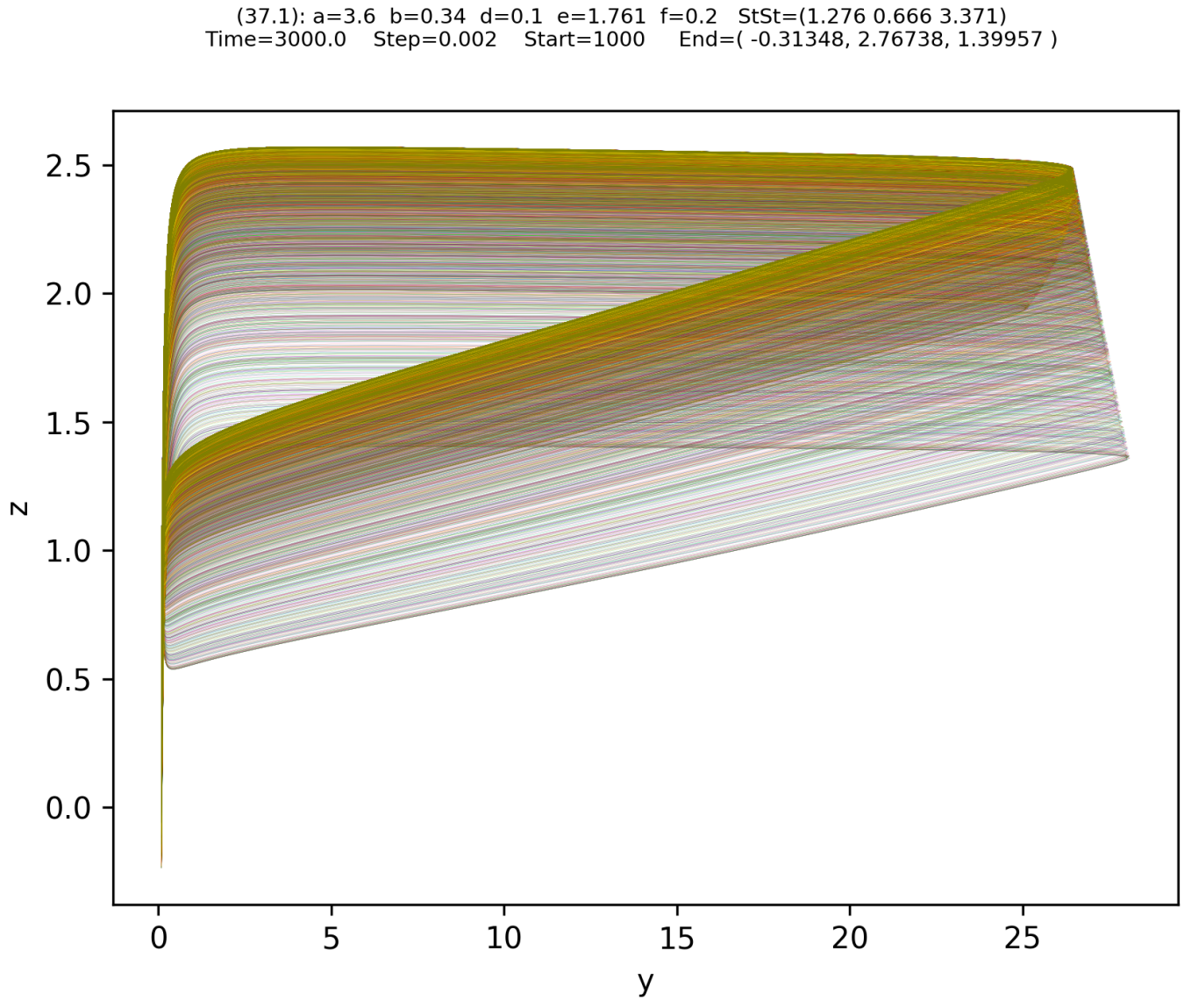
Legende: Chaos im **Beispiel 98**: $\lambda_1 \approx 0.031$ für:
$a = 2.4$, $b = 0.45$, $d = 0.15$, $e = 0.174$ und $f = 0.14$,.



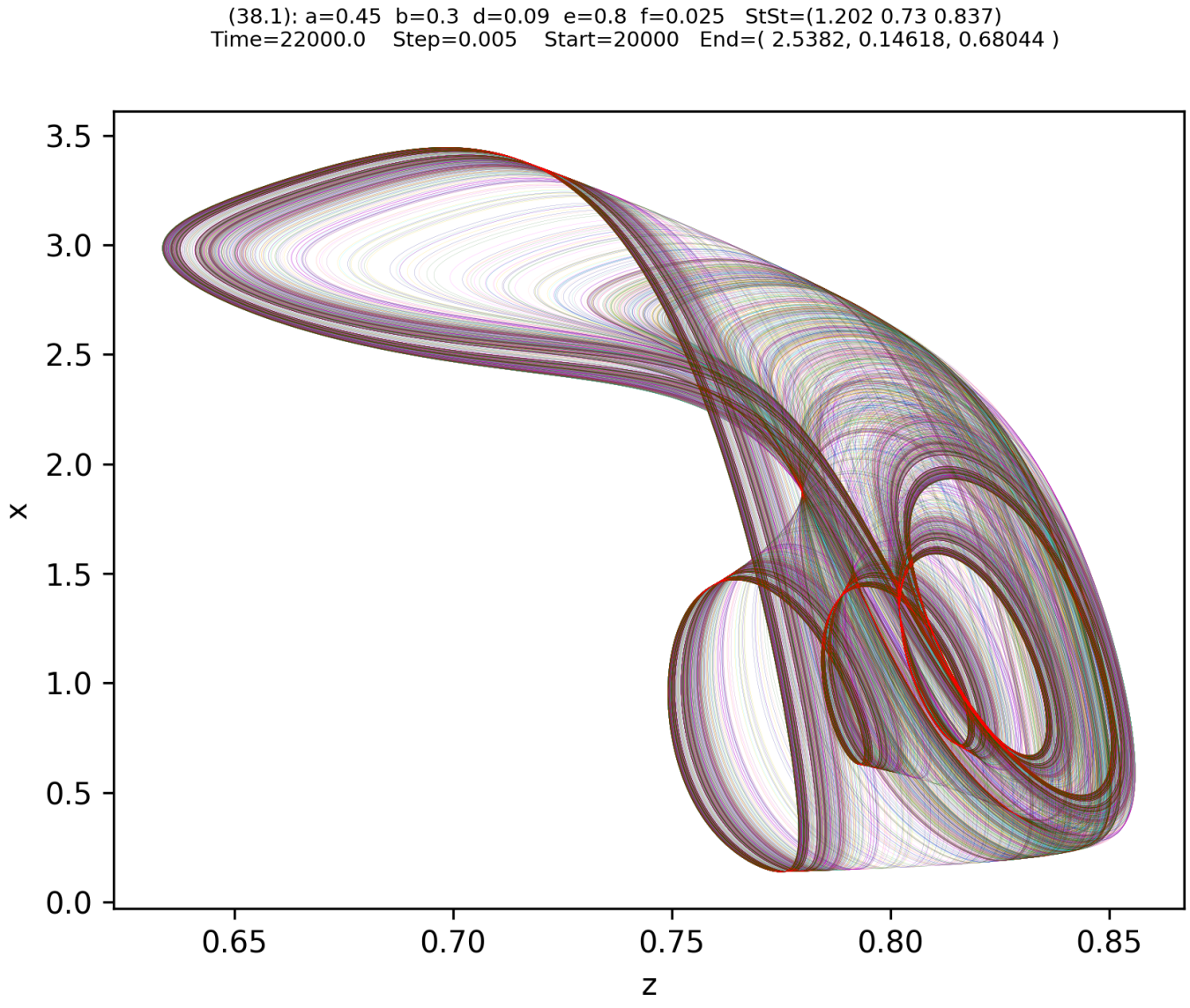
Legende: Chaos im **Beispiel 99**: $\lambda_1 \approx 0.095$ für:
$a = 1.9$, $b = 0.05$, $d = 0.15$, $e = 0.12283$ und $f = 0.25$,.



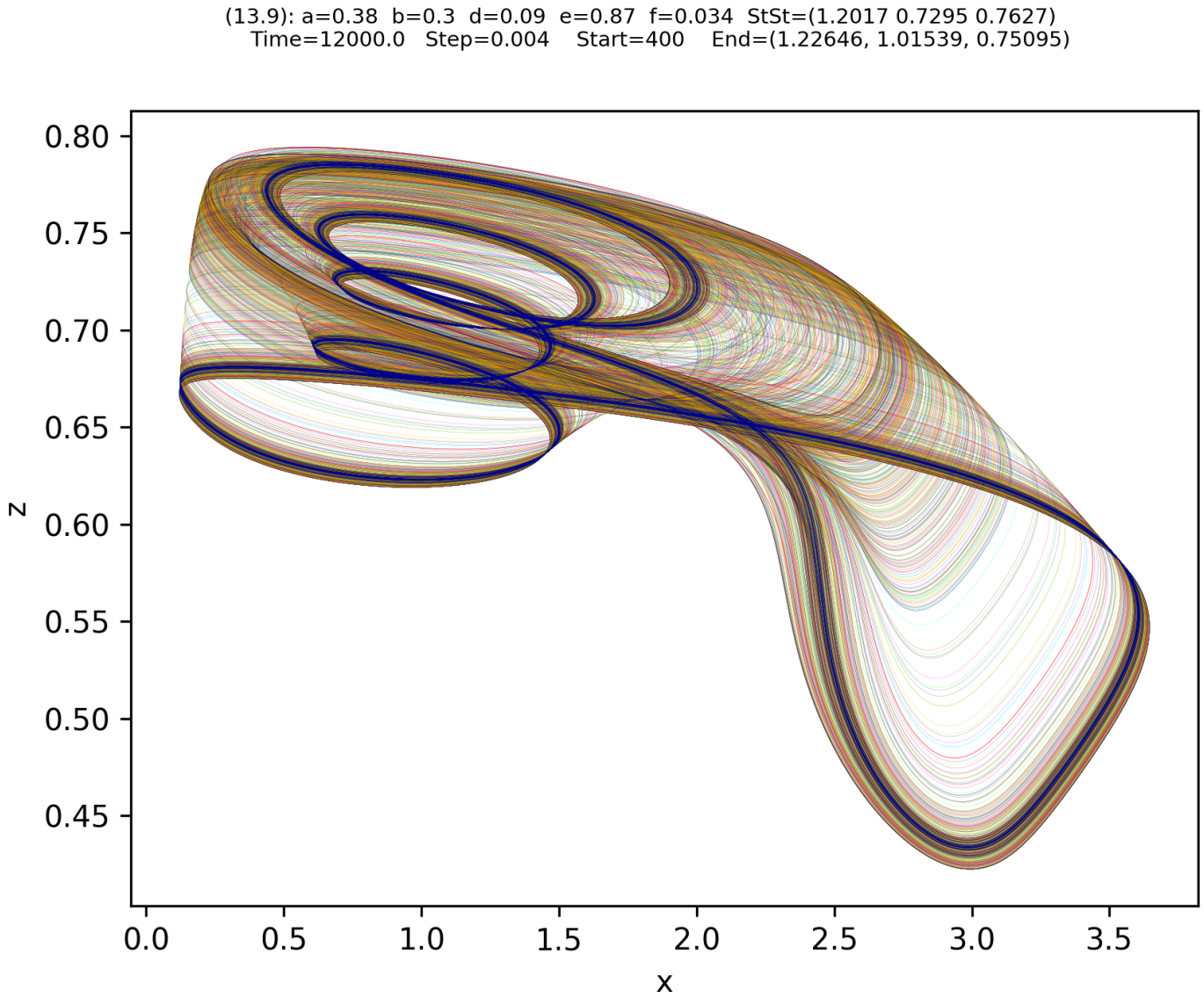
Legende: Chaos im **Beispiel 100**: $\lambda_1 \approx 0.124$ für:
$a = 3.6$, $b = 0.34$, $d = 0.1$, $e = 1.761$ und $f = 0.2$,.



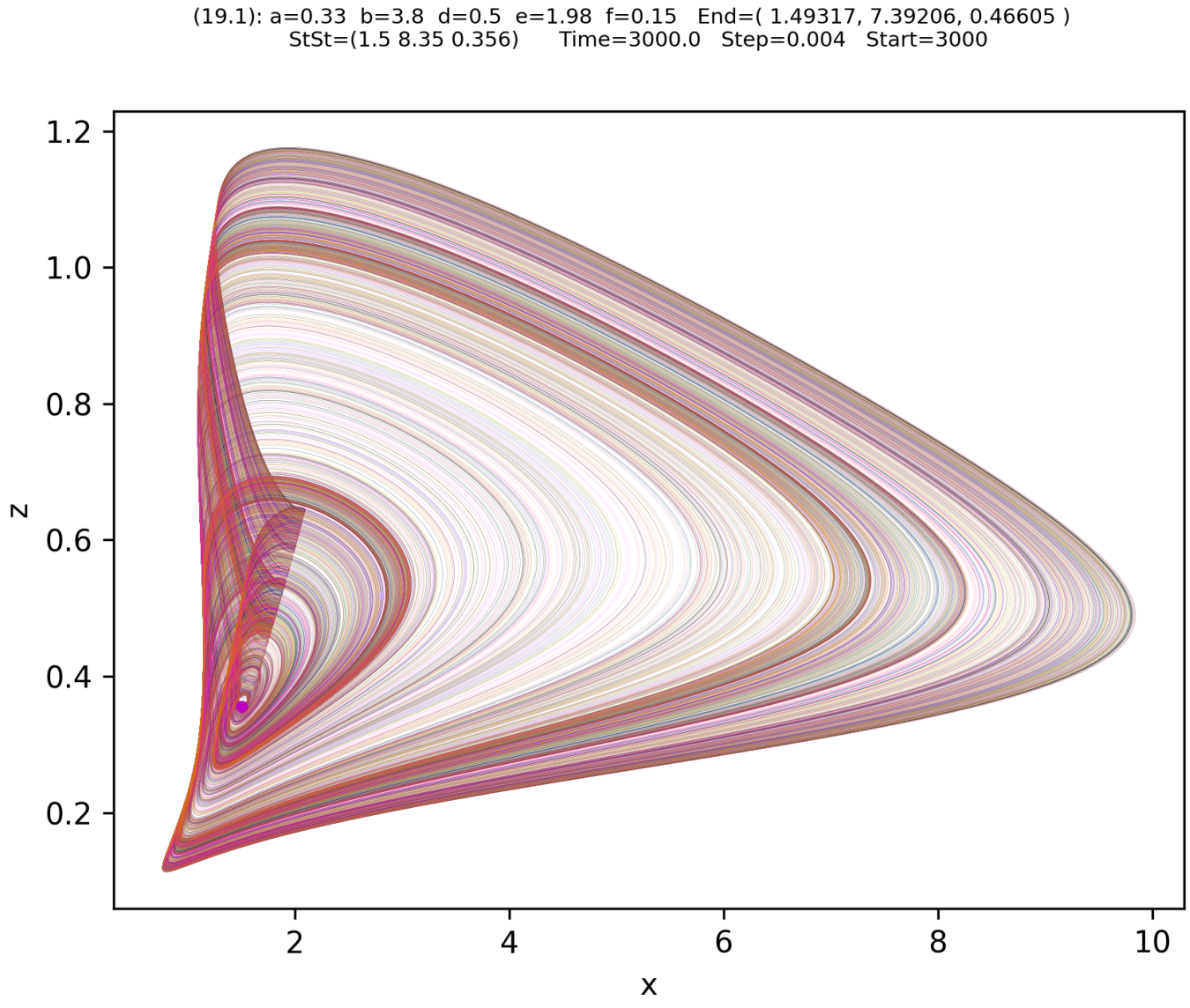
Legende: Chaos im **Beispiel 101**: $\lambda_1 \approx 0.006$ für:
$a = 0.45$, $b = 0.3$, $d = 0.09$, $e = 0.8$ und $f = 0.025$, .



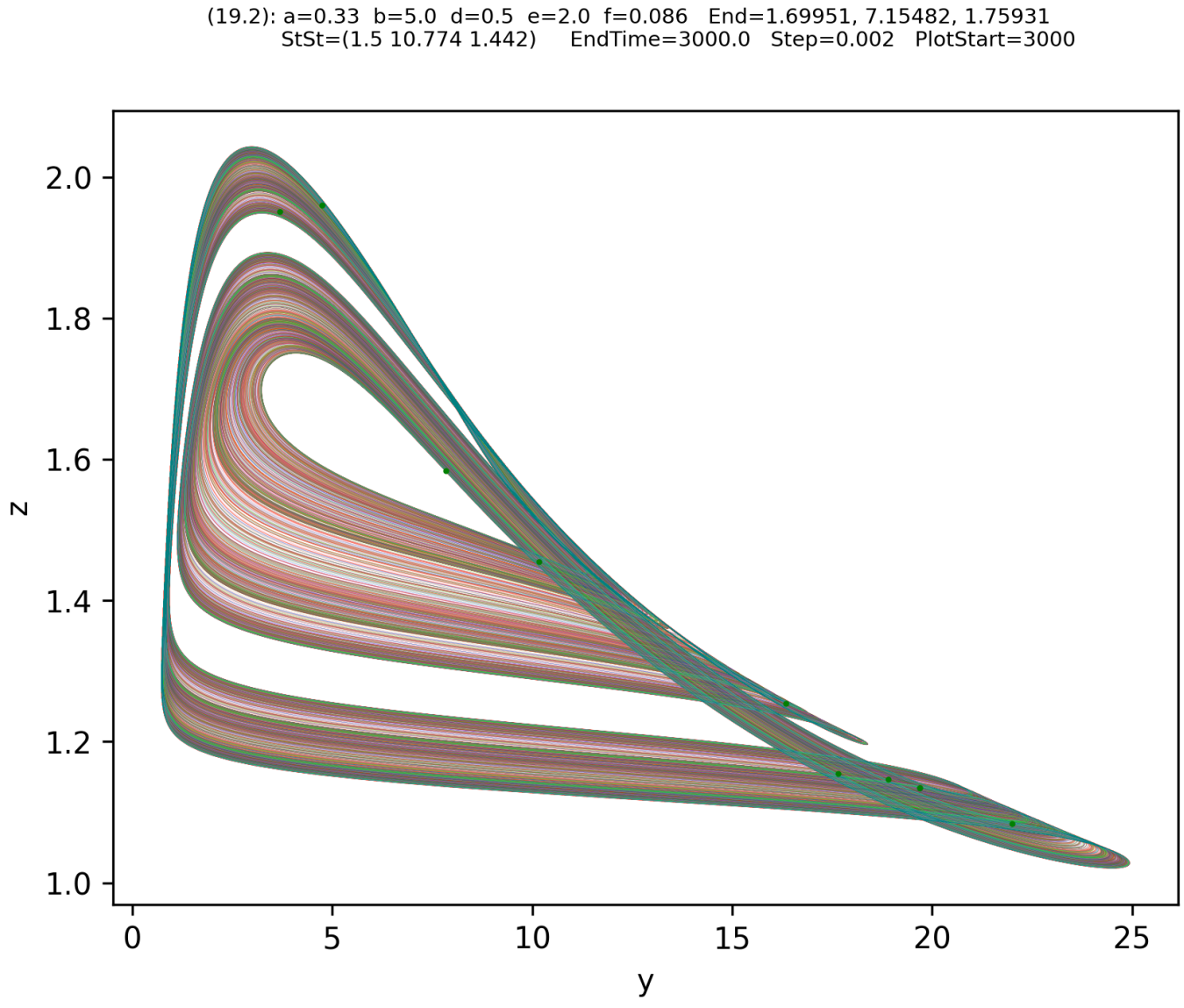
Legende: Chaos im **Beispiel 102**: $\lambda_1 = 0.006 \pm 0.003$ für: $a = 0.38$, $b = 0.3$, $d = 0.09$, $e = 0.87$ und $f = 0.034$, .



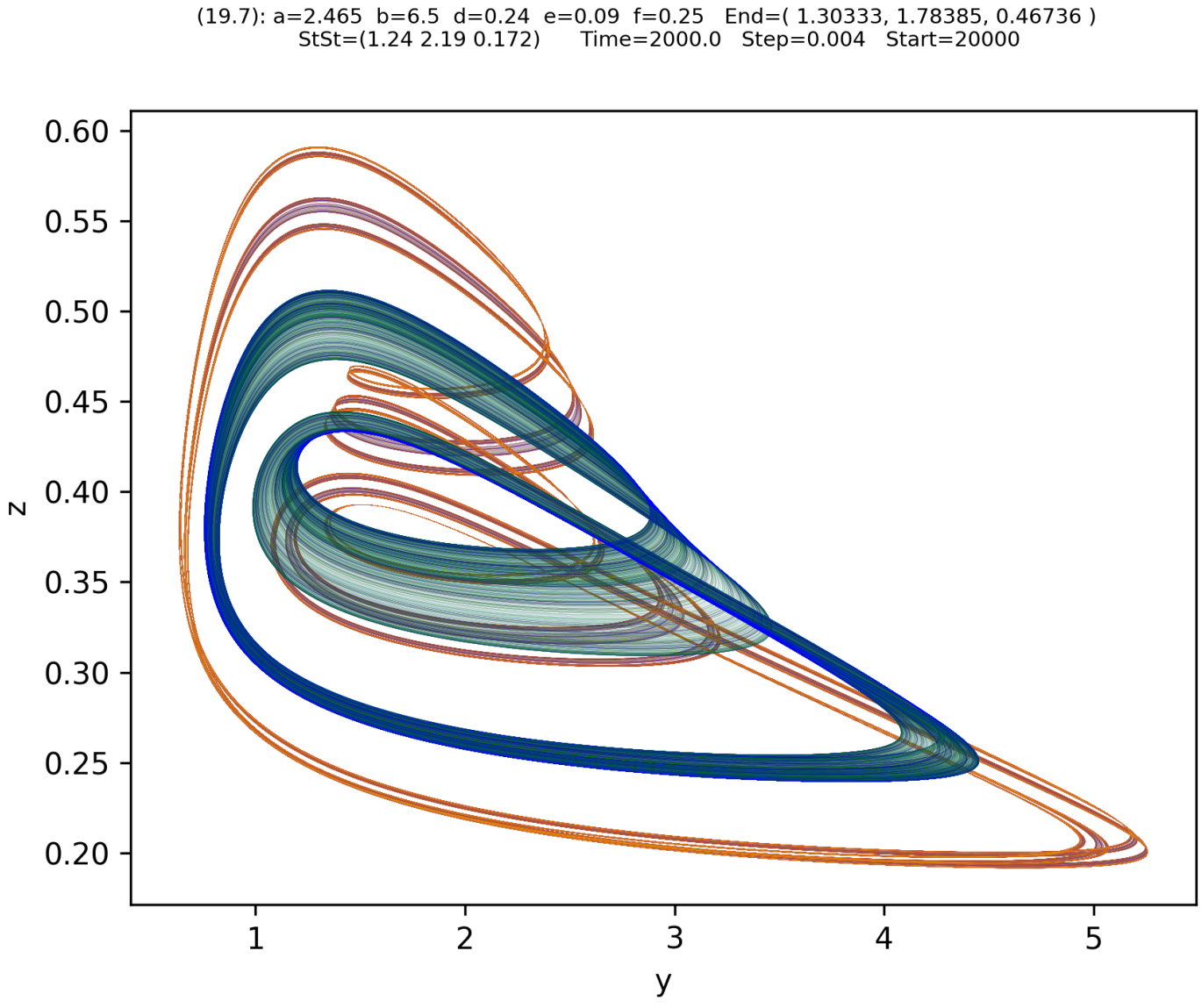
Legende: Chaos im **Beispiel 103**: $\lambda_1 \approx 0.066$ für:
$a = 0.33$, $b = 3.8$, $d = 0.5$, $e = 1.98$ und $f = 0.15$, .



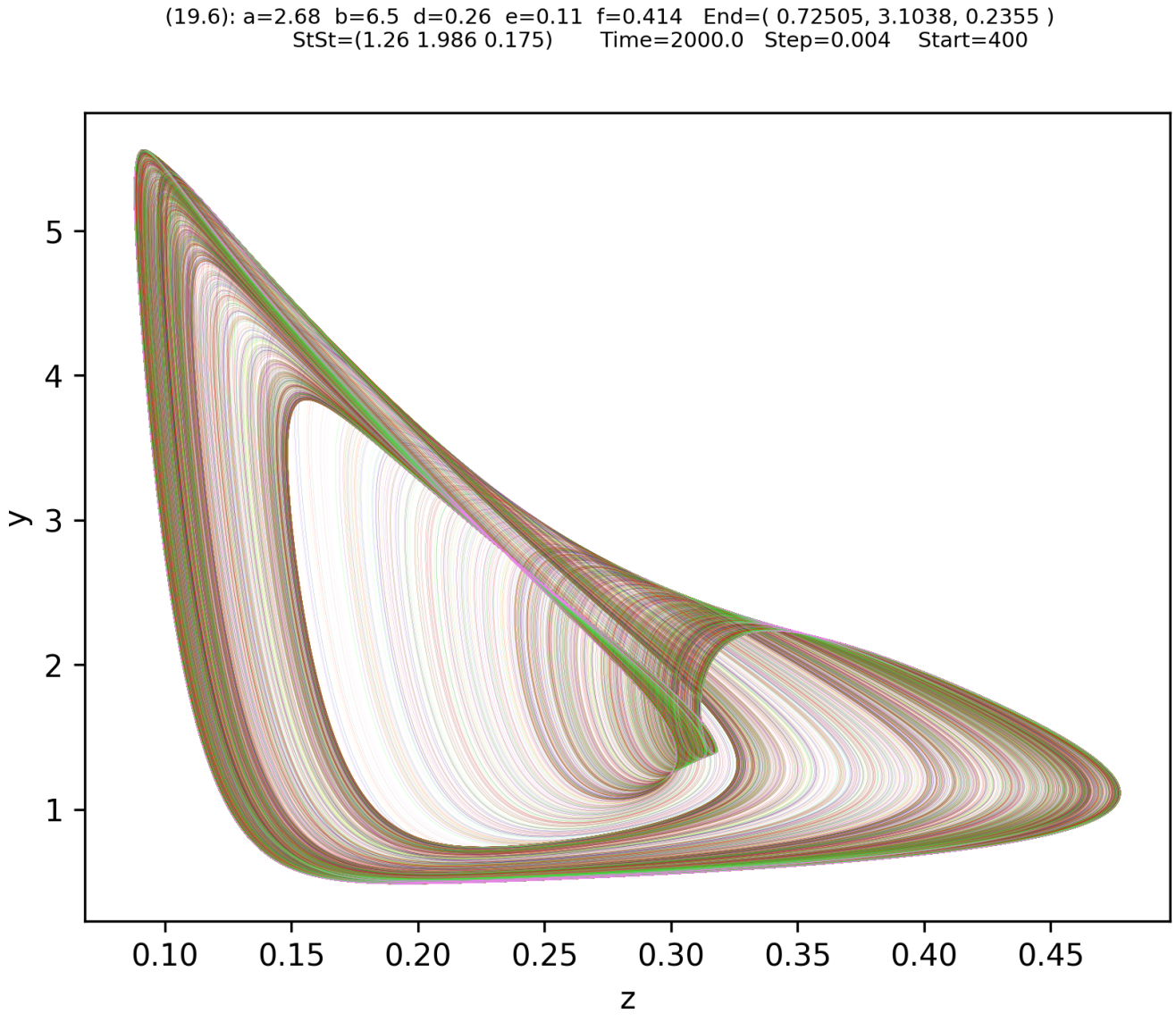
Legende: Chaos im **Beispiel 104**: $\lambda_1 \approx 0.020$ für:
$a = 0.33$, $b = 5.0$, $d = 0.5$, $e = 2.0$ und $f = 0.086$.



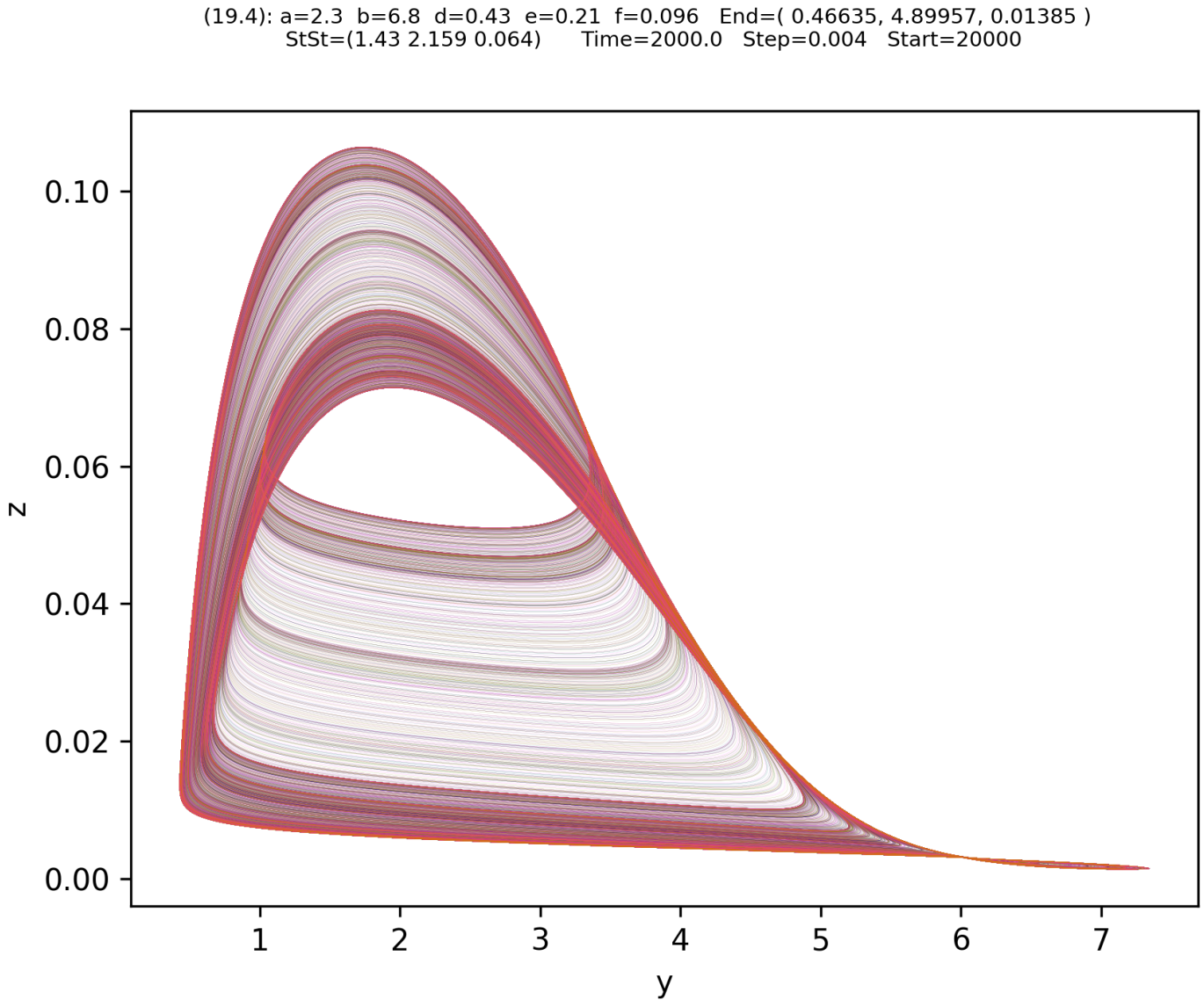
Legende: Doppel-Chaos im **Beispiel 105**: $\lambda_1 = 0.007,\ 0.058$ für: $a = 2.465,\ b = 6.5,\ d = 0.24,\ e = 0.09$ und $f = 0.25$.



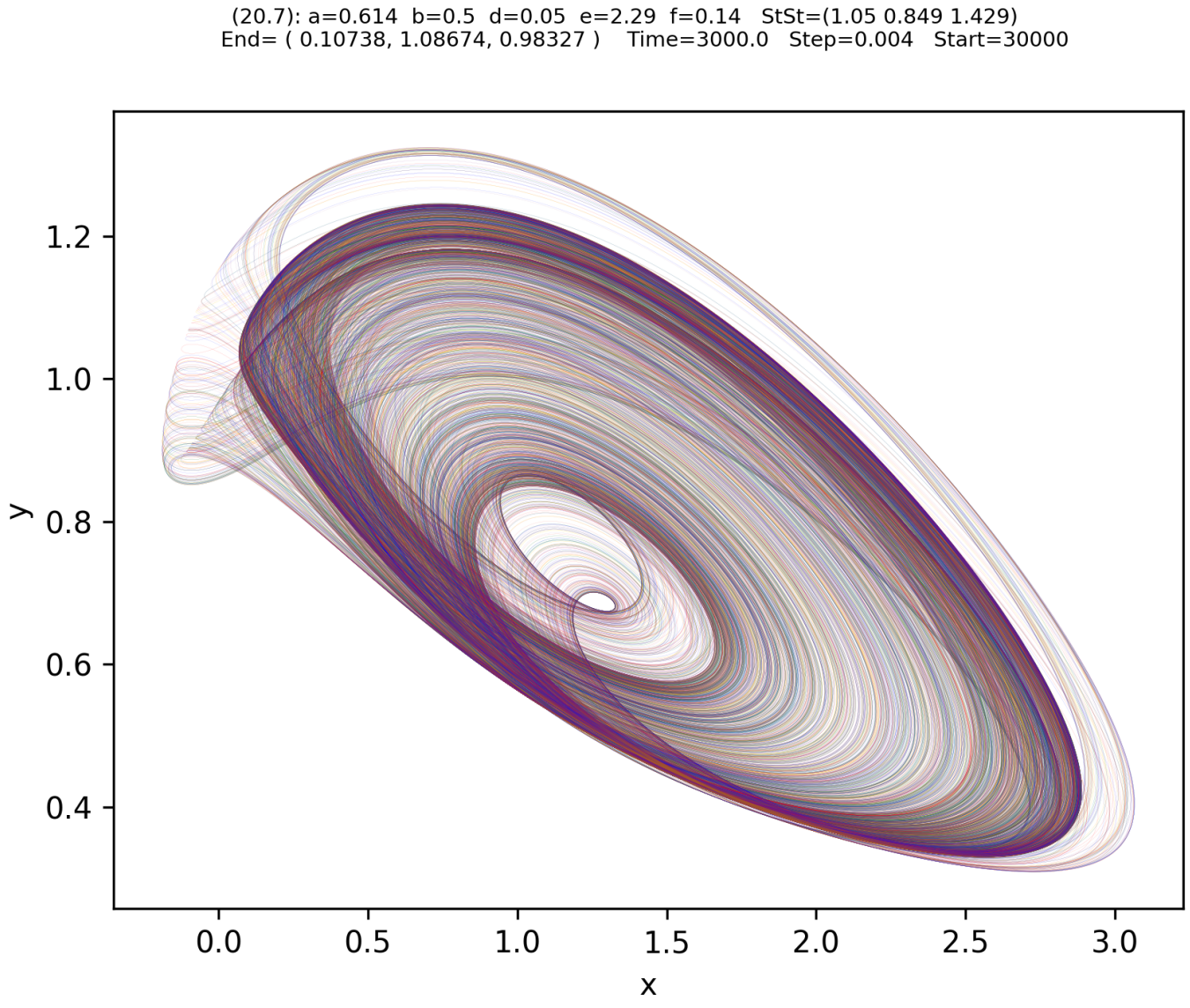
Legende: Chaos im **Beispiel 106**: $\lambda_1 \approx 0.067$ für:
$a = 2.68$, $b = 6.5$, $d = 0.26$, $e = 0.11$ und $f = 0.414$.



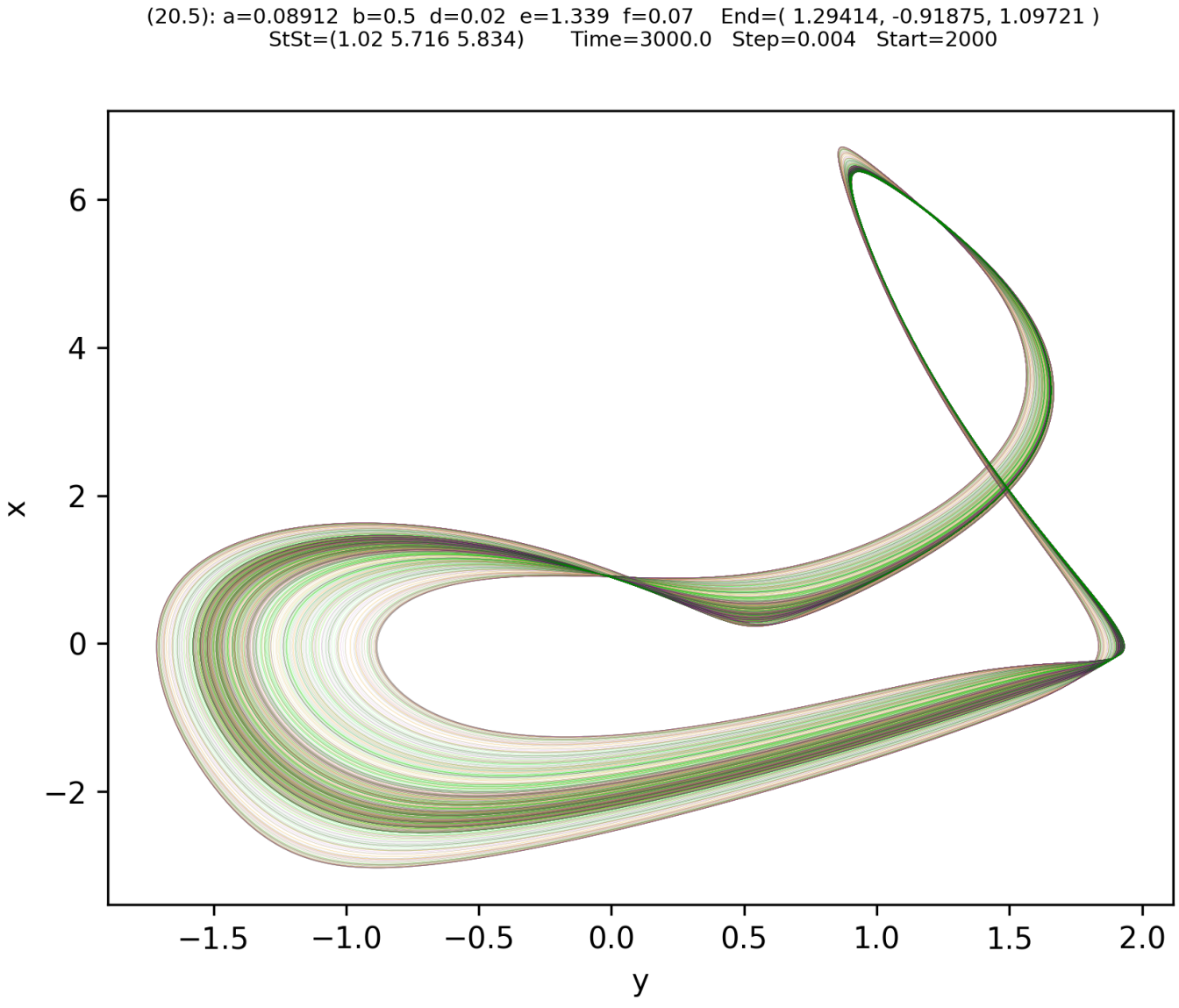
Legende: Chaos im **Beispiel 107**: $\lambda_1 \approx 0.084$ für:
$a = 2.3$, $b = 6.8$, $d = 0.43$, $e = 0.21$ und $f = 0.096$.



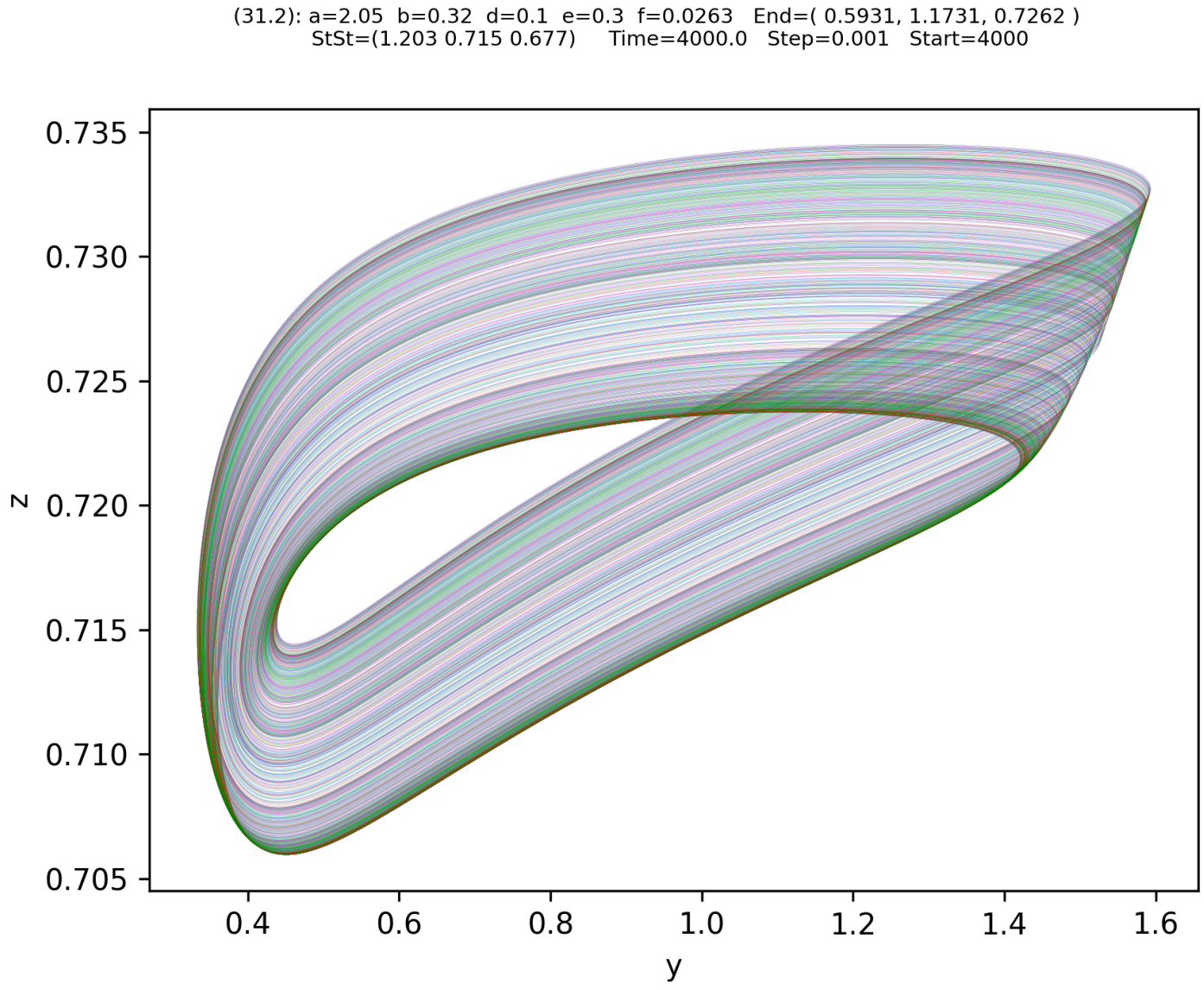
Legende: Chaos im **Beispiel 108**: $\lambda_1 \approx 0.064$ für:
$a = 0.614$, $b = 0.5$, $d = 0.05$, $e = 2.29$ und $f = 0.14$.



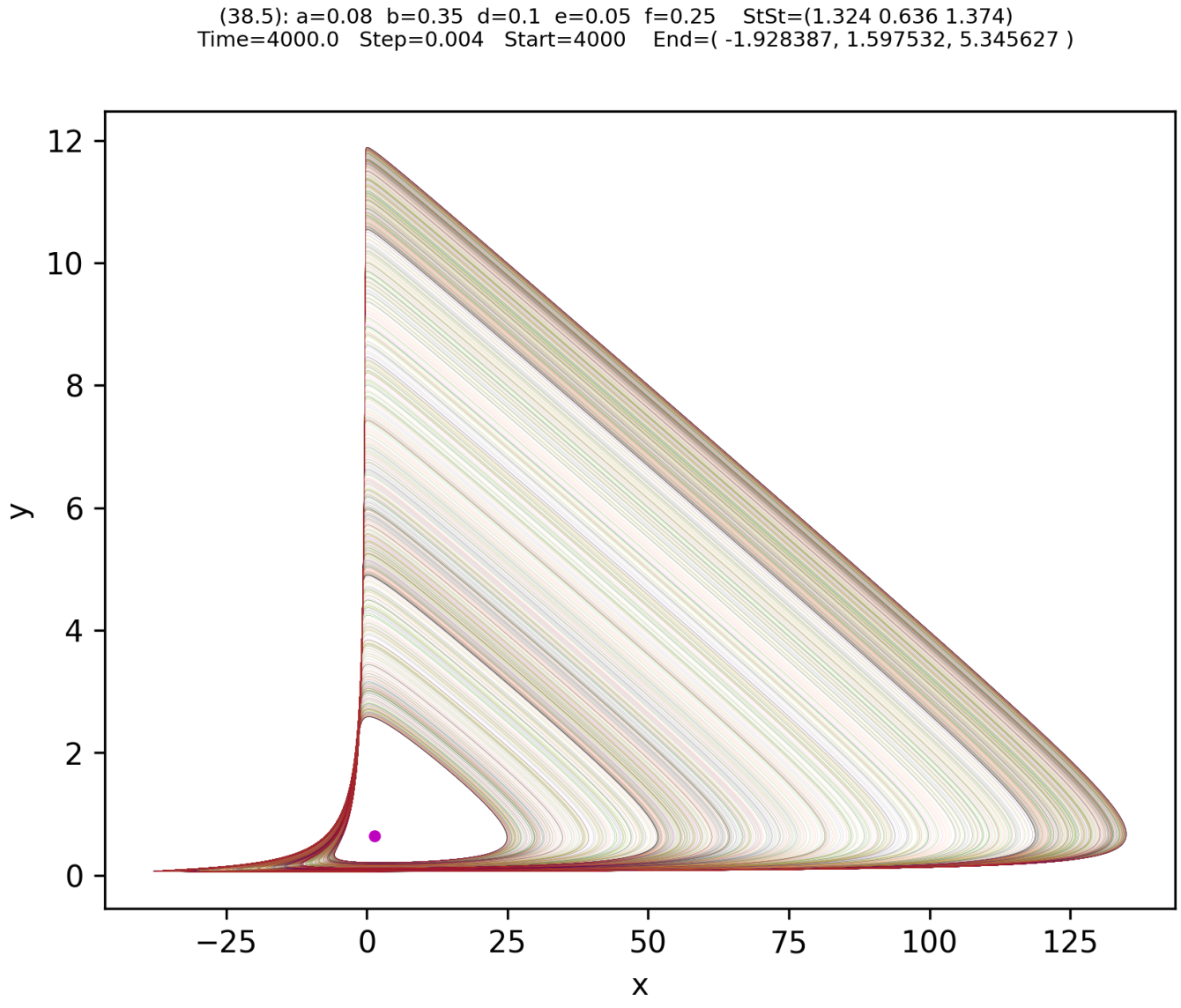
Legende: Chaos im **Beispiel 109**: $\lambda_1 \approx 0.029$ für:
$a = 0.08912$, $b = 0.5$, $d = 0.02$, $e = 1.339$ und $f = 0.07$.



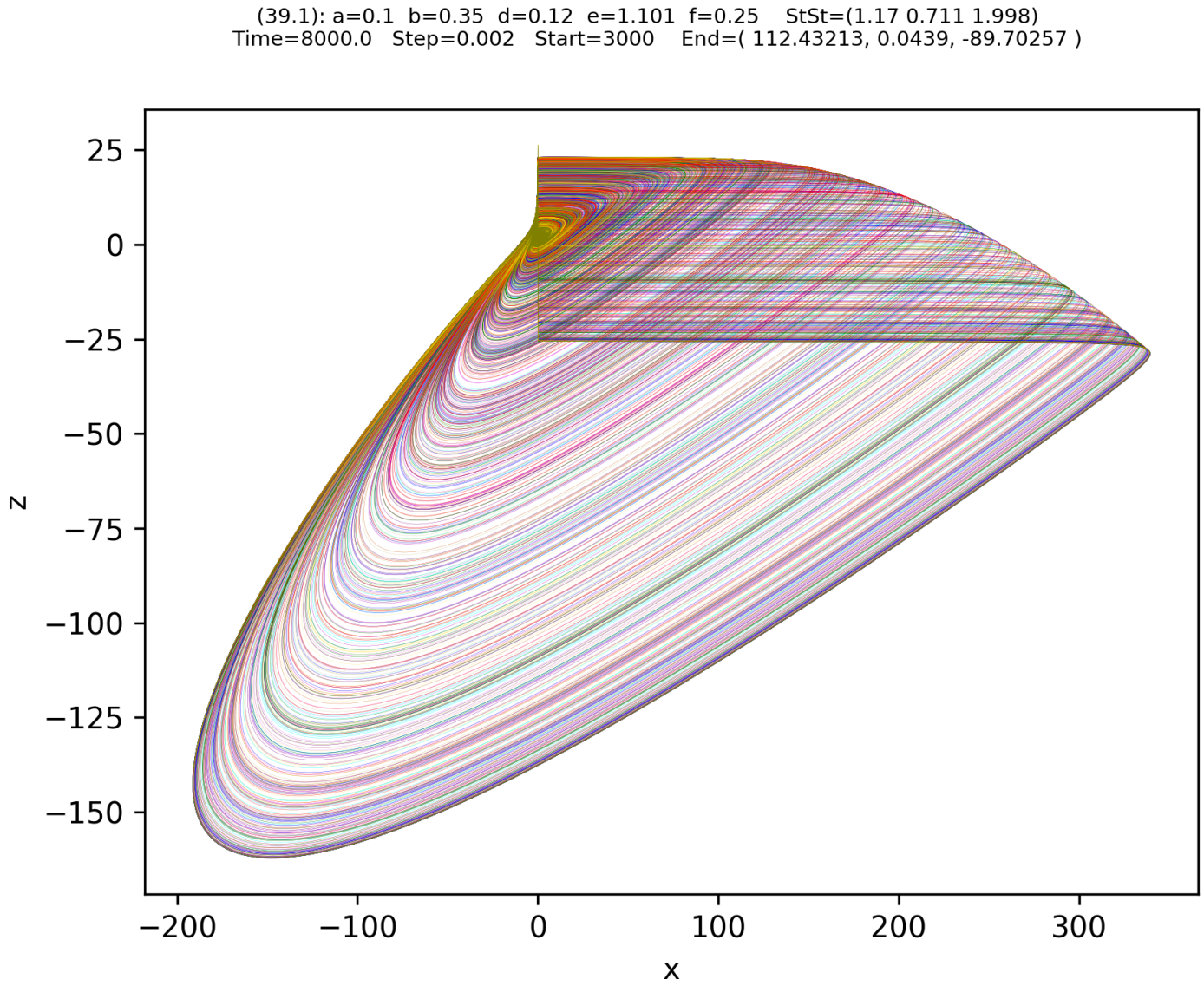
Legende: Chaos im **Beispiel 110**: $\lambda_1 \approx 0.0195$ für:
$a = 2.05$, $b = 0.32$, $d = 0.1$, $e = 0.3$ und $f = 0.0263$.



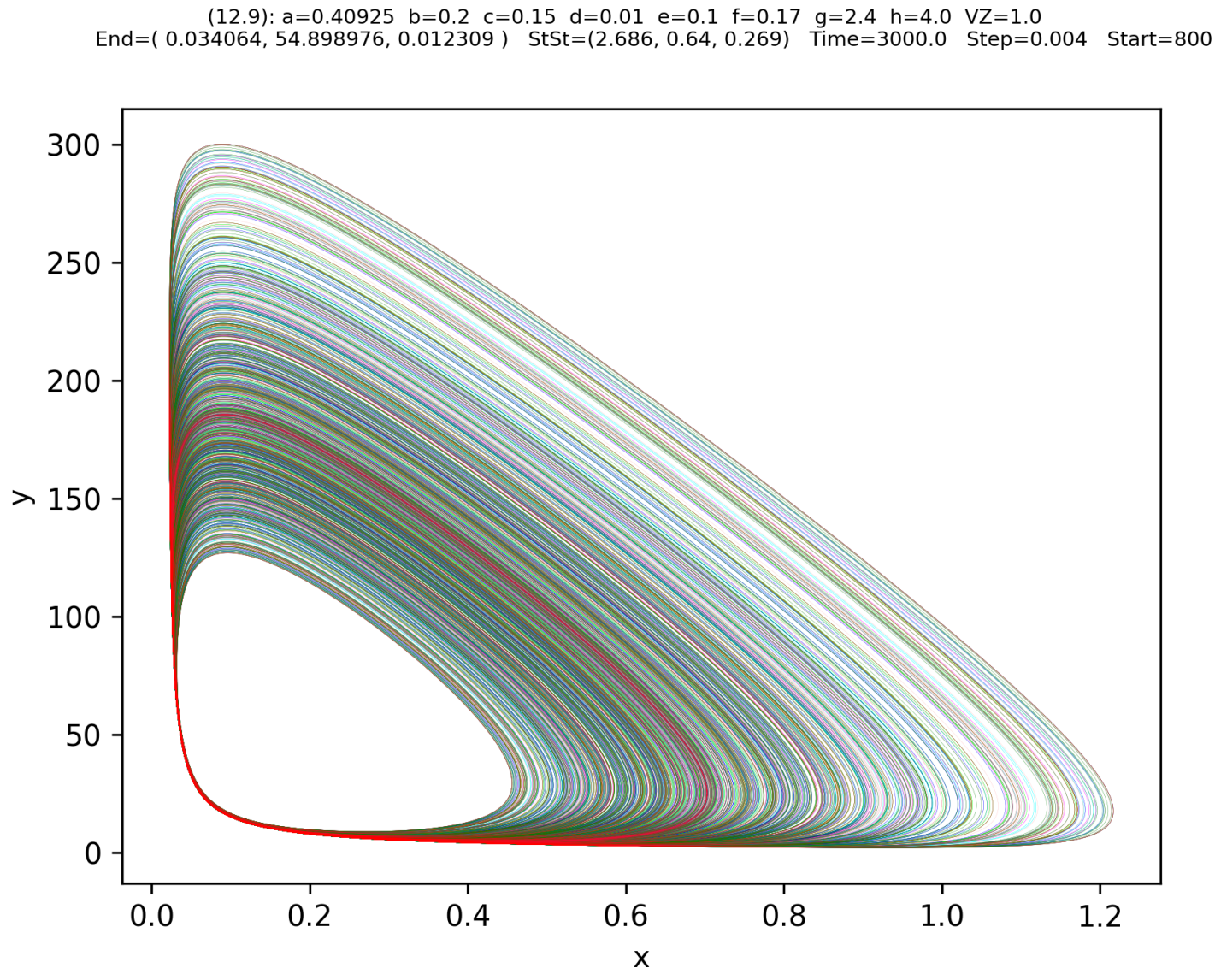
Legende: Chaos im **Beispiel 111**: $\lambda_1 = 0.036 \pm 0.08$ für: $a = 0.08$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 0.05$ und $f = 0.25$.



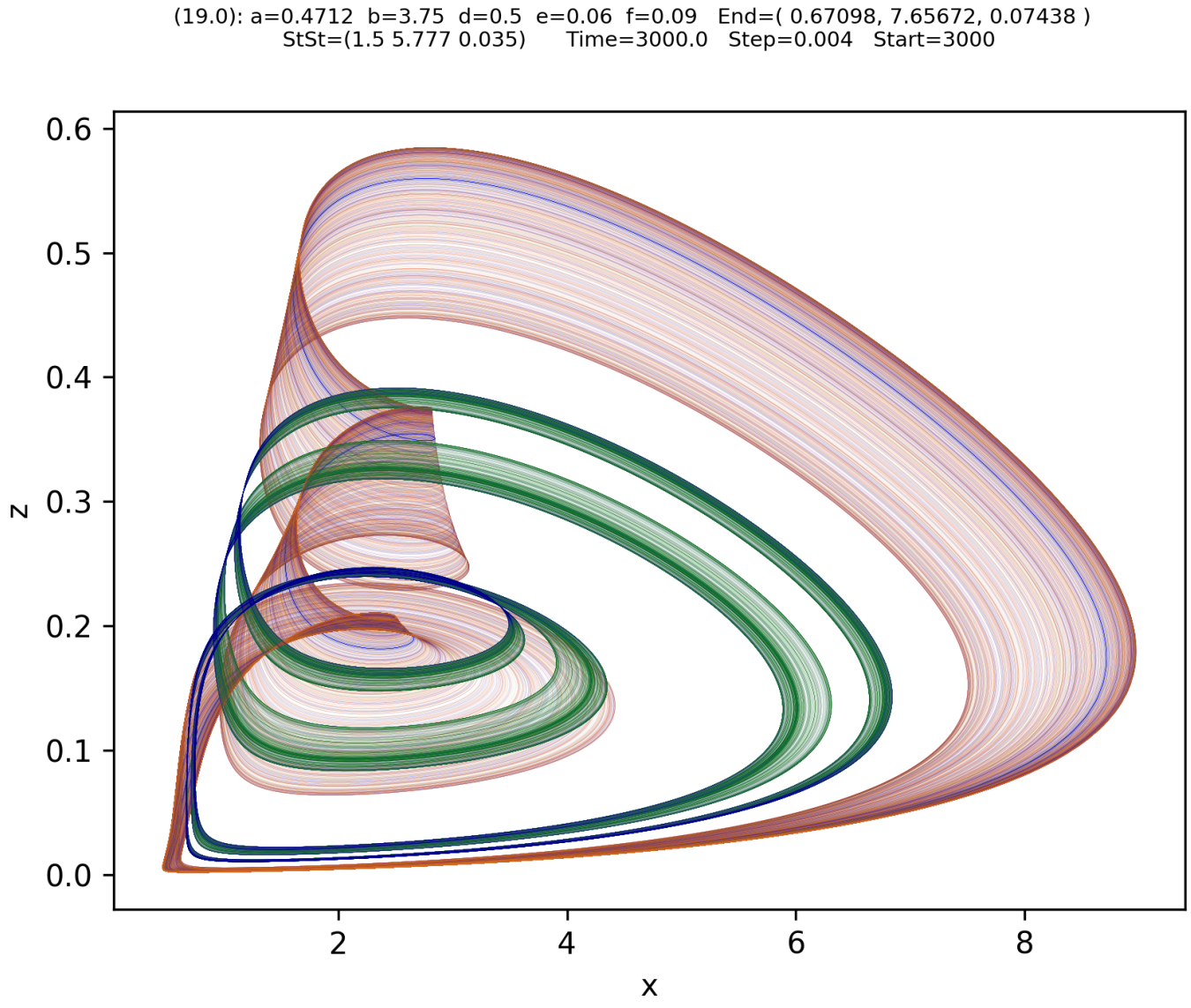
Legende: Chaos im **Beispiel 112**: $\lambda_1 = 0.026$ für:
$a = 0.1$, $b = 0.35$, $d = 0.12$, $e = 1.101$ und $f = 0.25$.



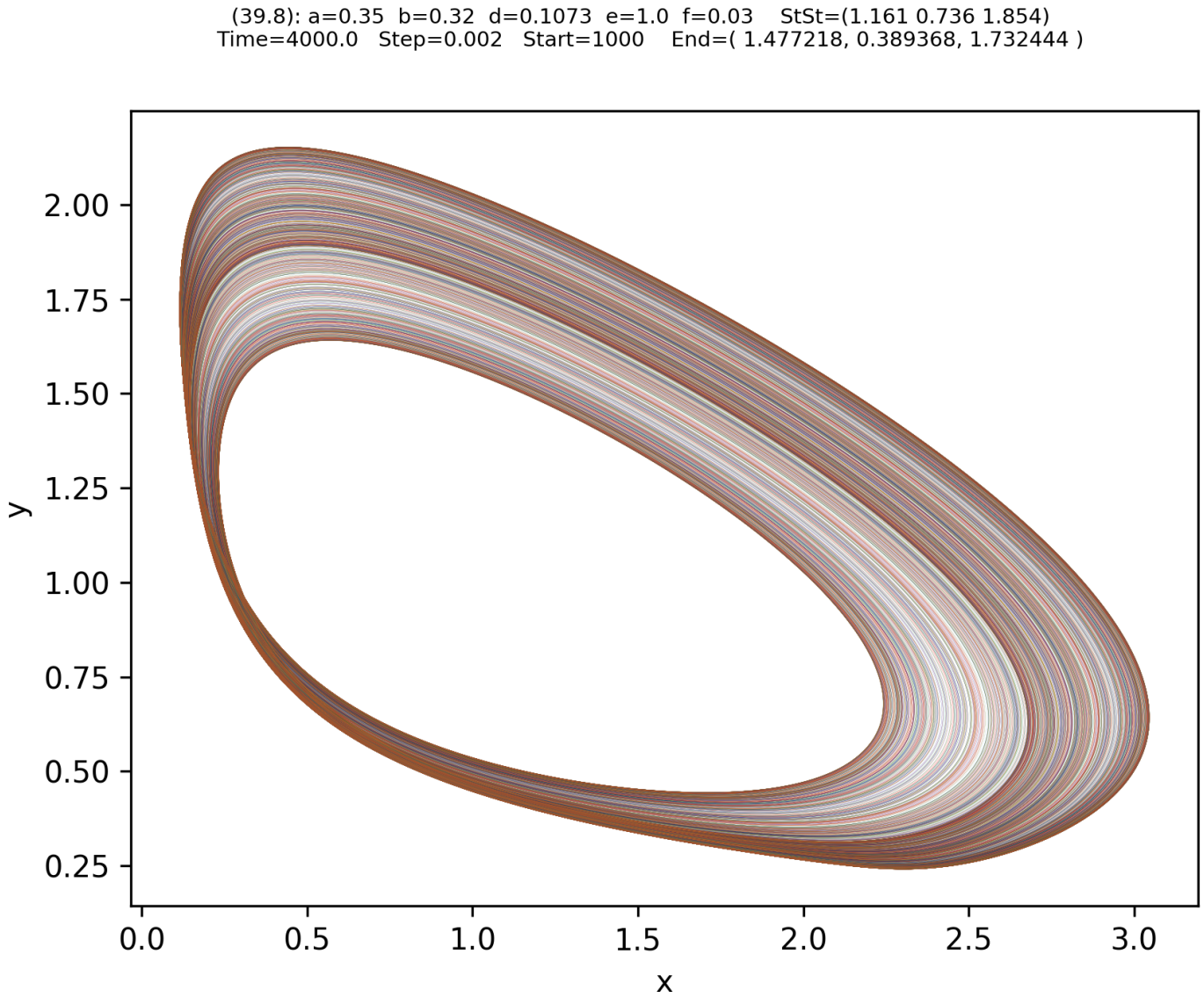
Legende: Chaos im **Beispiel 113**: $\lambda_1 = 0.016$ für: $a = 0.40925$, $b = 0.2$, $c = 0.15$, $d = 0.01$, $e = 0.1$, $f = 0.17$, $g = 2.4$, $h = 4.0$.



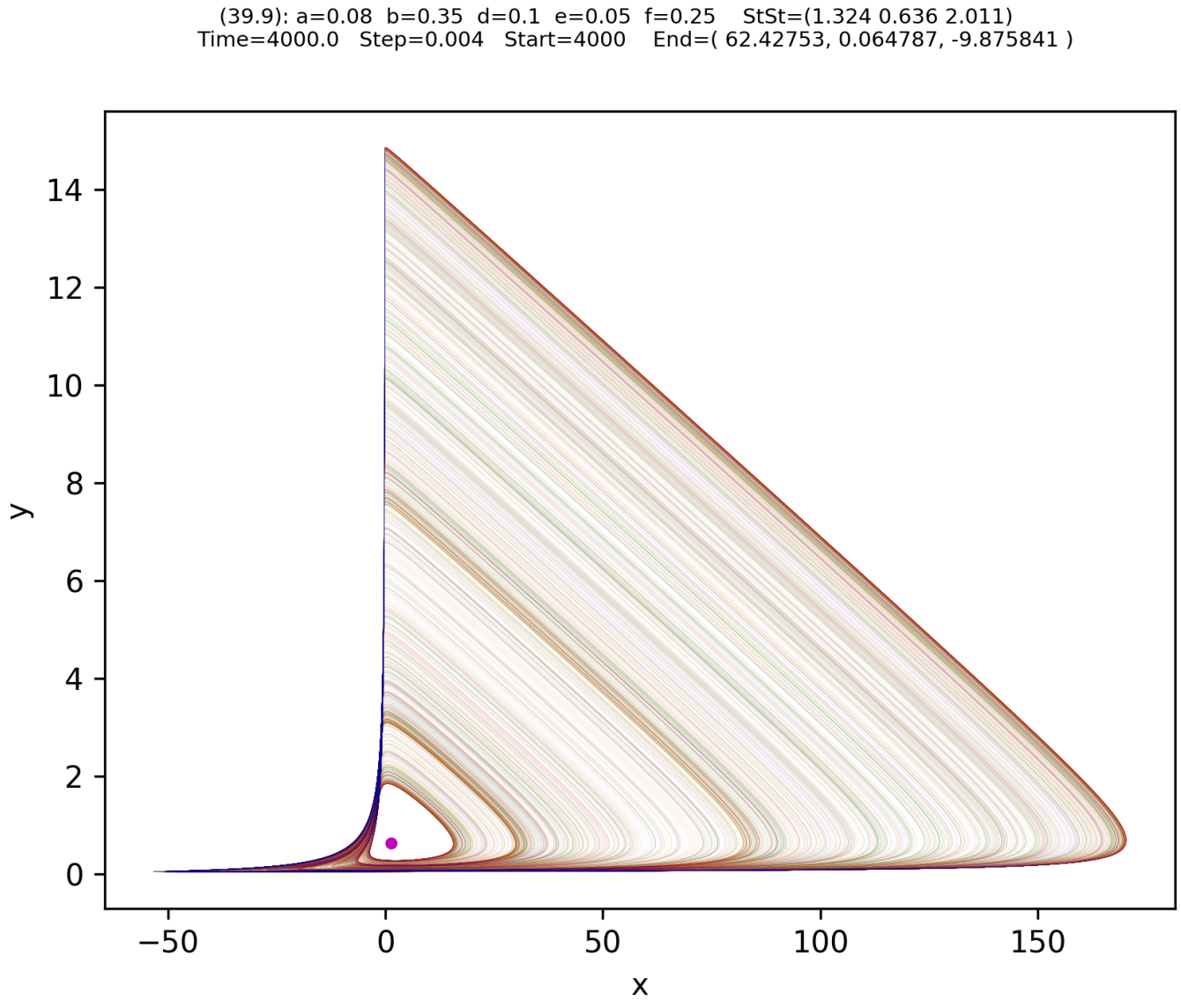
Legende: Doppel-Chaos im **Beispiel 114**: $\lambda_1 = 0.018,\ \lambda_1 = 0.045$ für: $a = 0.40712,\ b = 3.75,\ d = 0.5,\ e = 0.06$ und $f = 0.09$.



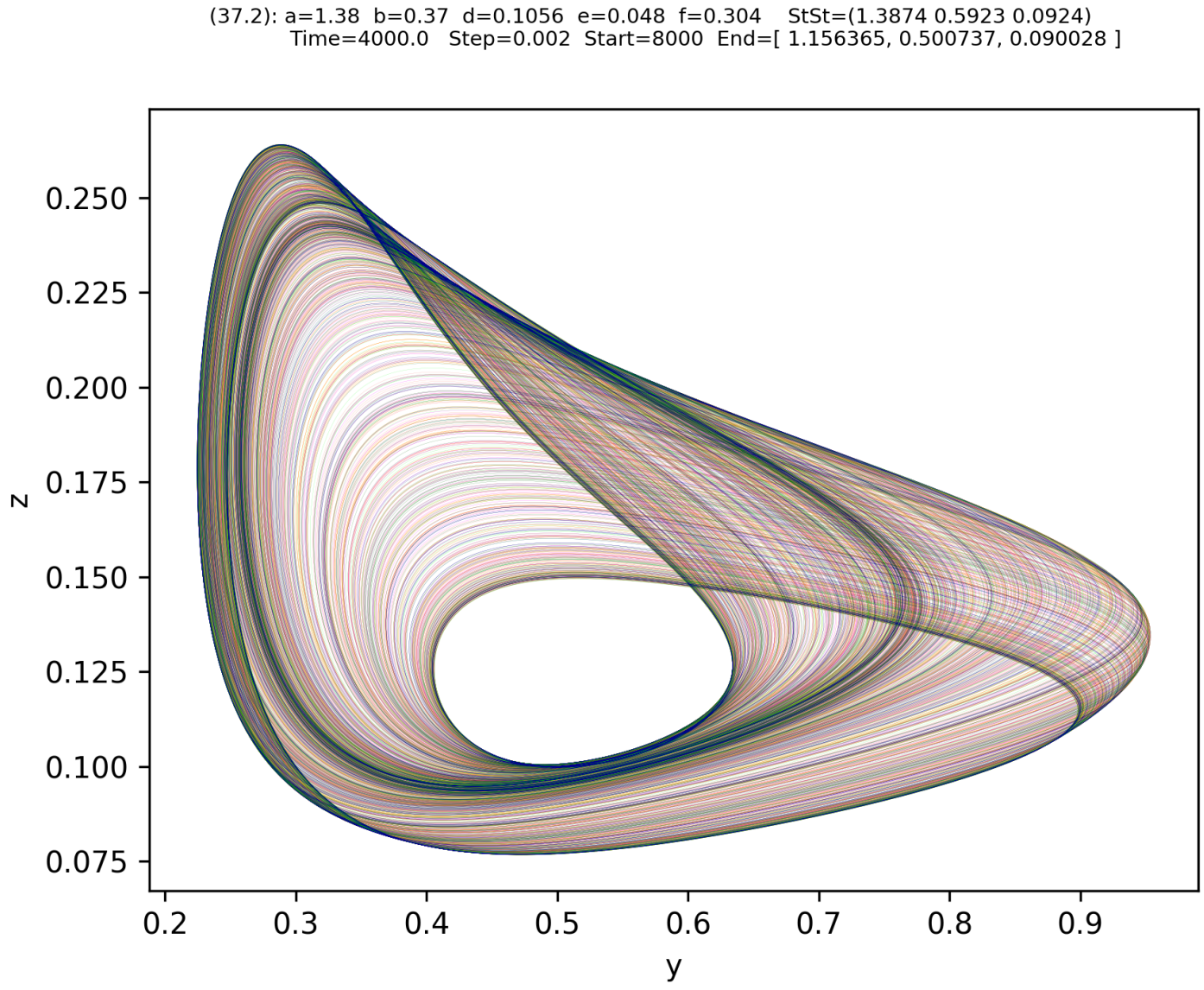
Legende: Chaos im **Beispiel 115**: $\lambda_1 = 0.014$
für: $a = 0.35$, $b = 0.32$, $d = 0.1073$, $e = 1.0$ und $f = 0.03$.



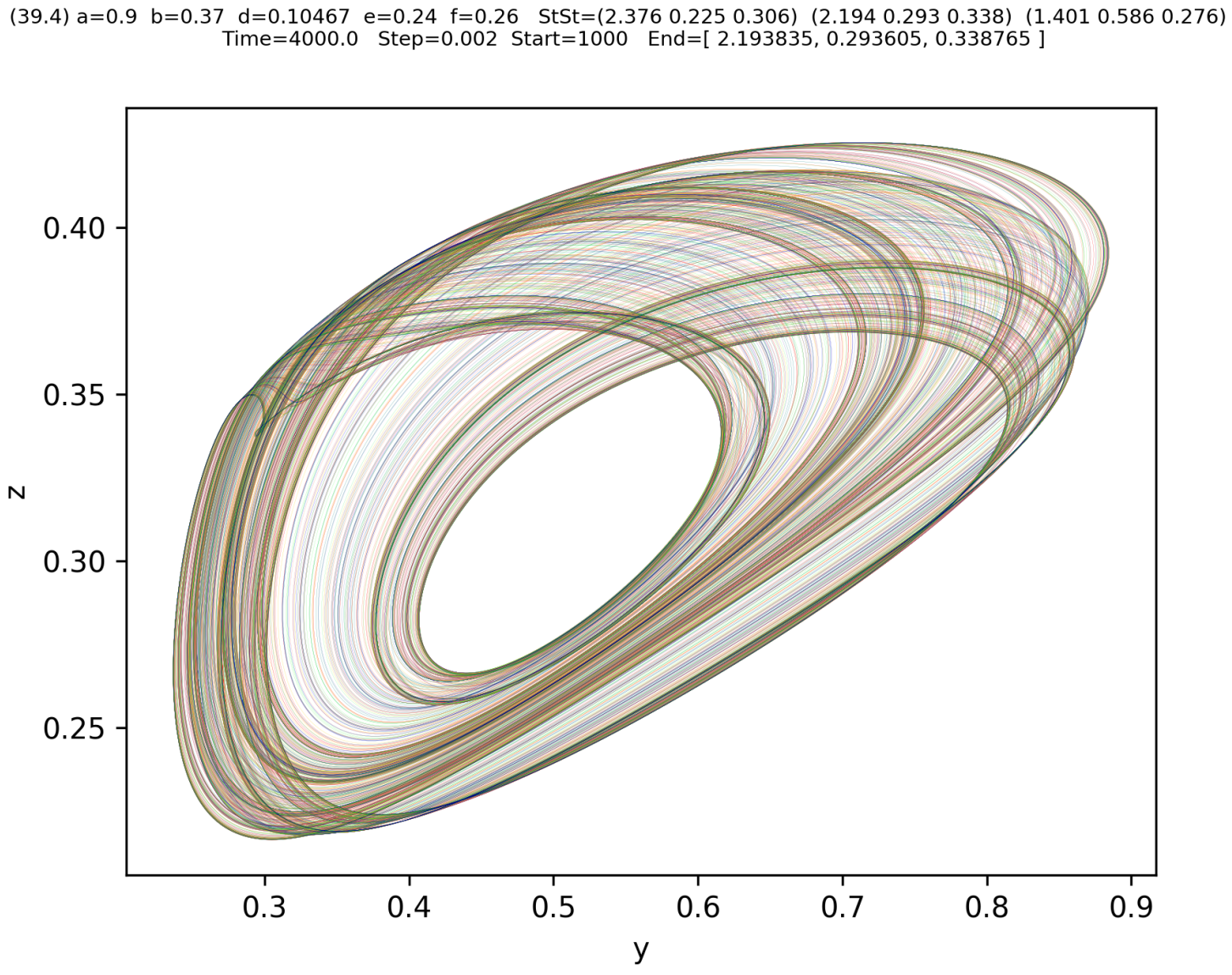
Legende: Chaos im **Beispiel 116**: $\lambda_1 = 0.024$
für: $a = 0.08$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 0.05$ und $f = 0.25$.



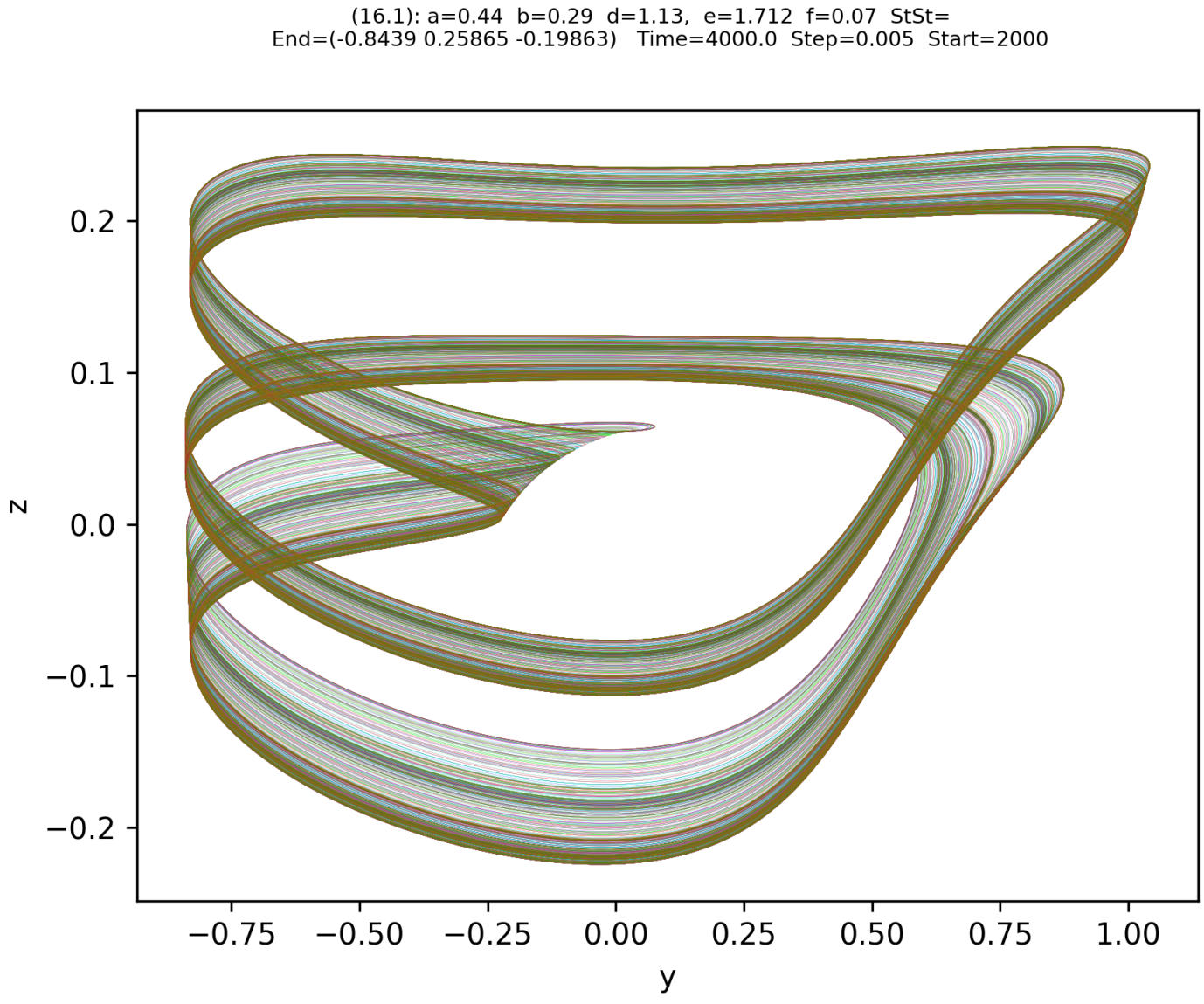
Legende: Chaos im **Beispiel 117**: $\lambda_1 = 0.024$
für: $a = 1.38$, $b = 0.37$, $d = 0.1056$, $e = 0.048$ und $f = 0.304$.



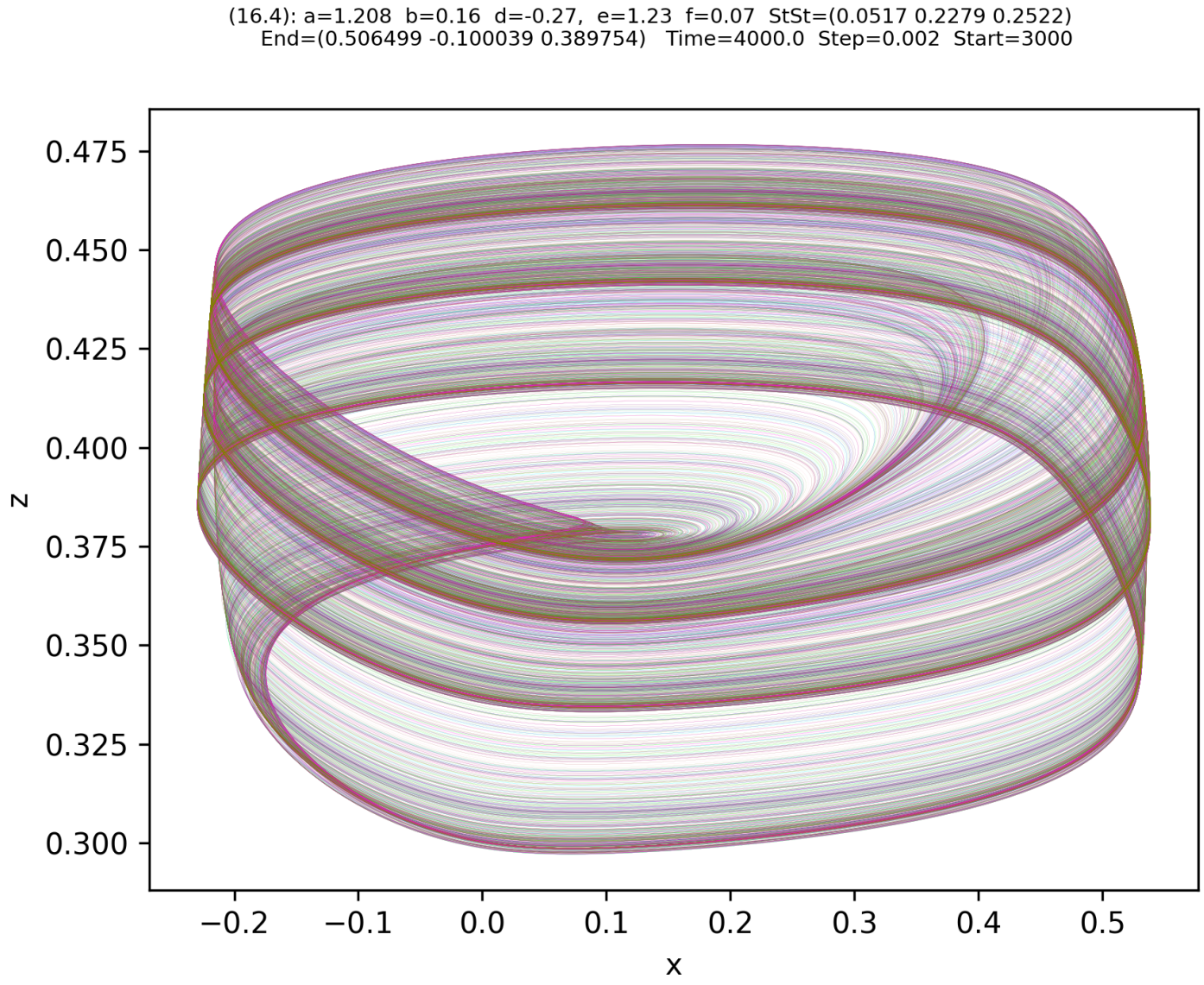
Legende: Chaos im **Beispiel 118**: $\lambda_1 = 0.013 \pm 0.006$
für: $a = 0.9$, $b = 0.37$, $d = 0.10467$, $e = 0.24$ und $f = 0.26$.



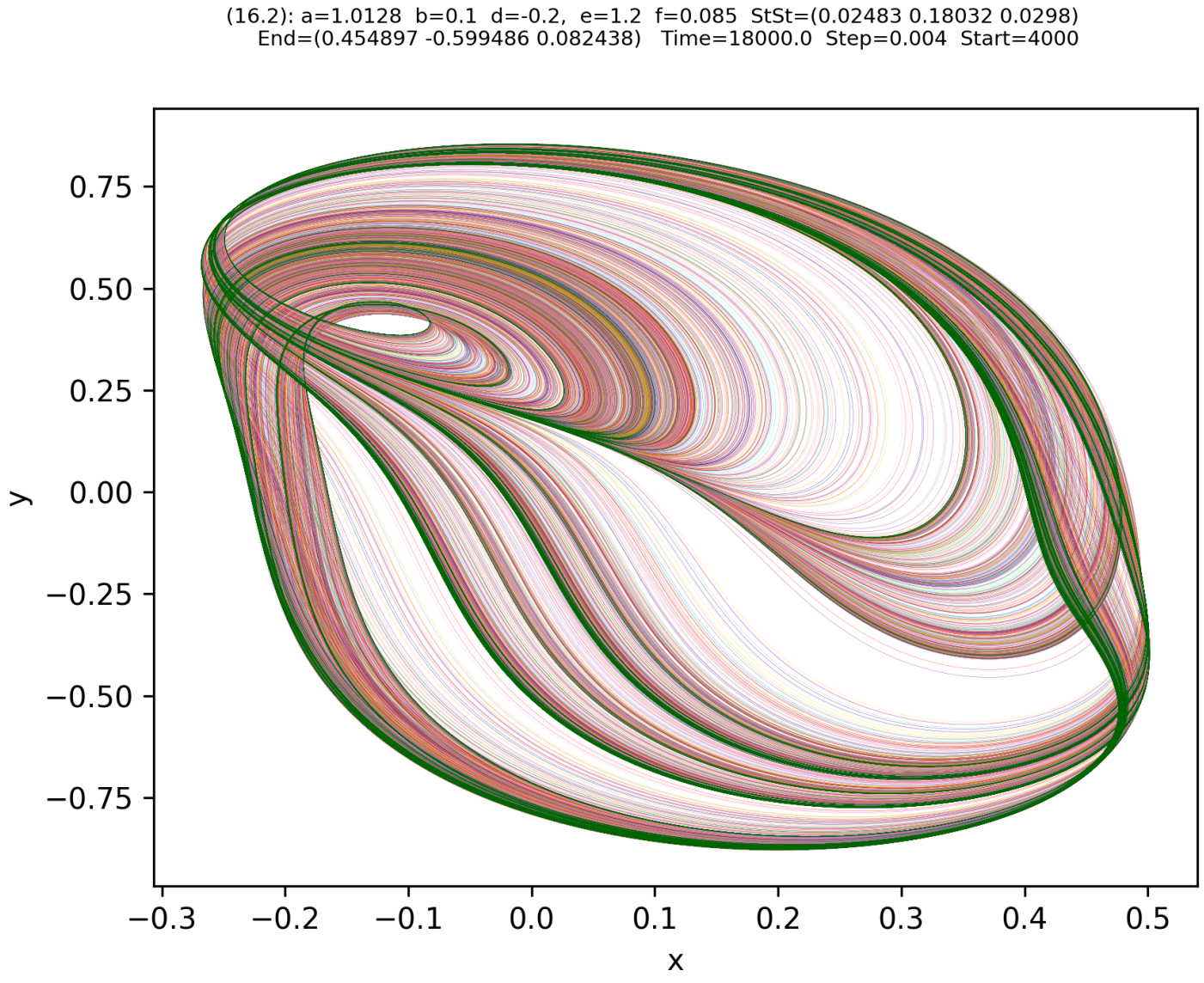
Legende: Chaos im **Beispiel 119**: $\lambda_1 = 0.009$
für: $a = 0.44$, $b = 0.29$, $d = 1.13$, $e = 1.712$ und $f = 0.07$.



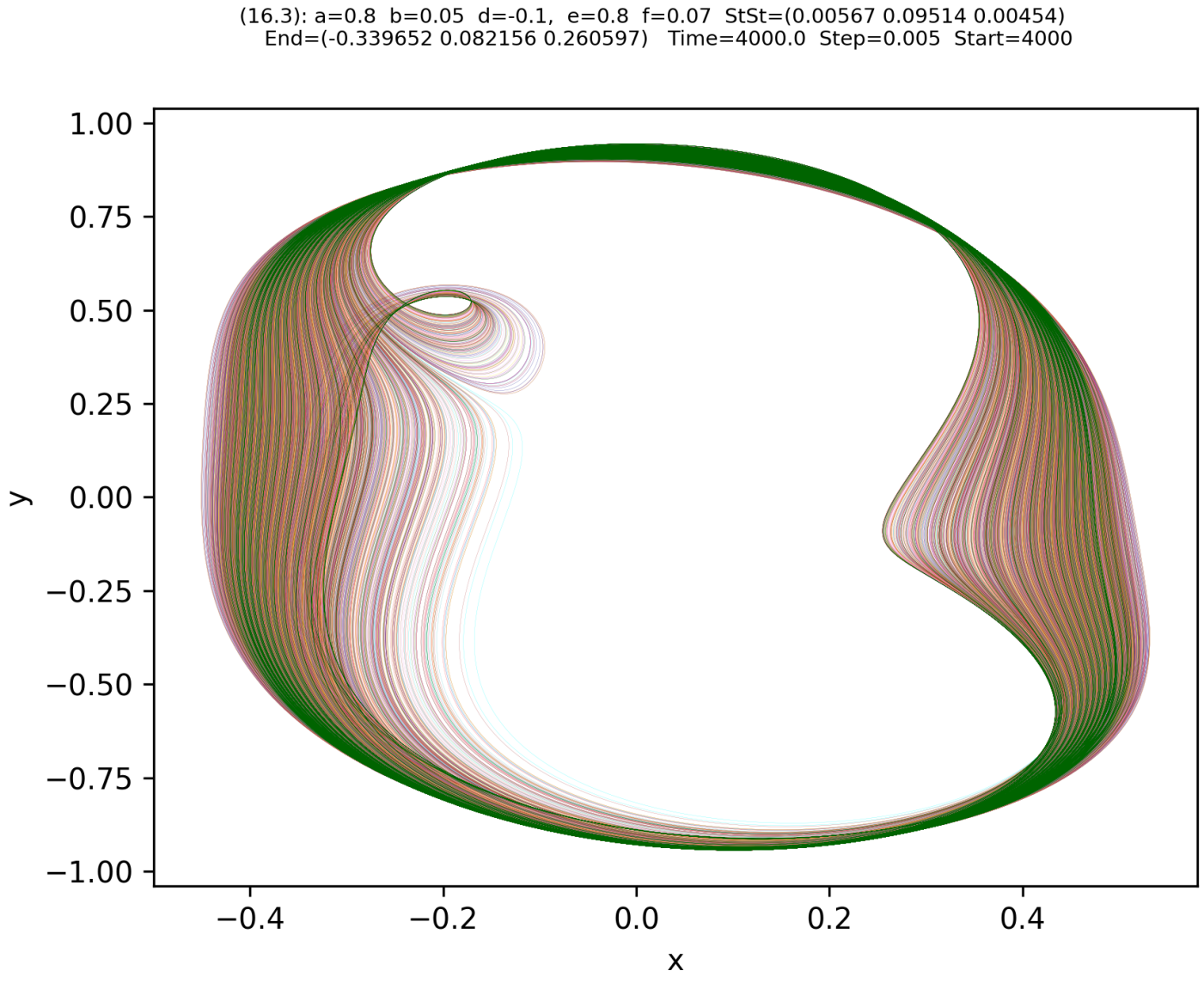
Legende: Chaos im **Beispiel 120**: $\lambda_1 = 0.027$
für: $a = 1.208\, b = 0.16,\ d = -0.27,\ e = 1.23$ und $f = 0.07$.



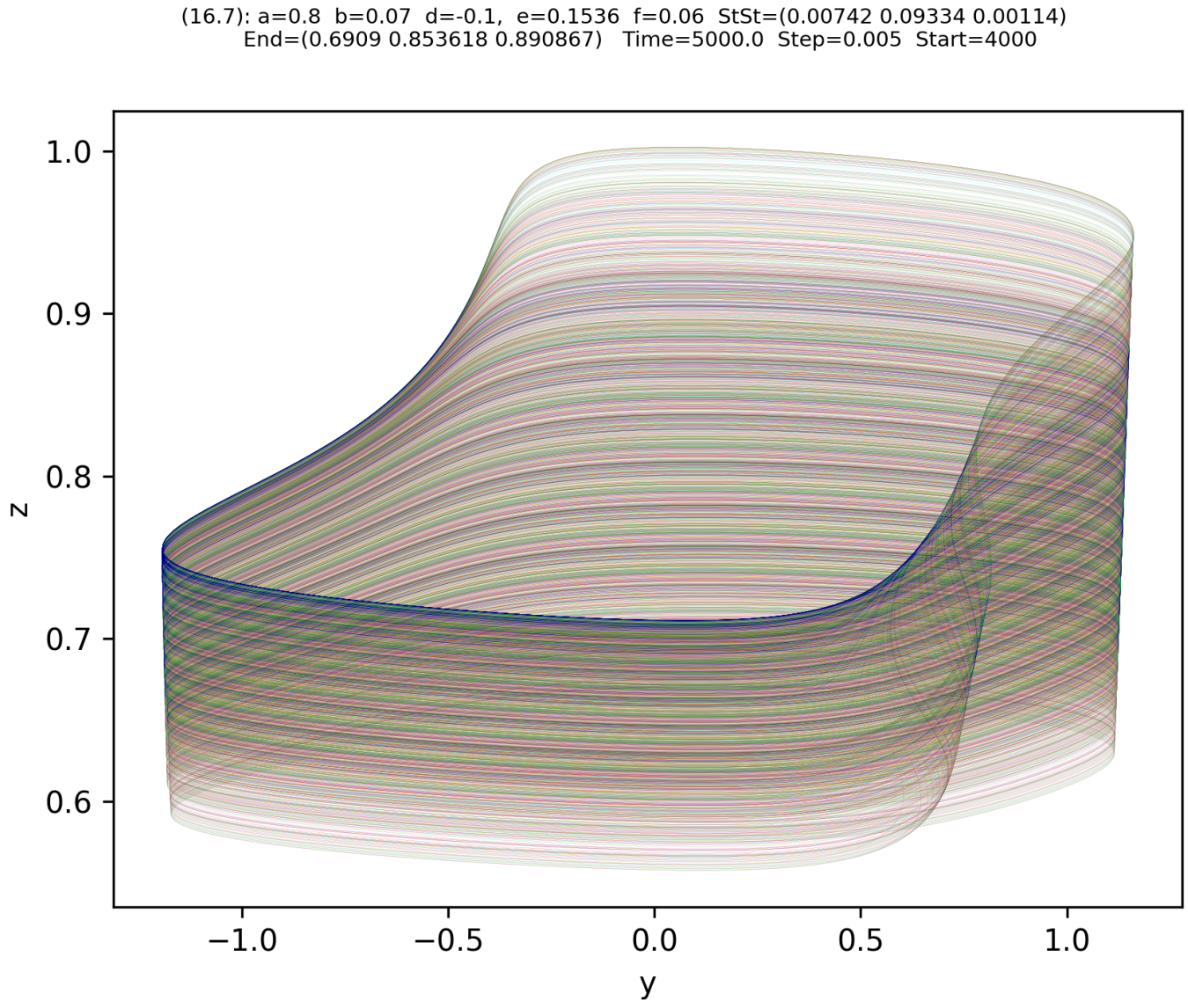
Legende: Chaos im **Beispiel 121**: $\lambda_1 = 0.010$
für: $a = 1.0128\, b = 0.1,\ d = -0.2,\ e = 1.2$ und $f = 0.085$.



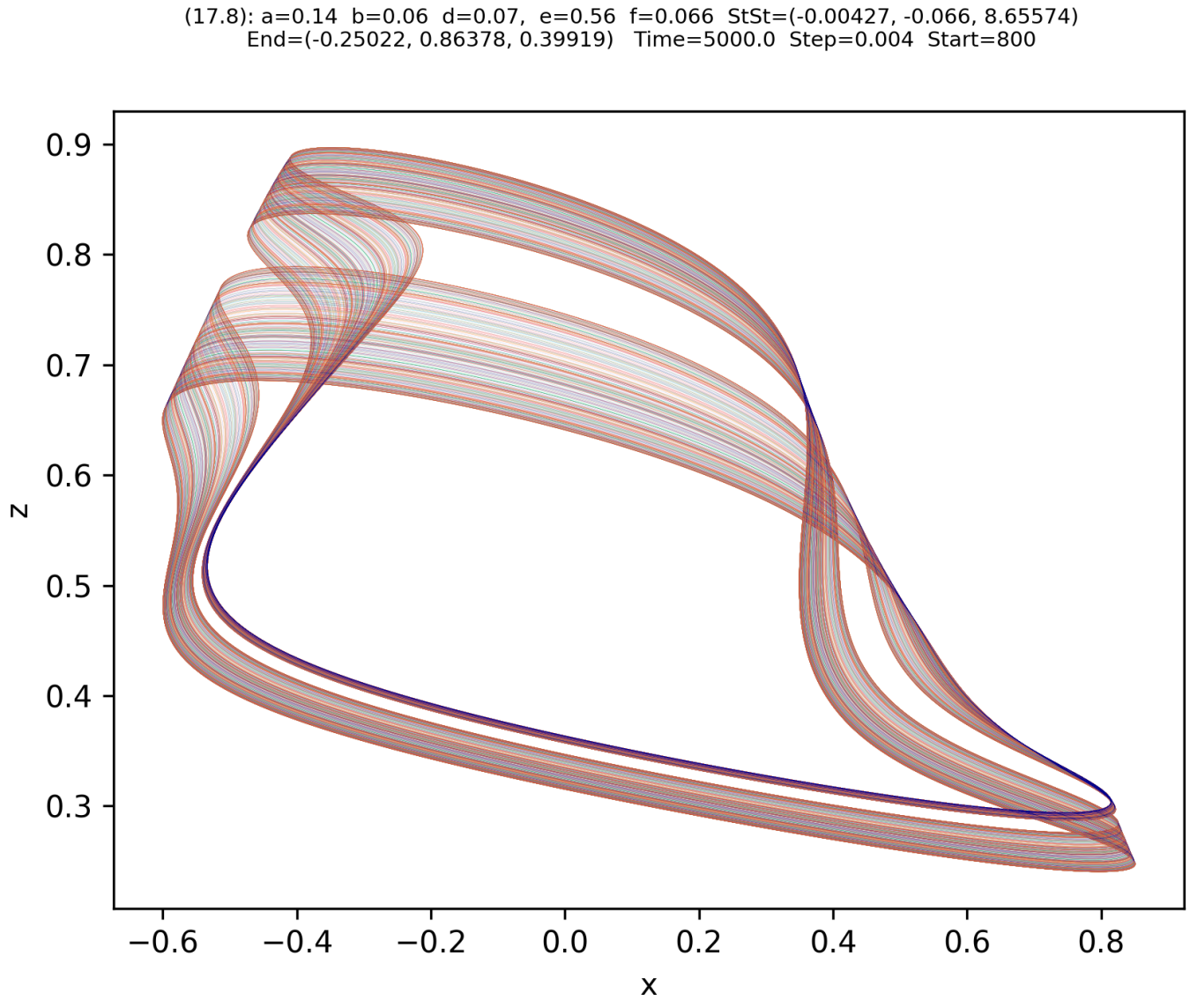
Legende: Chaos im **Beispiel 122**: $\lambda_1 = 0.018$
für: $a = 0.8\, b = 0.05,\ d = -0.1,\ e = 0.8$ und $f = 0.07$.



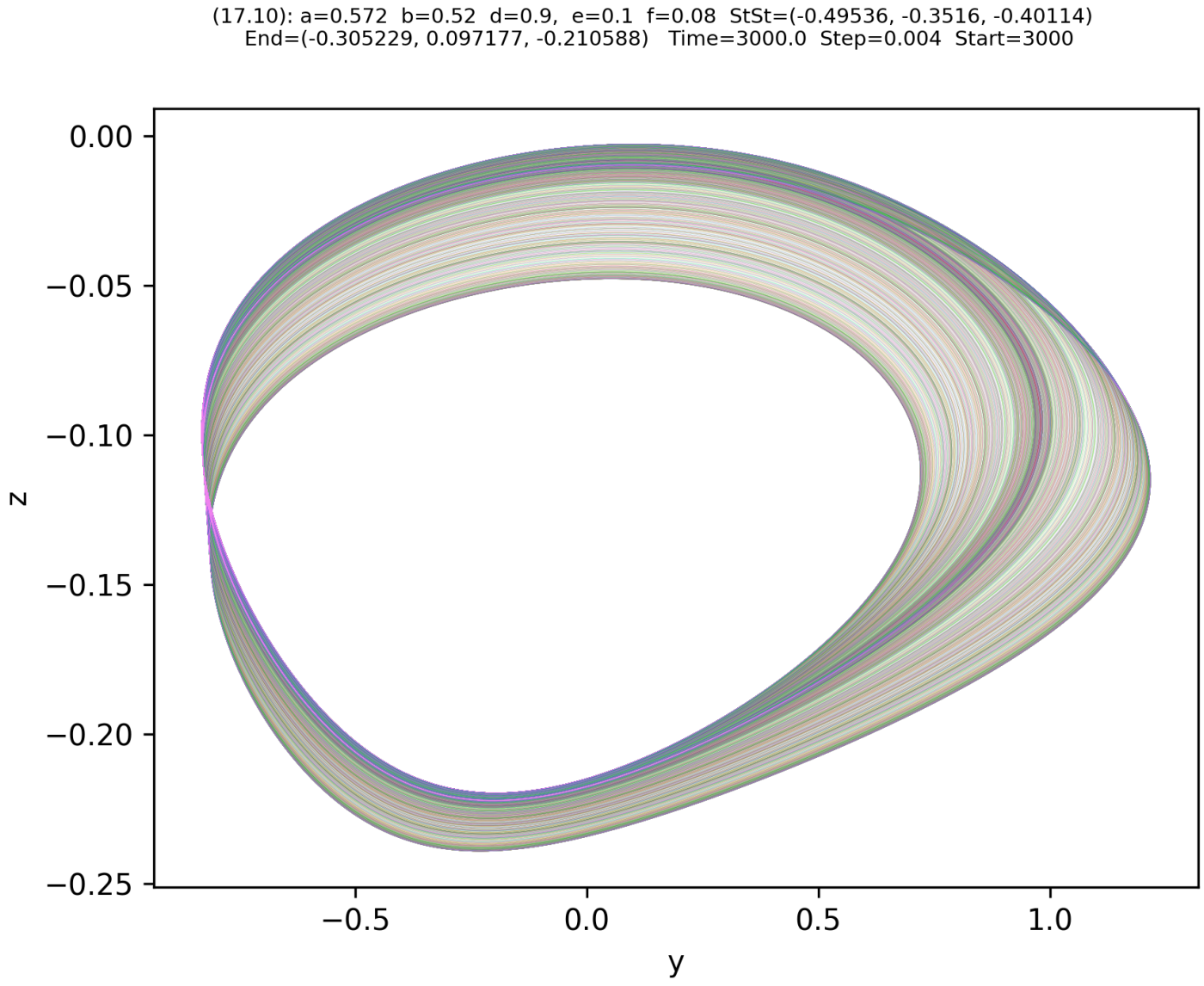
Legende: Chaos im **Beispiel 123**: $\lambda_1 = 0.039$
für: $a = 0.8$, $b = 0.07$, $d = -0.1$, $e = 0.1536$ und $f = 0.06$.



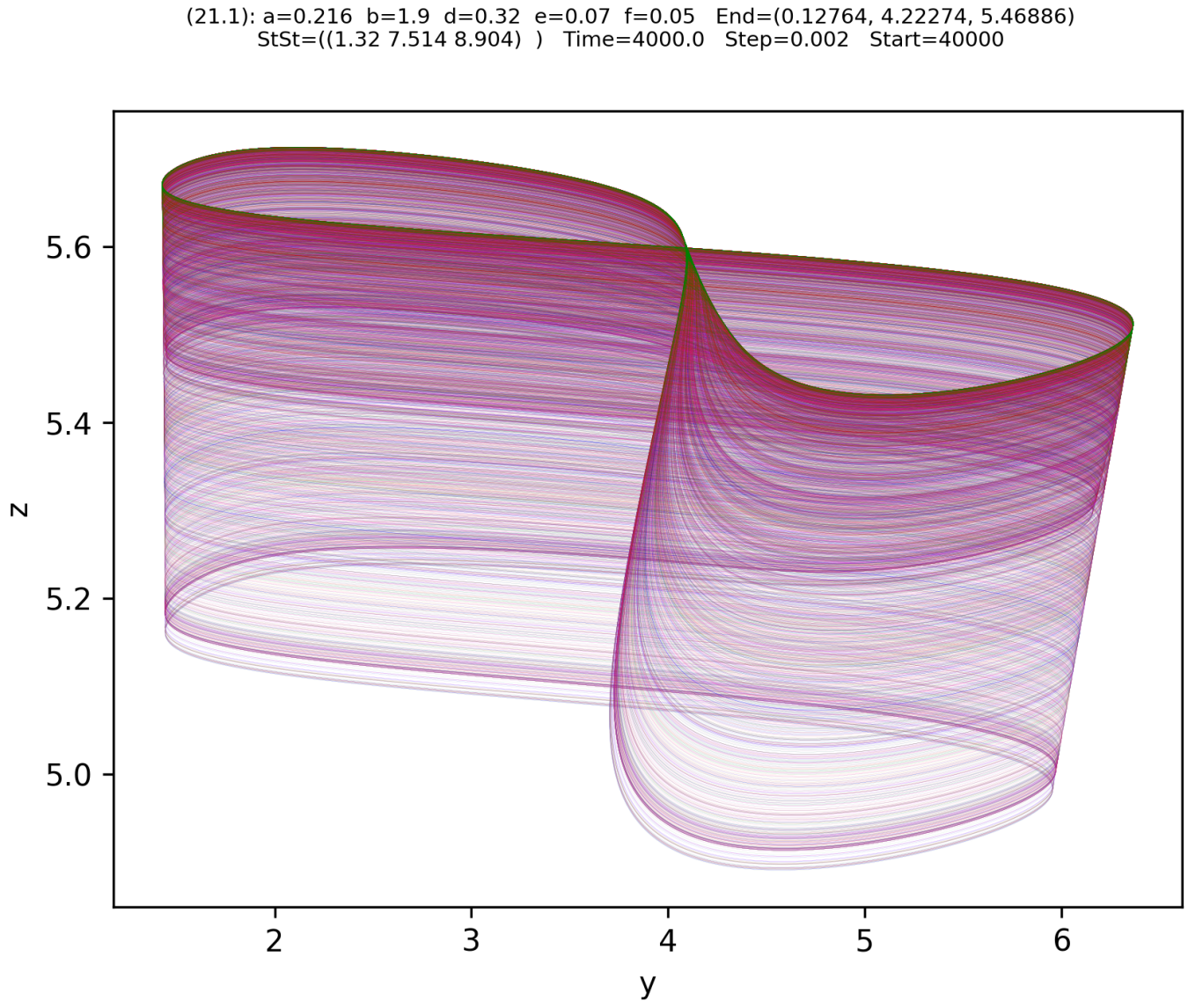
Legende: Chaos im **Beispiel 124**: $\lambda_1 = 0.005$
für: $a = 0.14$, $b = 0.06$, $d = 0.07$, $e = 0.56$ und $f = 0.066$.



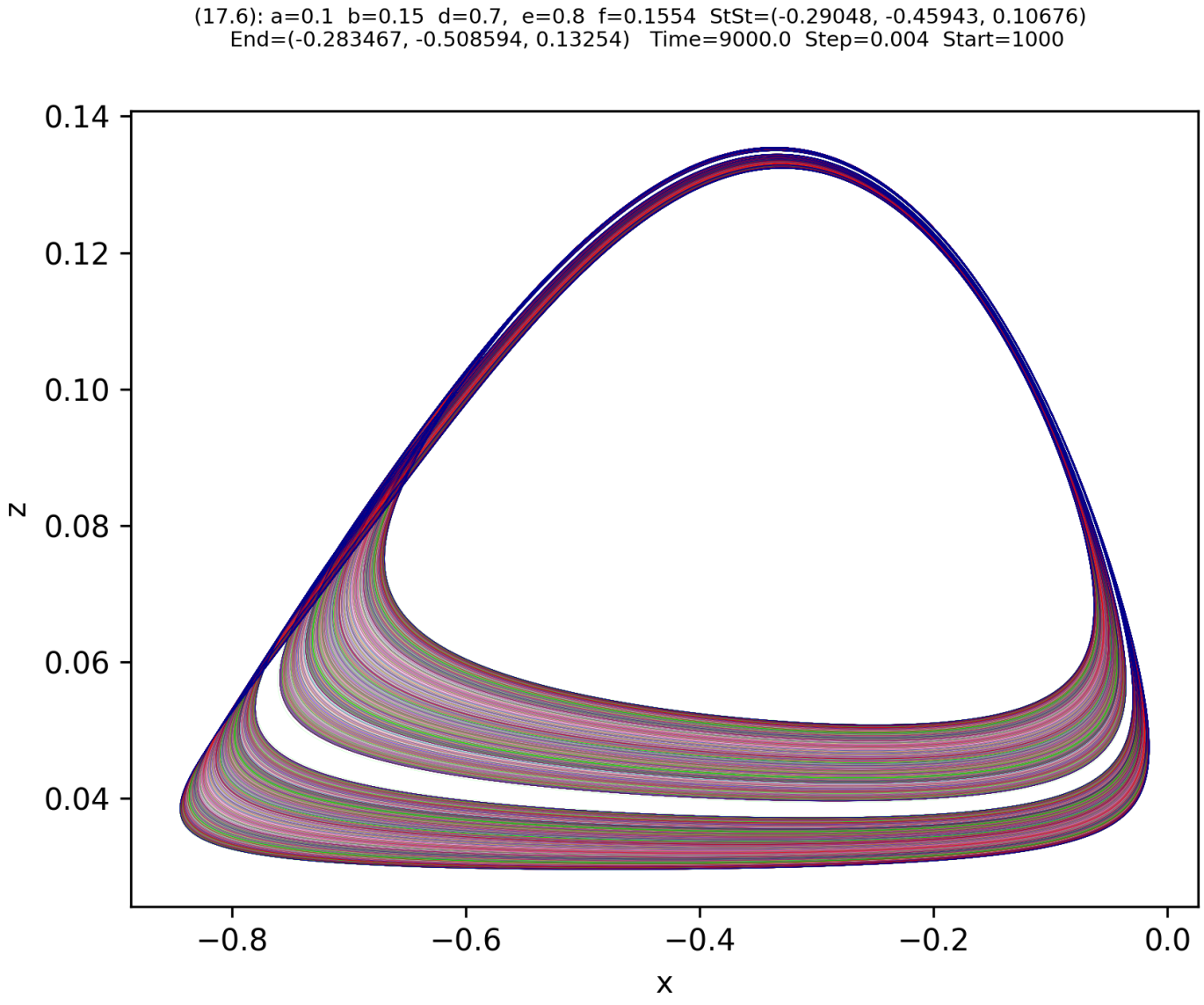
Legende: Chaos im **Beispiel 125**: $\lambda_1 = 0.035$
für: $a = 0.572$, $b = 0.52$, $d = 0.9$, $e = 0.1$ und $f = 0.08$.



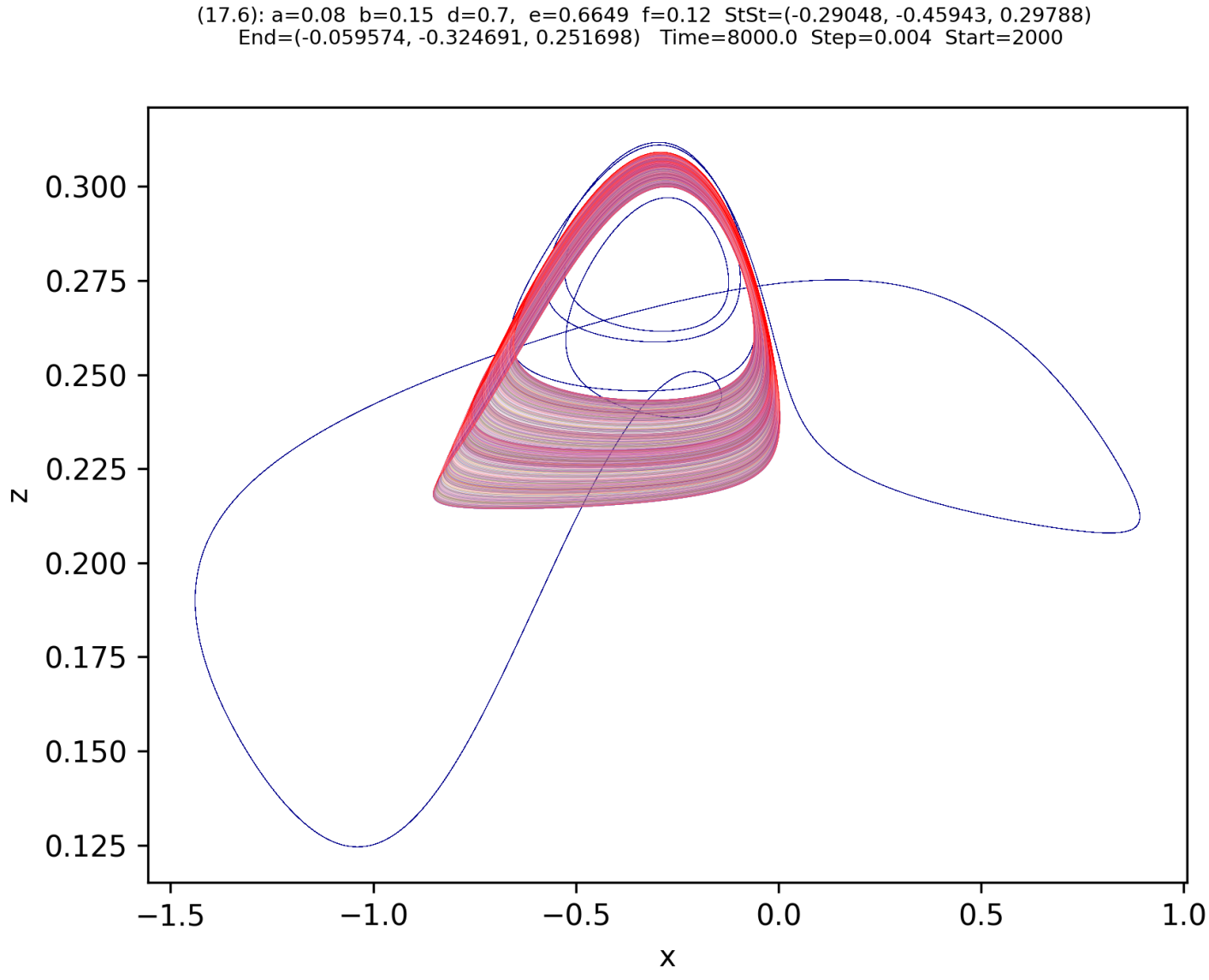
Legende: Chaos im **Beispiel 126**: $\lambda_1 = 0.059$
für: $a = 0.216$, $b = 1.9$, $d = 0.32$, $e = 0.07$ und $f = 0.05$.



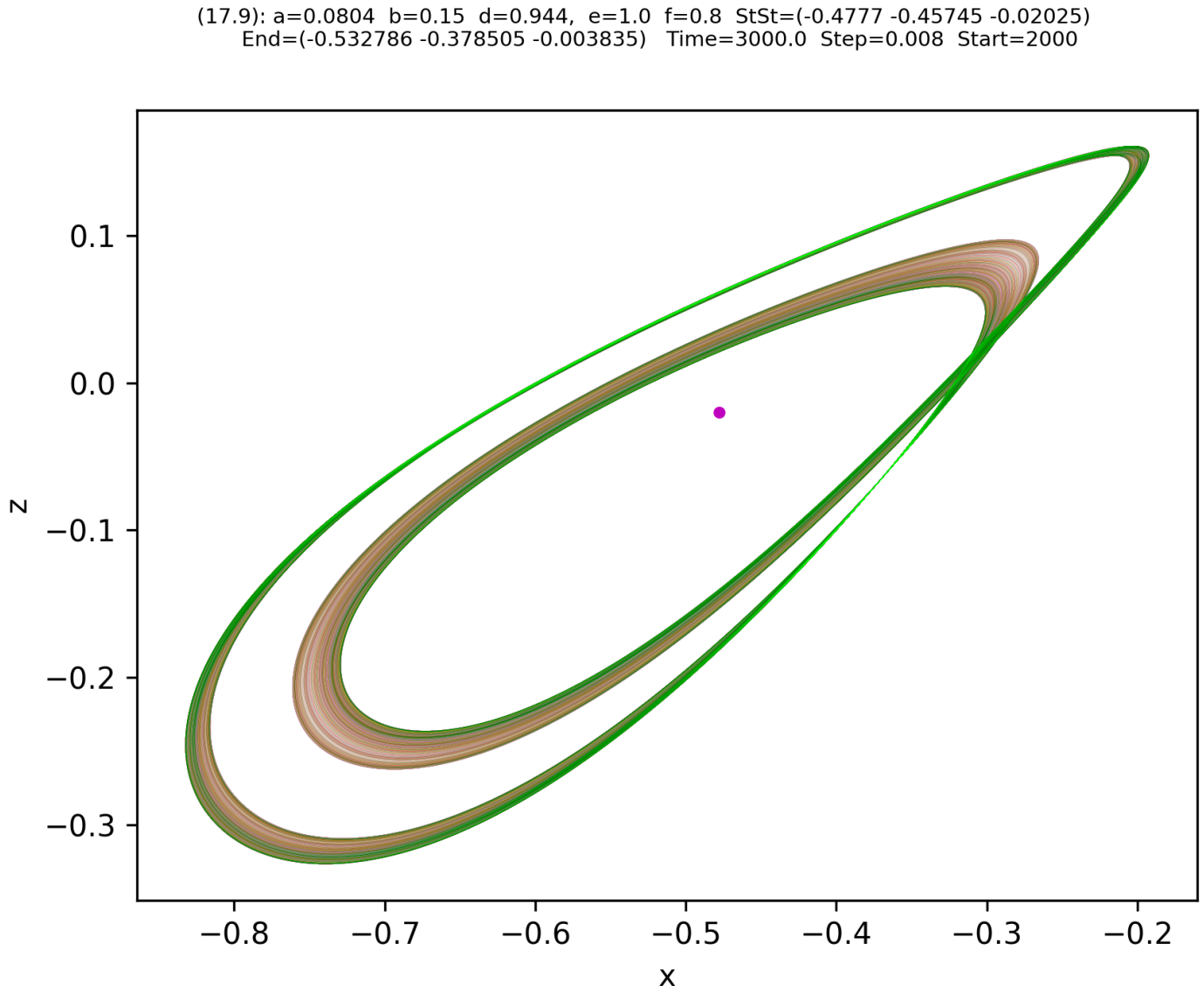
Legende: Chaos im **Beispiel 127**: $\lambda_1 = 0.010$
für: $a = 0.1$, $b = 0.15$, $d = 0.7$, $e = 0.8$ und $f = 0.1554$.



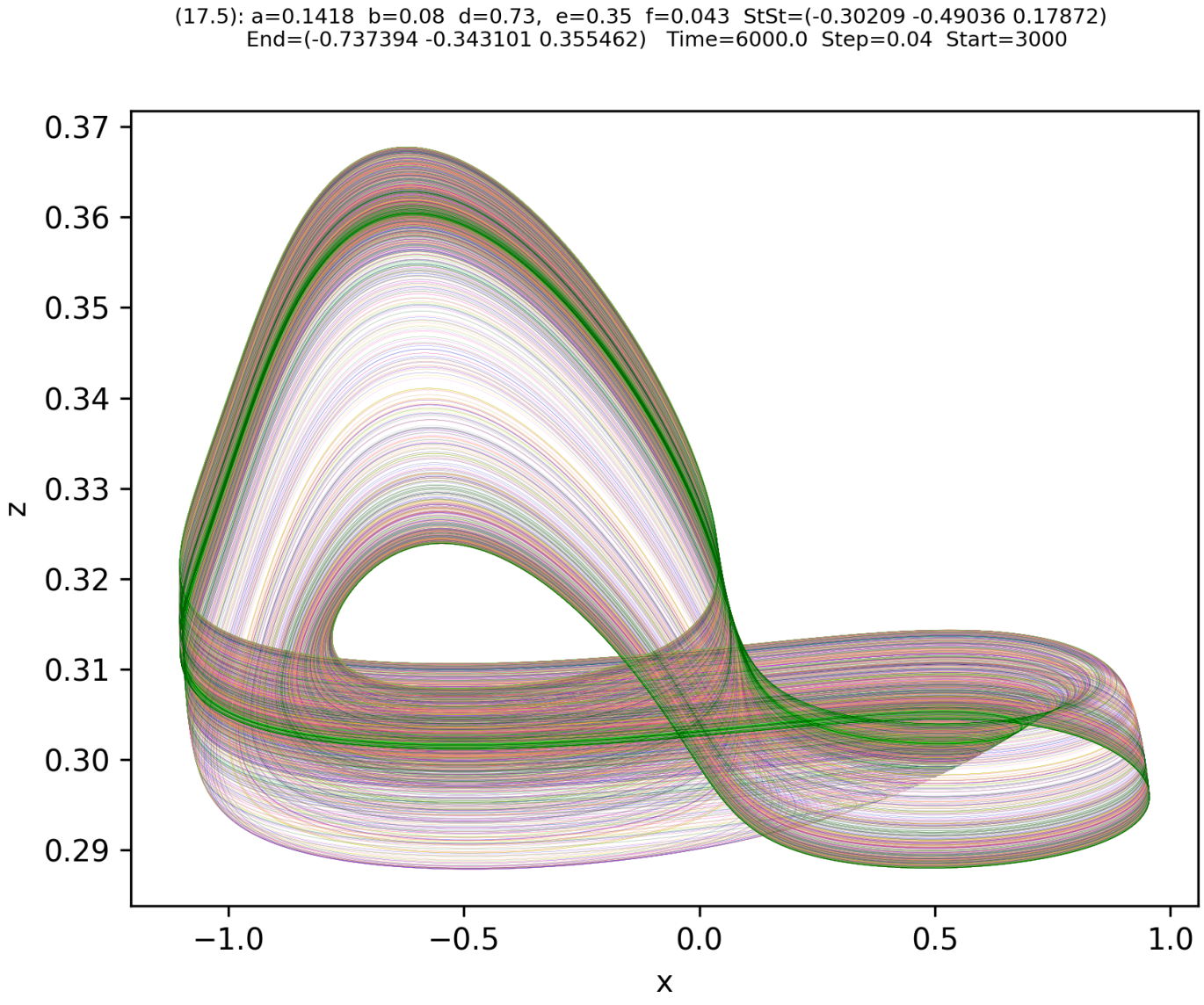
Legende: Chaos im **Beispiel 128**: $\lambda_1 = 0.014$
für: $a = 0.08$, $b = 0.15$, $d = 0.7$, $e = 0.6649$ und $f = 0.12$.
Koexistenz mit einem benachbarten Grenzzyklus (blau).



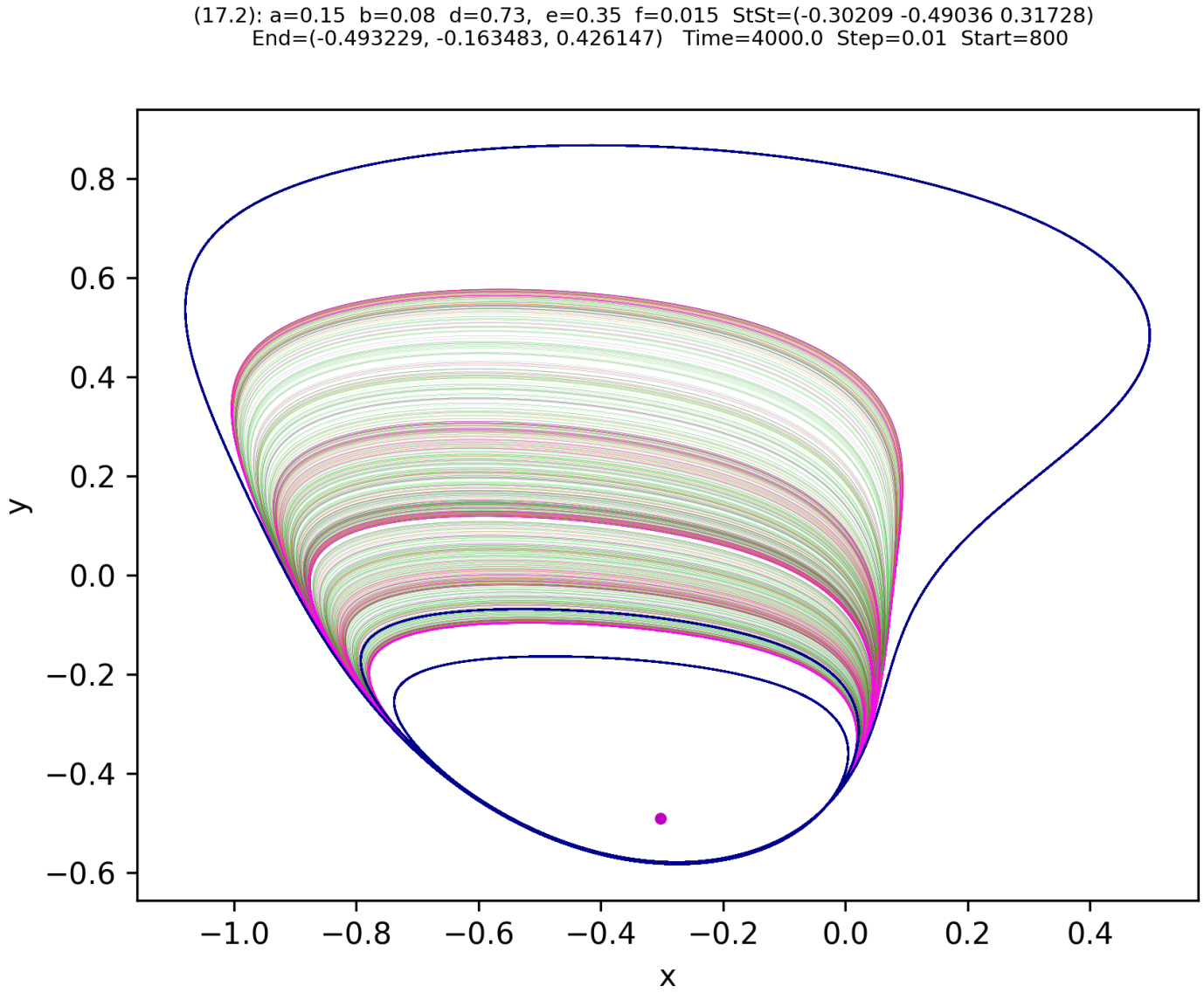
Legende: Chaos im **Beispiel 129**: $\lambda_1 = 0.019$
für: $a = 0.0804$, $b = 0.15$, $d = 0.944$, $e = 1.0$ und $f = 0.8$.



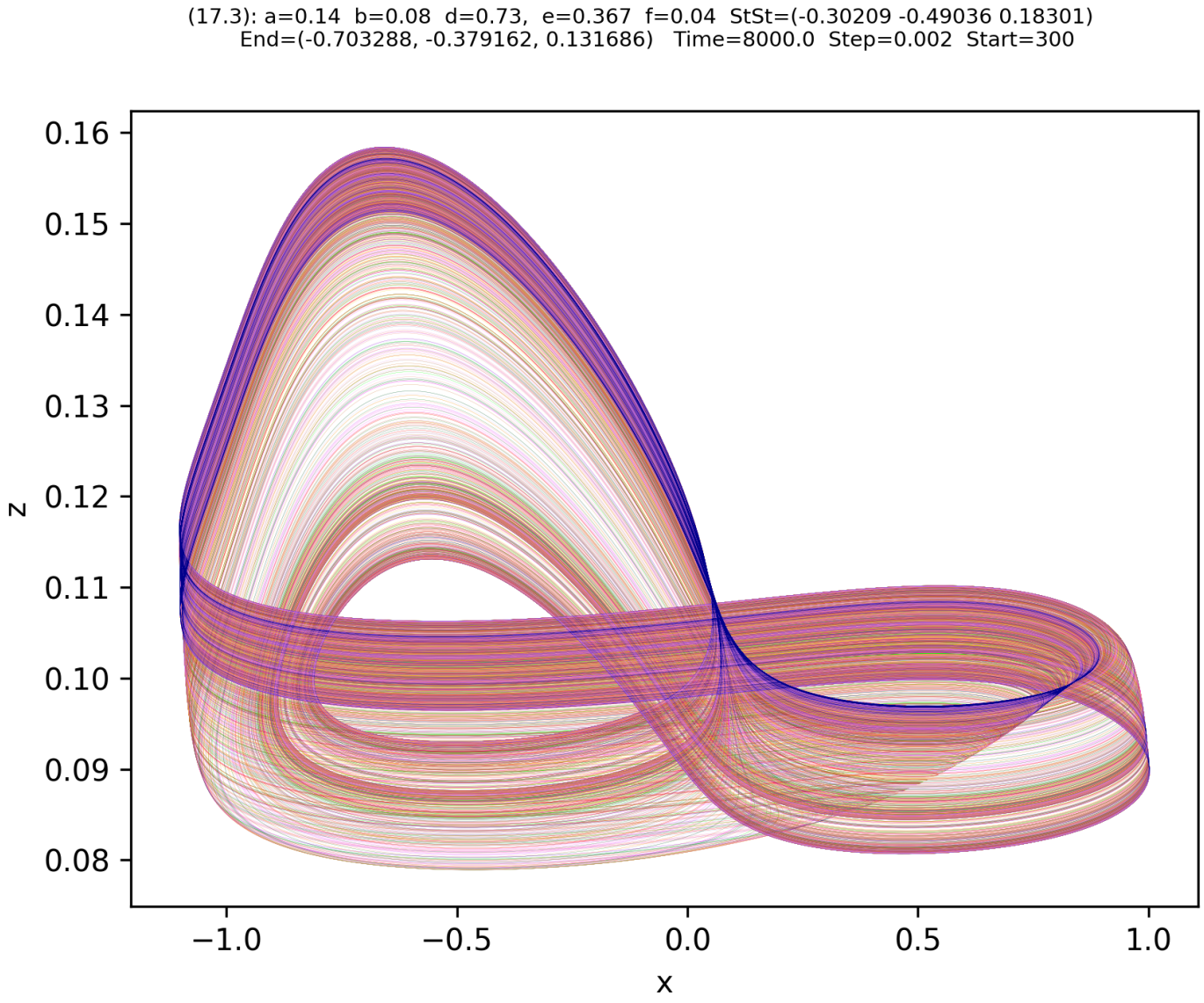
Legende: Chaos im **Beispiel 130**: $\lambda_1 = 0.012$
für: $a = 0.1418$, $b = 0.08$, $d = 0.73$, $e = 0,35$ und $f = 0.043$.



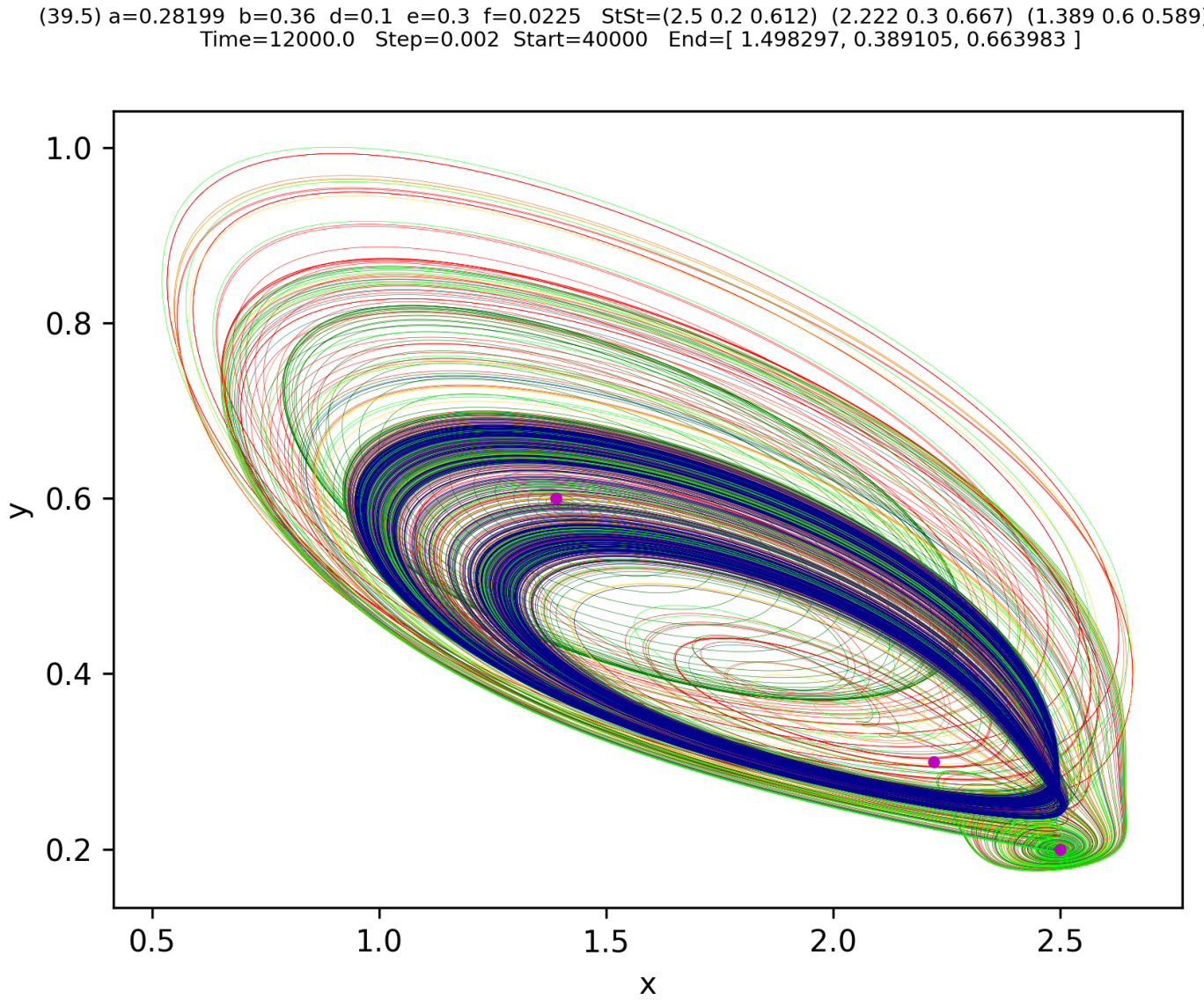
Legende: Chaos im **Beispiel 131**: $\lambda_1 = 0.015$
für: $a = 0.15$, $b = 0.08$, $d = 0.73$, $e = 0,35$ und $f = 0.015$.
Koexistenz mit einem benachbarten Grenzzyklus (blau).



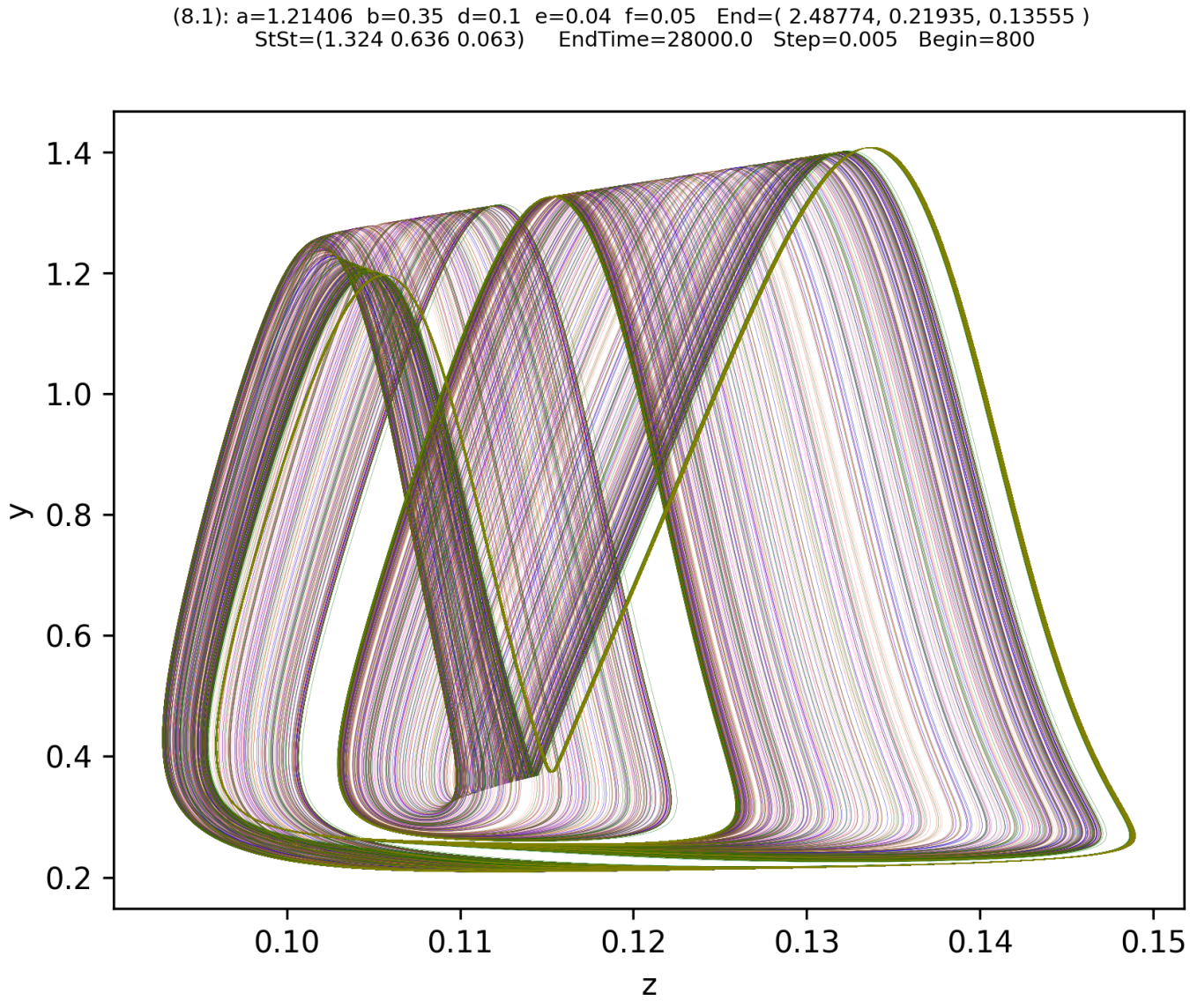
Legende: Chaos im **Beispiel 132**: $\lambda_1 = 0.013$
für: $a = 0.14$, $b = 0.08$, $d = 0.73$, $e = 0.367$ und $f = 0.04$.



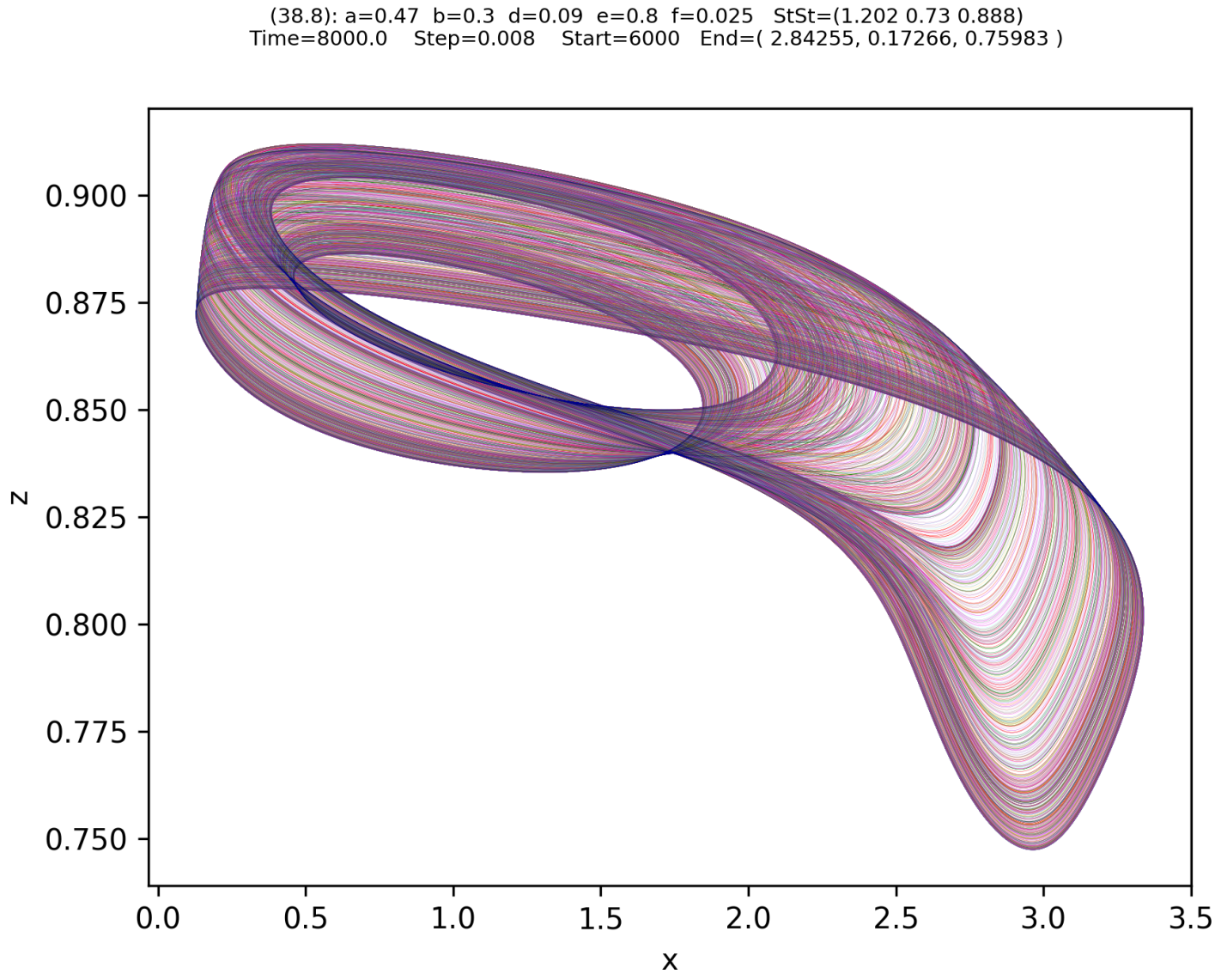
Legende: Chaos im **Beispiel 133**: $\lambda_1 = 0.004$
für: $a = 0.28199$, $b = 0.36$, $d = 0.1$, $e = 0.3$ und $f = 0.0225$.



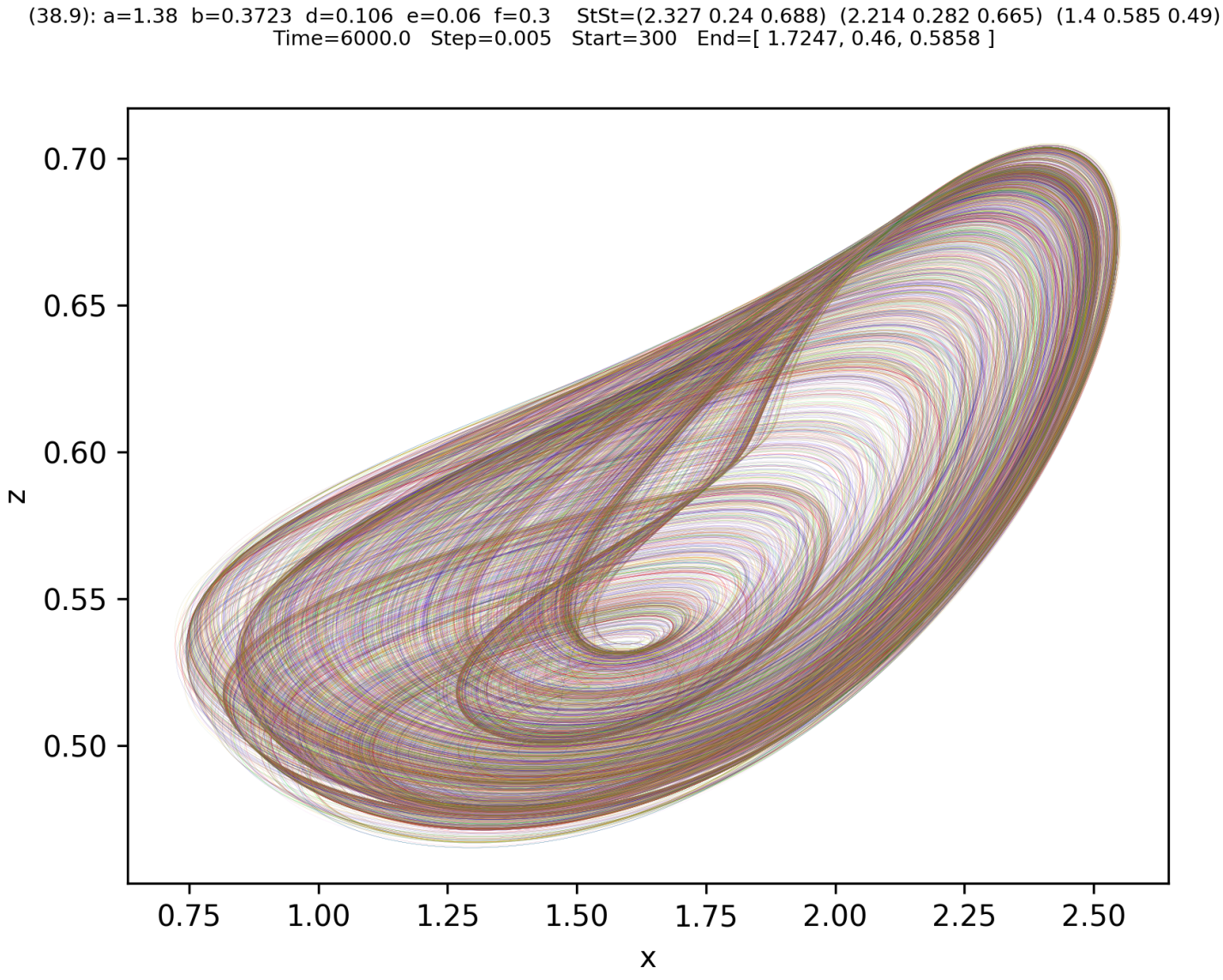
Legende: Chaos im **Beispiel 134**: $\lambda_1 = 0.002$
für: $a = 1.21406$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 0.04$ und $f = 0.05$.



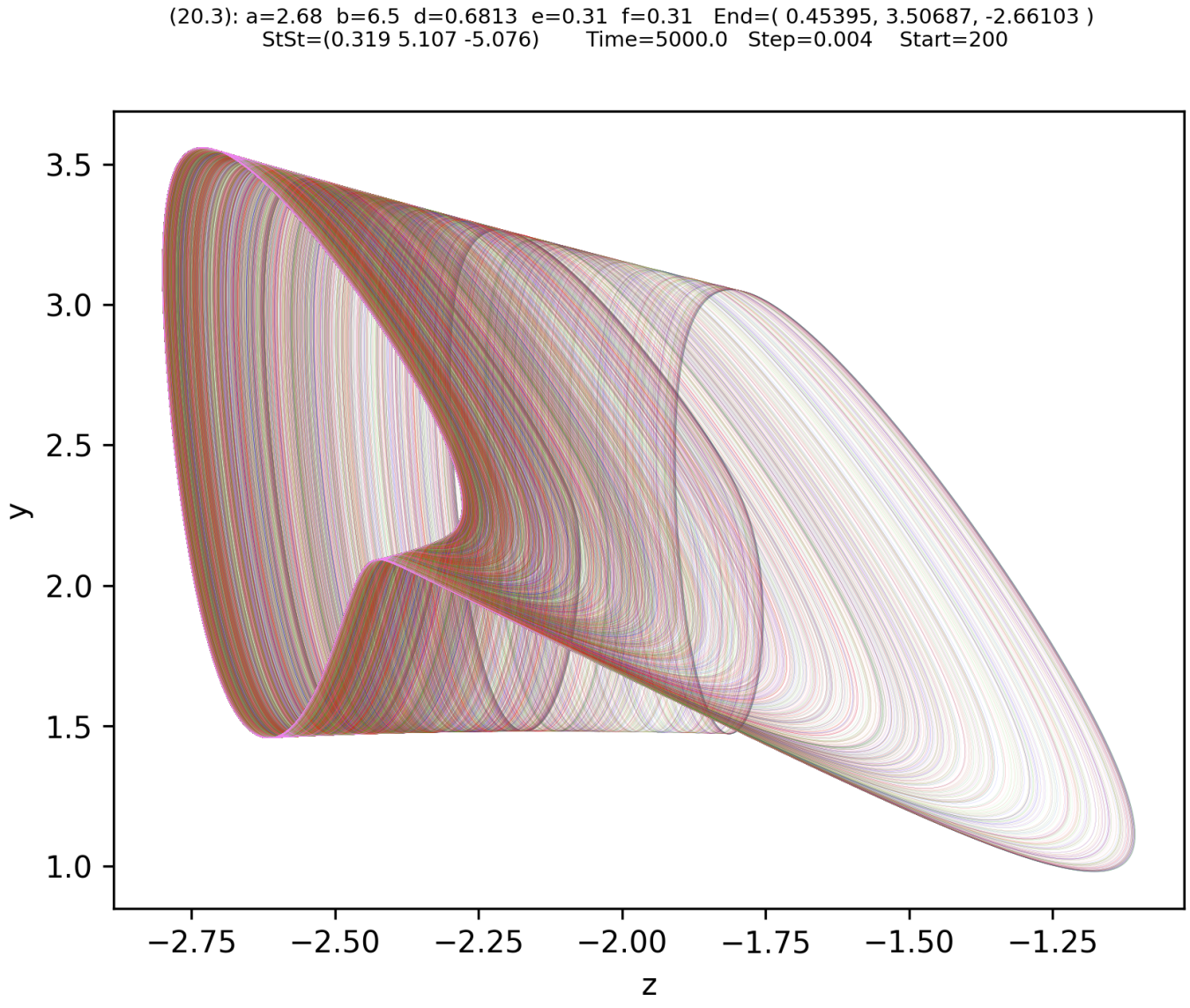
Legende: Chaos im **Beispiel 135**: $\lambda_1 = 0.006$
für: $a = 0.47$, $b = 0.3$, $d = 0.09$, $e = 0.8$ und $f = 0.025$.



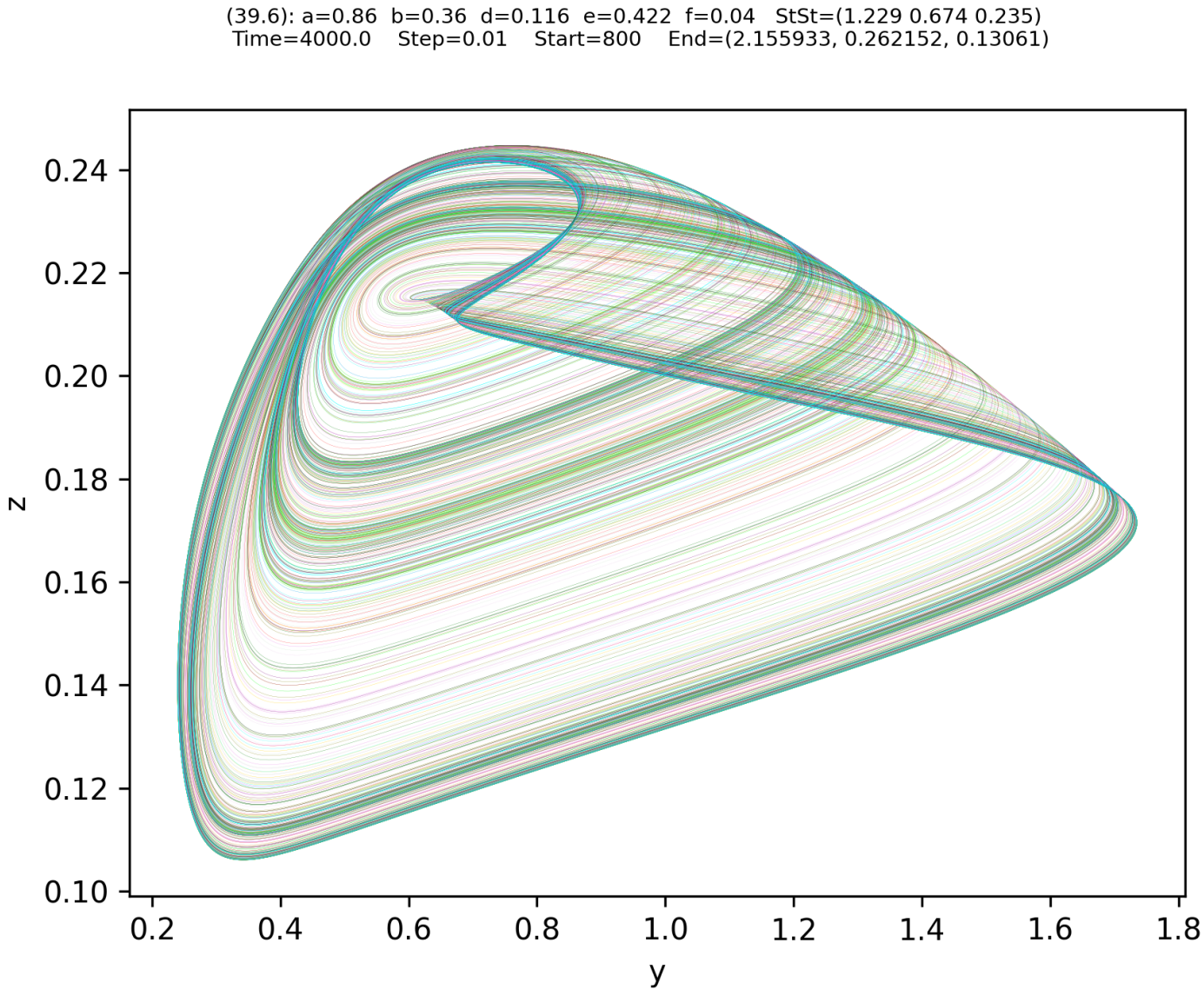
Legende: Chaos im **Beispiel 136**: $\lambda_1 = 0.030$
für: $a = 1.38$, $b = 0.3723$, $d = 0.106$, $e = 0.06$ und $f = 0.3$.



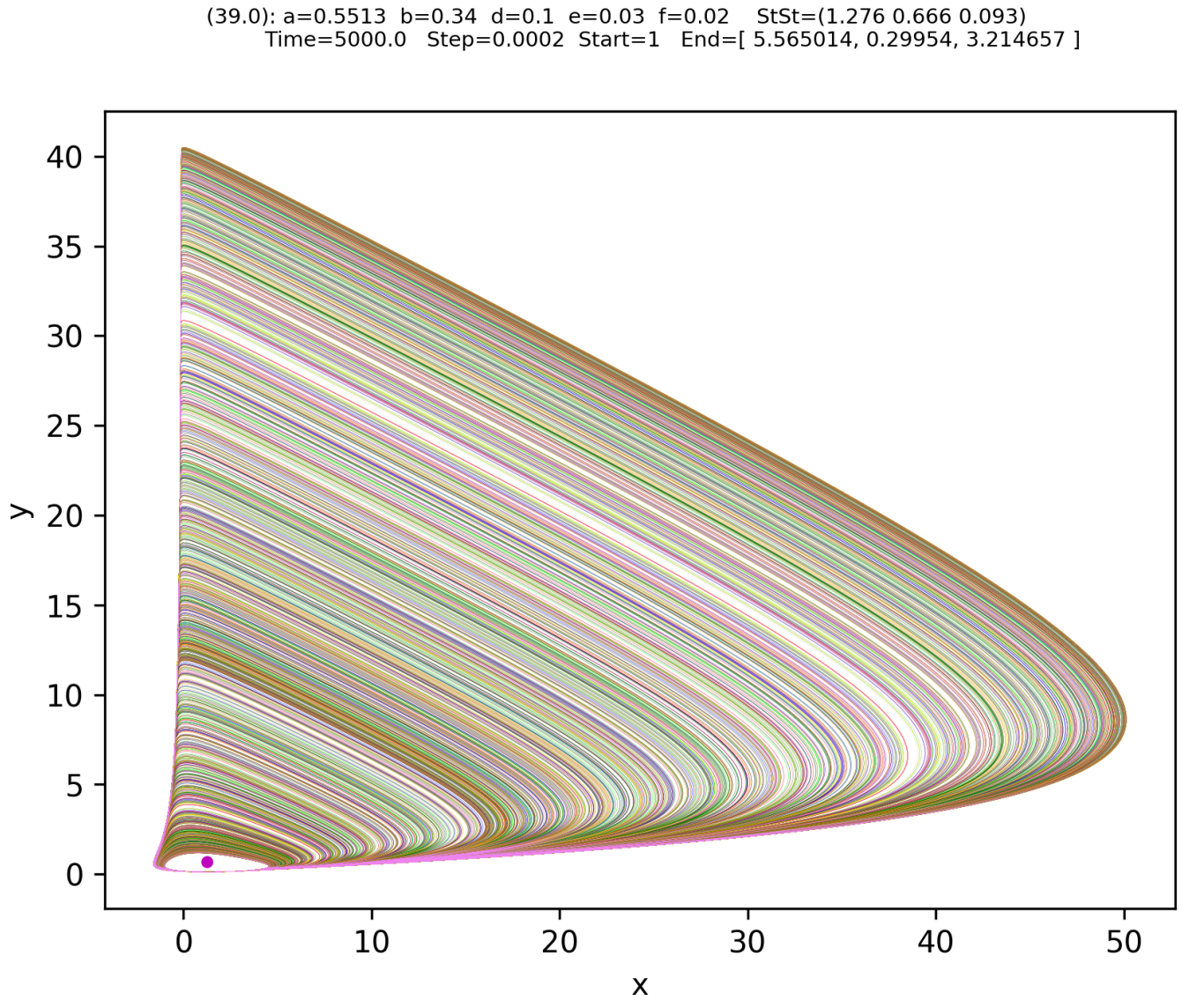
Legende: Chaos im **Beispiel 137**: $\lambda_1 = 0.069$
für: $a = 2.68$, $b = 6.5$, $d = 0.6813$, $e = 0.31$ und $f = 0.31$.



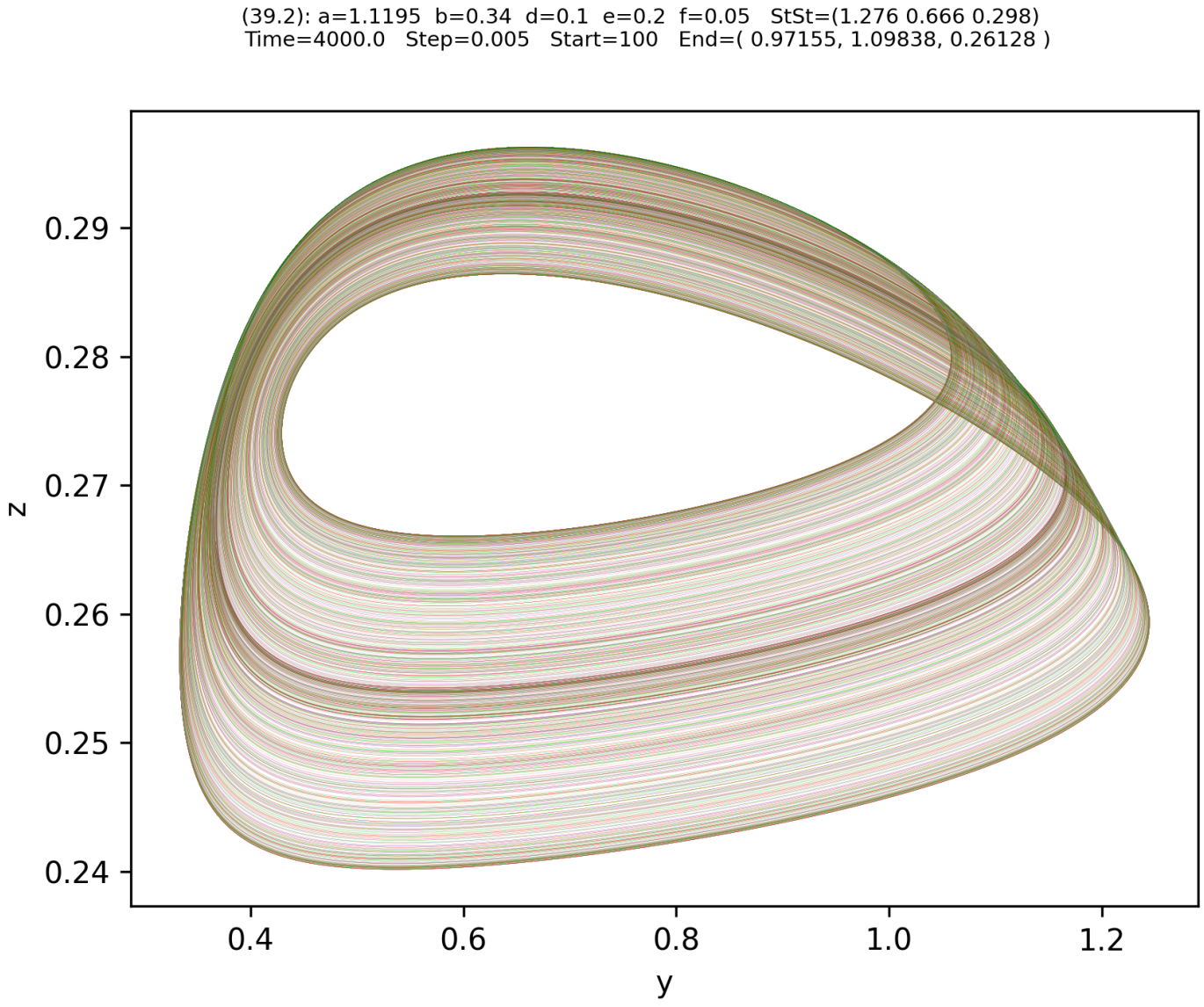
Legende: Chaos im **Beispiel 138**: $\lambda_1 = 0.009$
für: $a = 0.86$, $b = 0.36$, $d = 0.116$, $e = 0.422$ und $f = 0.04$.



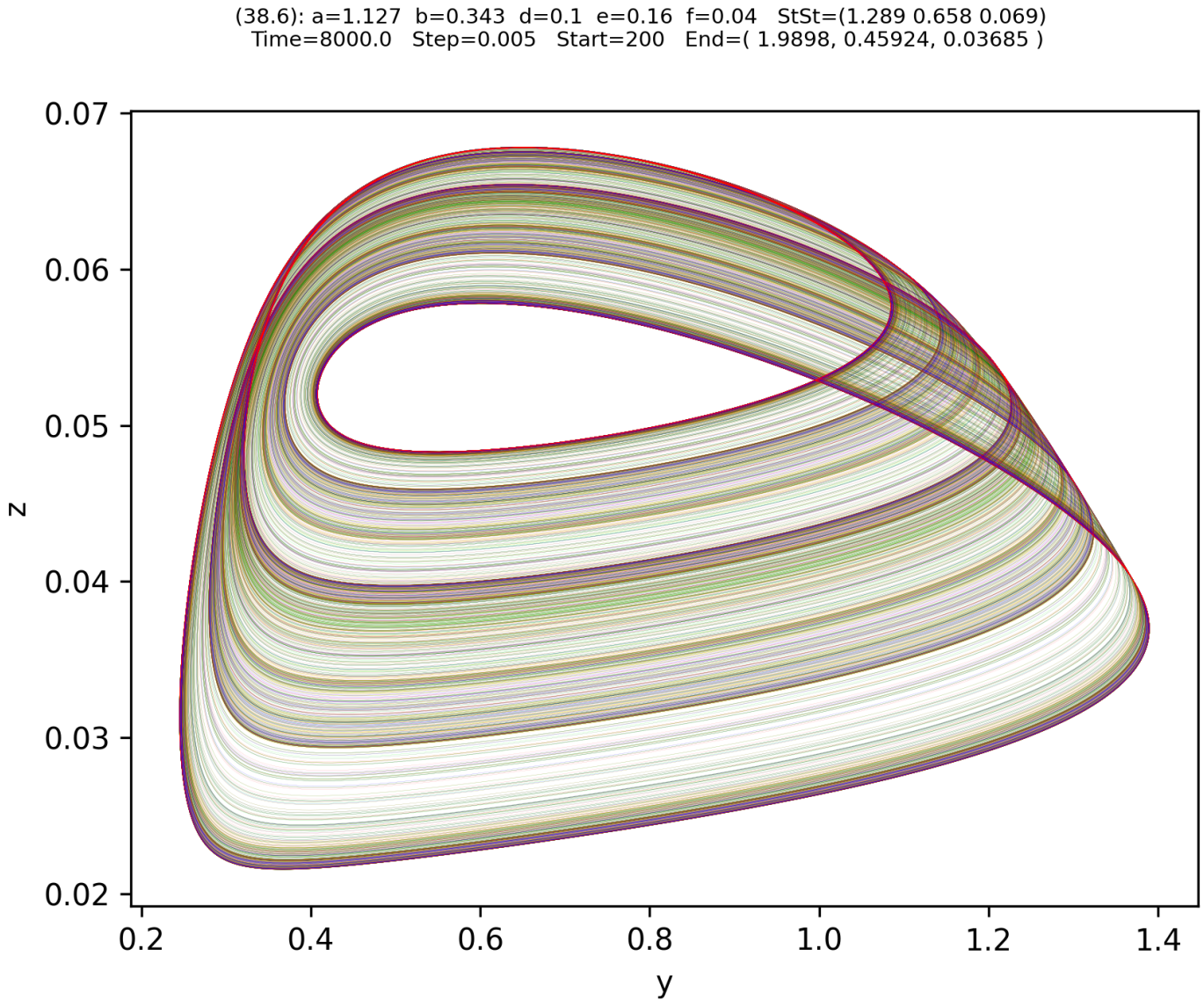
Legende: Chaos im **Beispiel 139**: $\lambda_1 = 0.015$
für: $a = 0.5513$, $b = 0.34$, $d = 0.1$, $e = 0.03$ und $f = 0.02$.



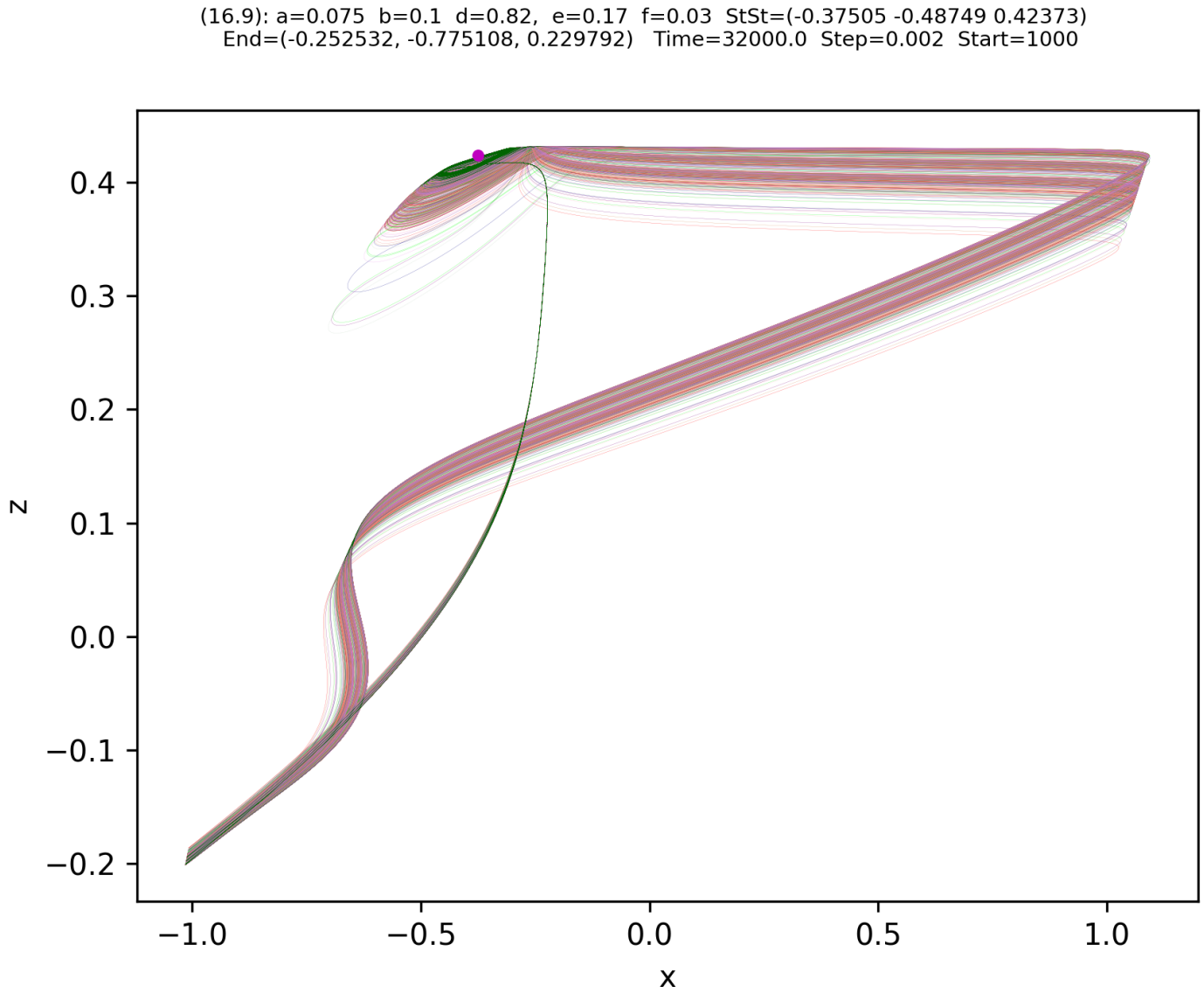
Legende: Chaos im **Beispiel 140**: $\lambda_1 = 0.013$
für: $a = 0.1195$, $b = 0.34$, $d = 0.1$, $e = 0.2$ und $f = 0.05$.



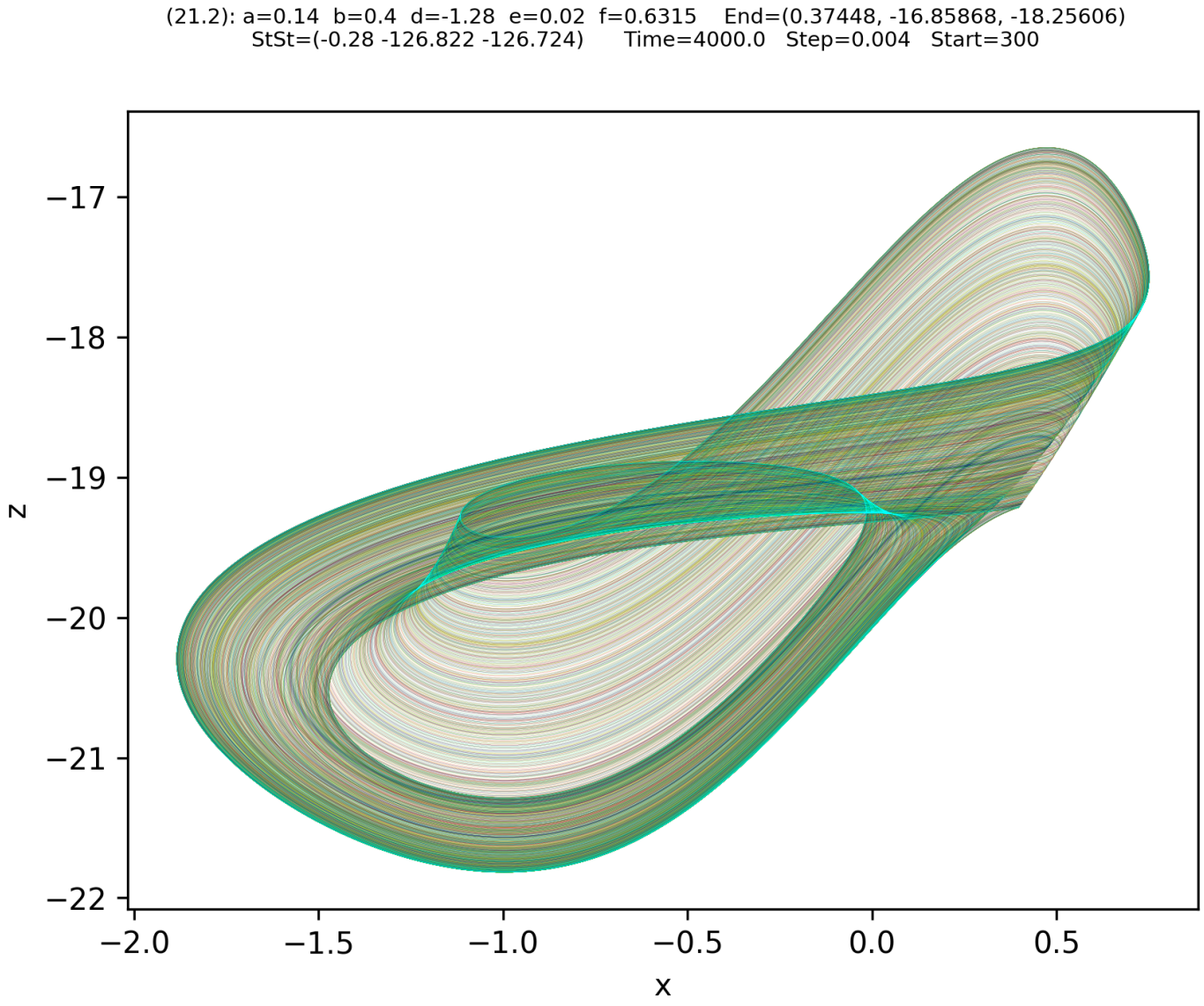
Legende: Chaos im **Beispiel 141**: $\lambda_1 = 0.008$
für: $a = 1.127$, $b = 0.343$, $d = 0.1$, $e = 0.16$ und $f = 0.04$.



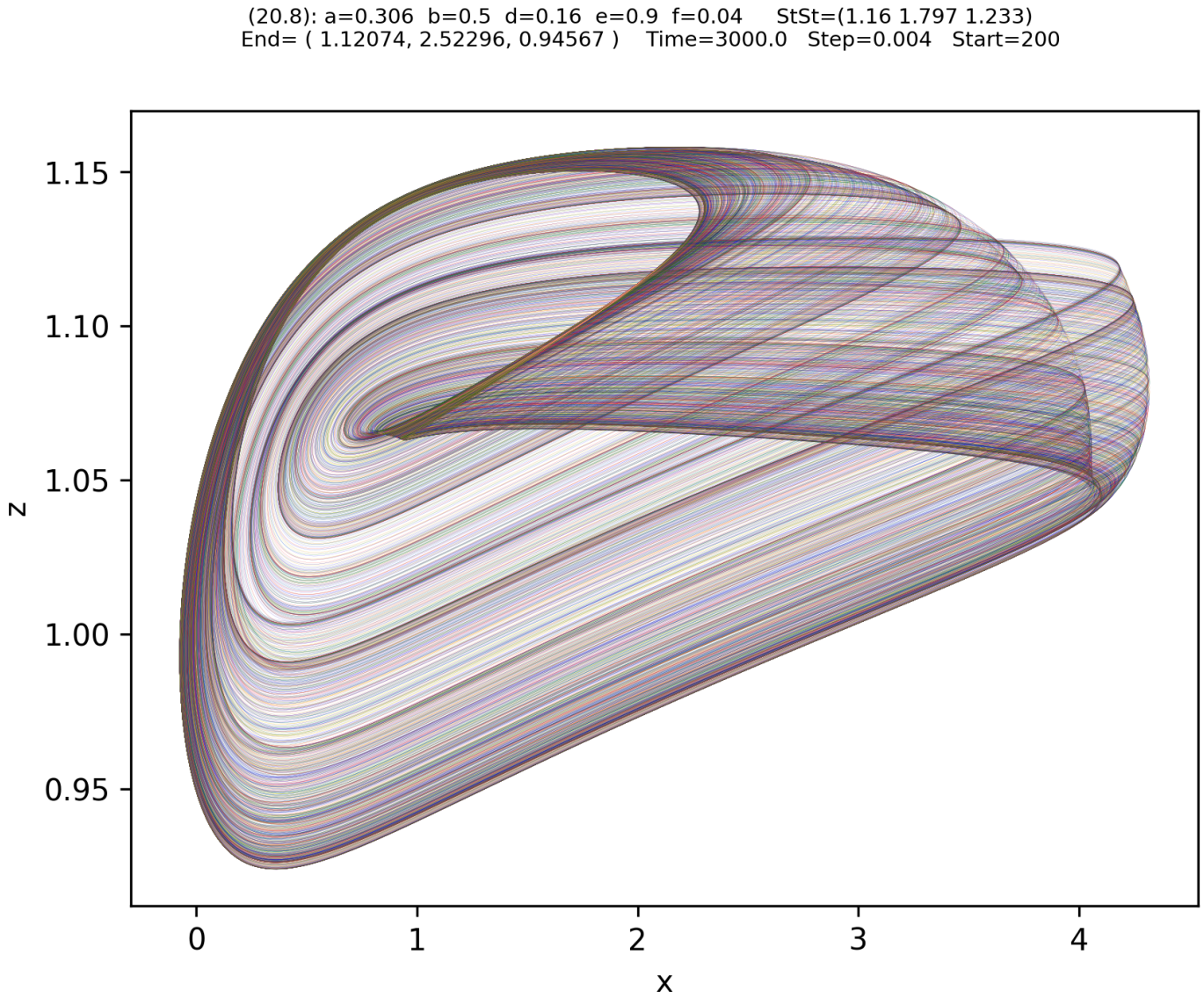
Legende: Chaos im **Beispiel 142**: $\lambda_1 = 0.001$
für: $a = 0.075$, $b = 0.1$, $d = 0.82$, $e = 0.17$ und $f = 0.03$.



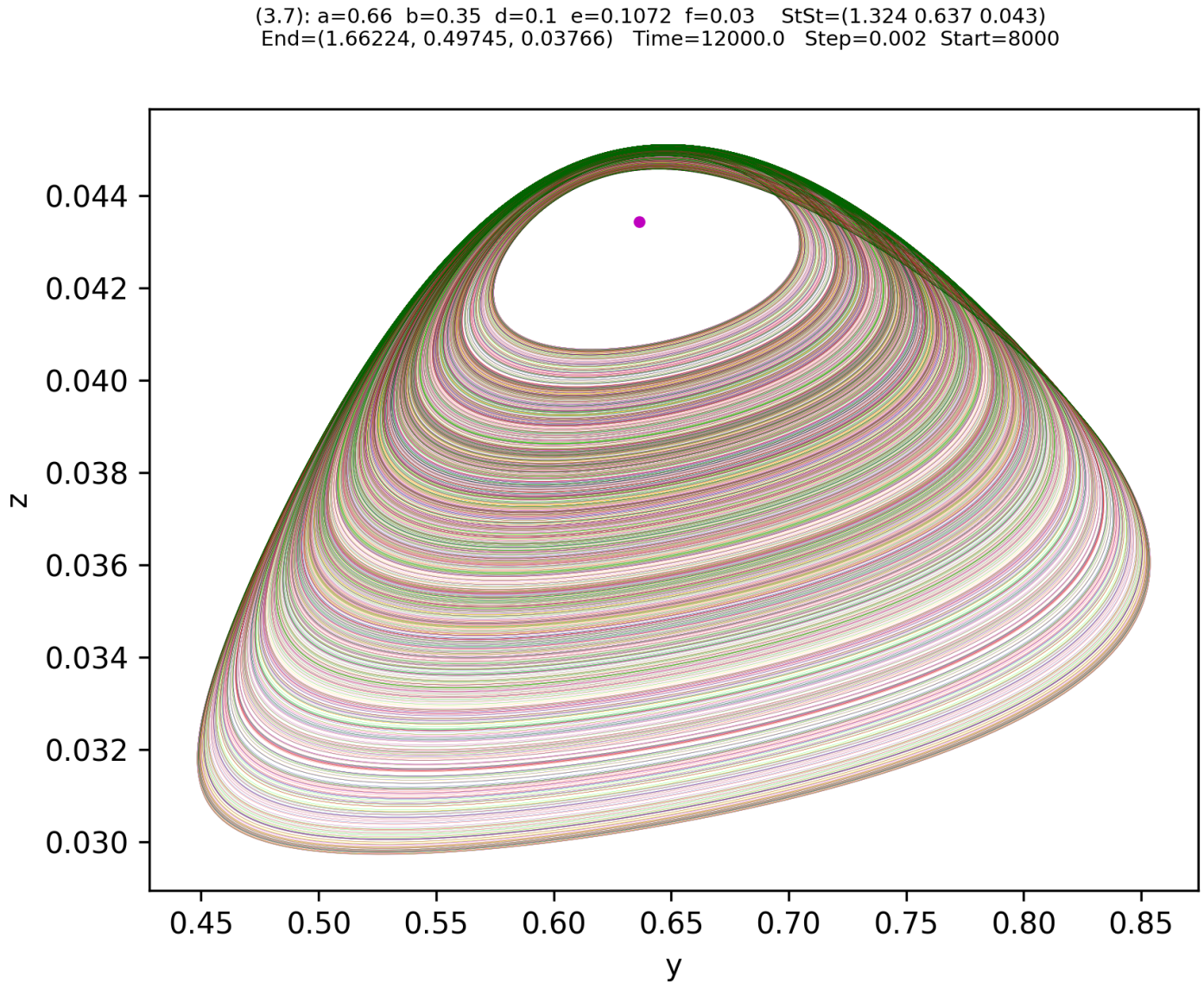
Legende: Chaos im **Beispiel 143**: $\lambda_1 = 0.063$
für: $a = 0.14$, $b = 0.4$, $d = -1.28$, $e = 0.02$ und $f = 0.6315$.



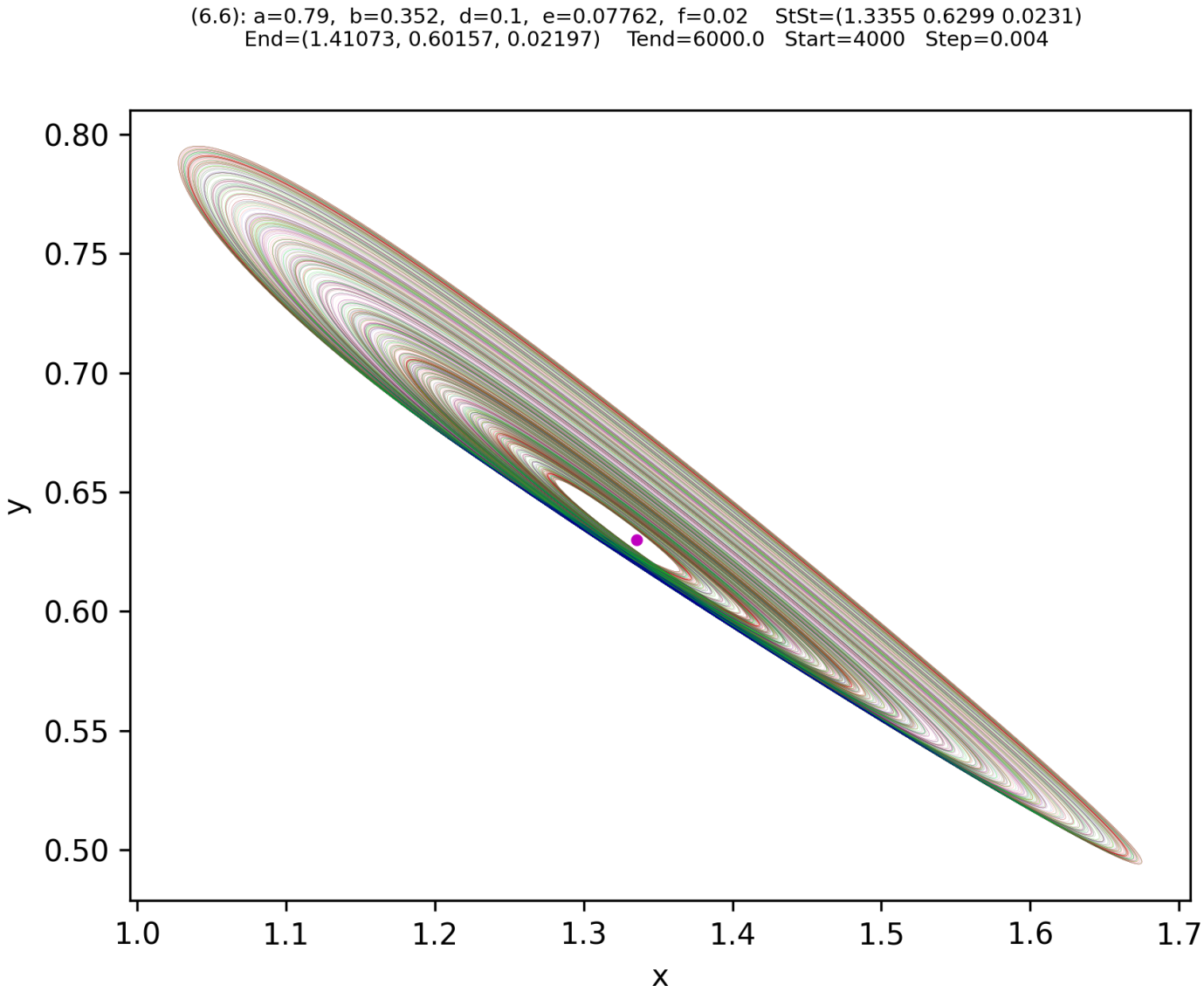
Legende: Chaos im **Beispiel 144**: $\lambda_1 = 0.033$
für: $a = 0.306$, $b = 0.5$, $d = 0.16$, $e = 0.9$ und $f = 0.04$.



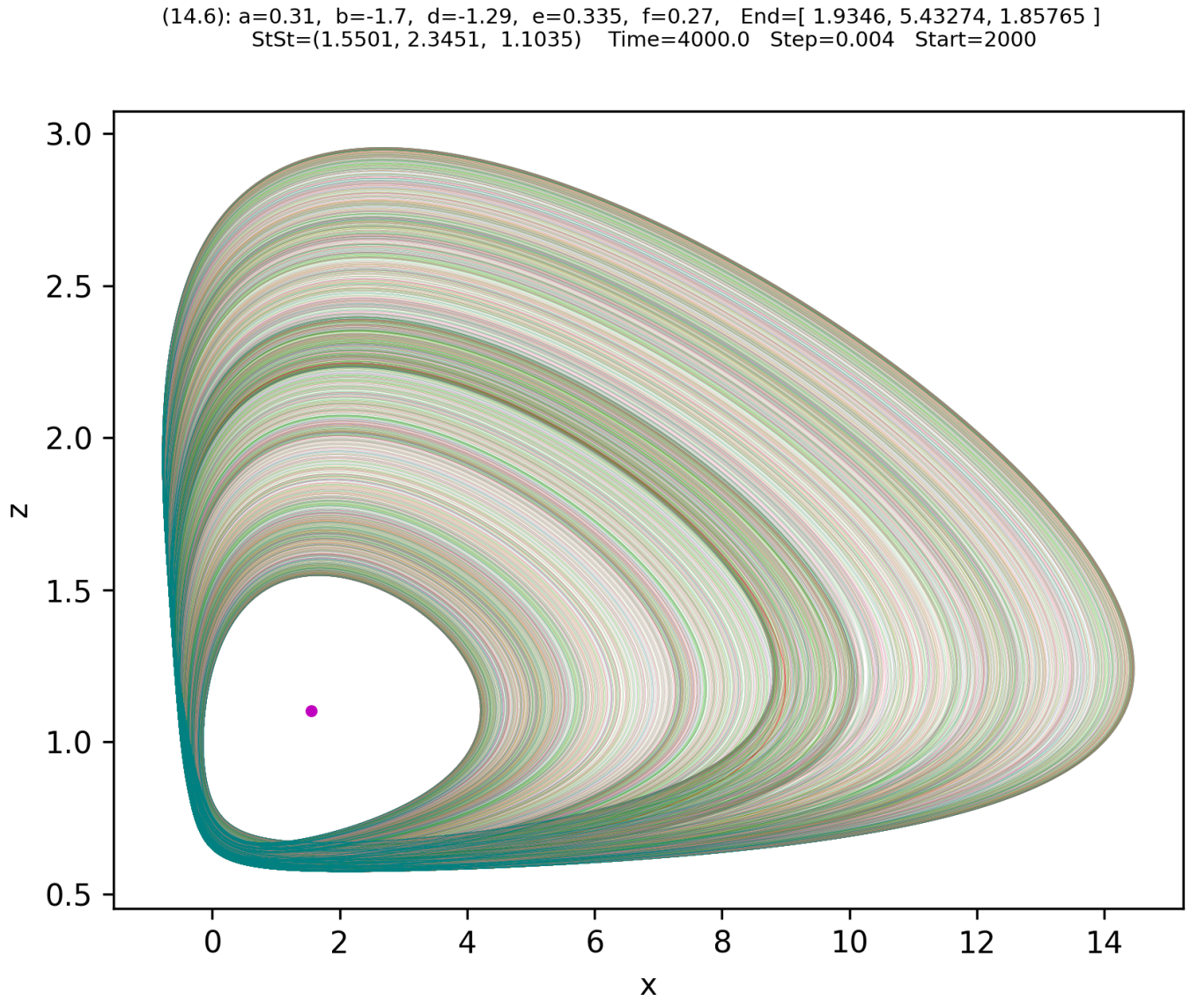
Legende: Chaos im **Beispiel 145**: $\lambda_1 = 0.010$
für: $a = 0.66$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 0.1072$ und $f = 0.03$.



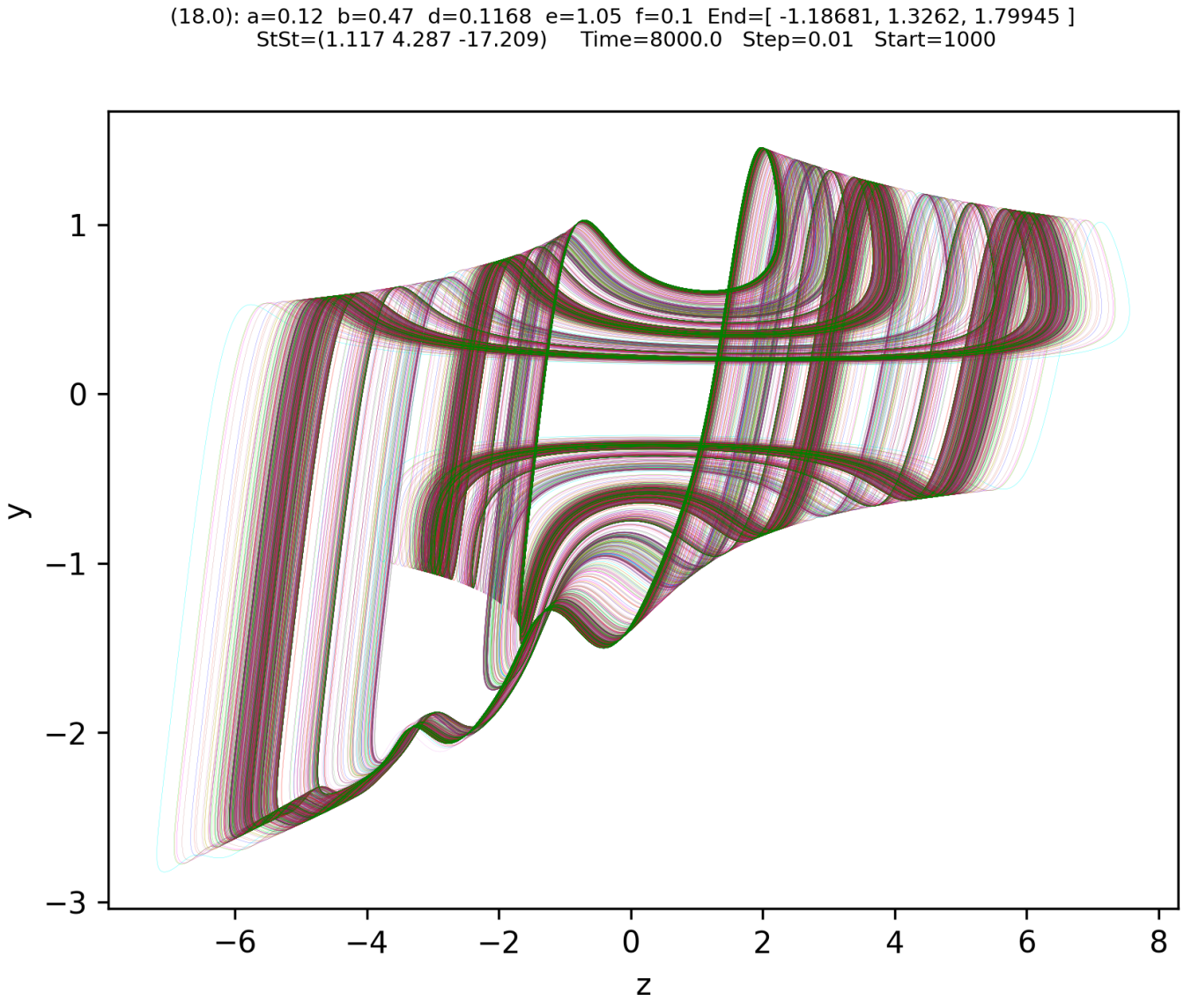
Legende: Chaos im **Beispiel 146**: $\lambda_1 = 0.010$
für: $a = 0.79$, $b = 0.352$, $d = 0.1$, $e = 0.07762$ und $f = 0.02$.



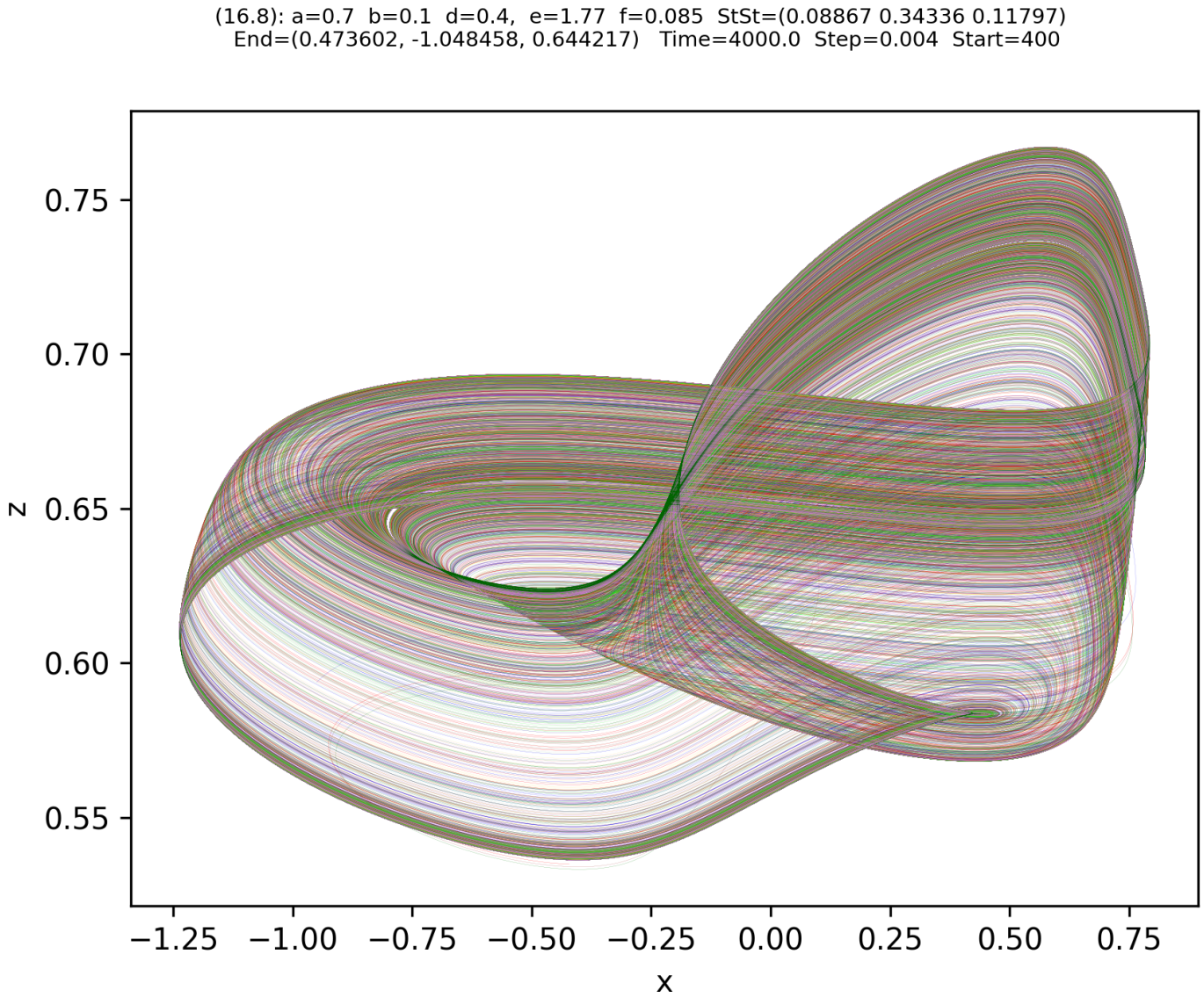
Legende: Chaos im **Beispiel 147**: $\lambda_1 = 0.059$
für: $a = 0.31$, $b = -1.7$, $d = -1.29$, $e = 0.335$ und $f = 0.27$.



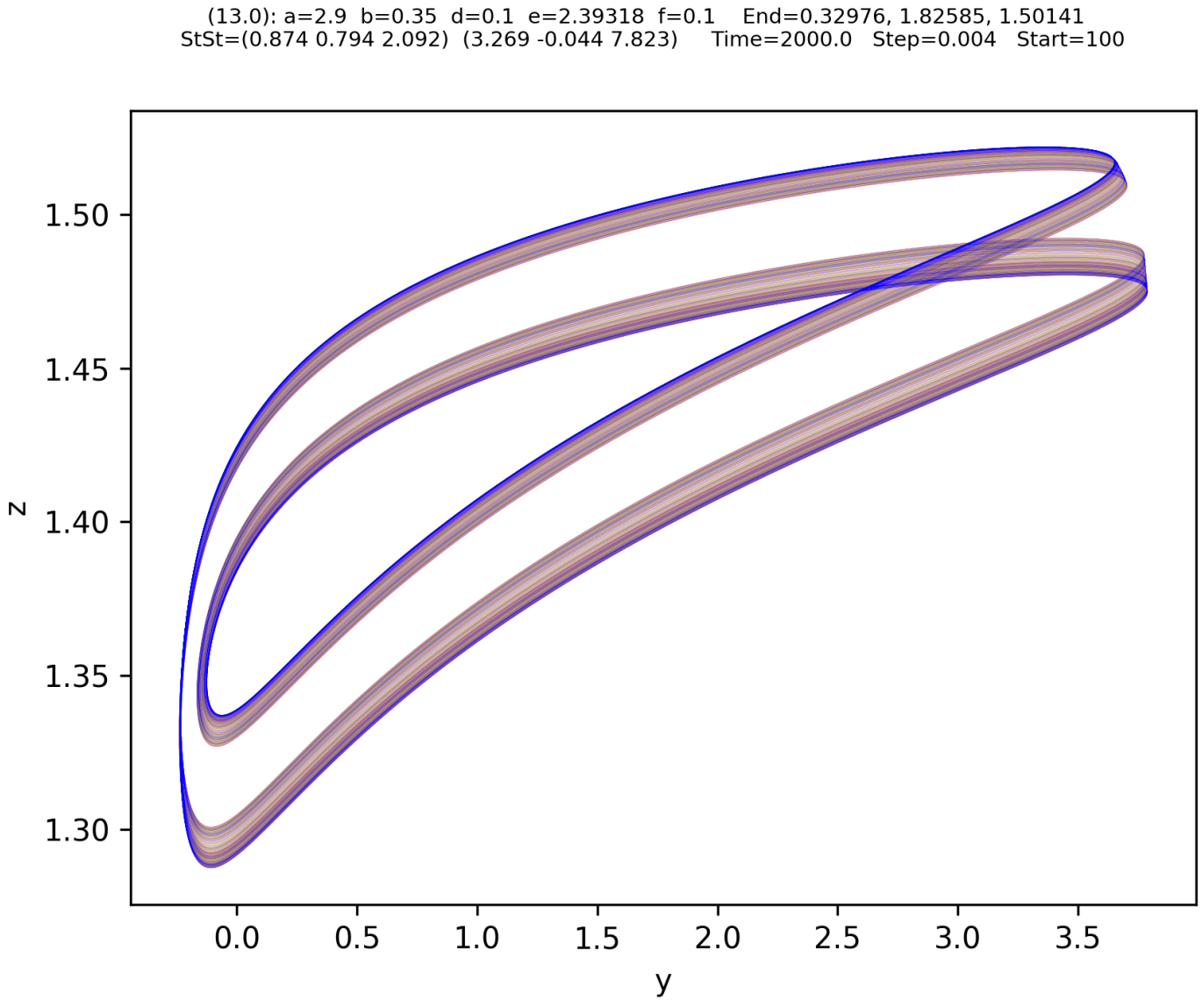
Legende: Chaos im **Beispiel 148**: $\lambda_1 = 0.006$
für: $a = 0.12$, $b = 0.47$, $d = 0.1168$, $e = 1.05$ und $f = 0.1$.



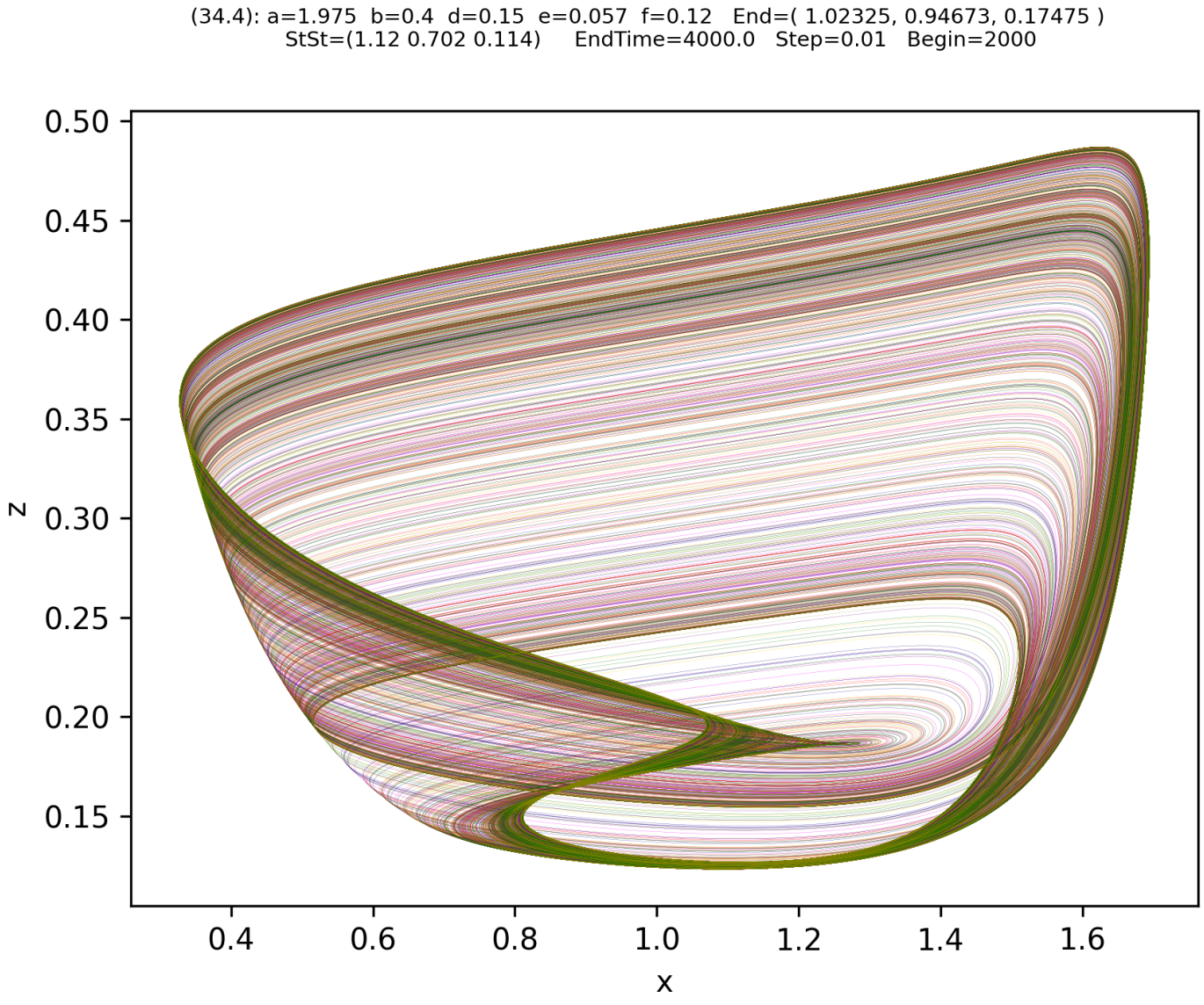
Legende: Chaos im **Beispiel 149**: $\lambda_1 = 0.036$
für: $a = 0.7$, $b = 0.1$, $d = 0.4$, $e = 1.77$ und $f = 0.085$.



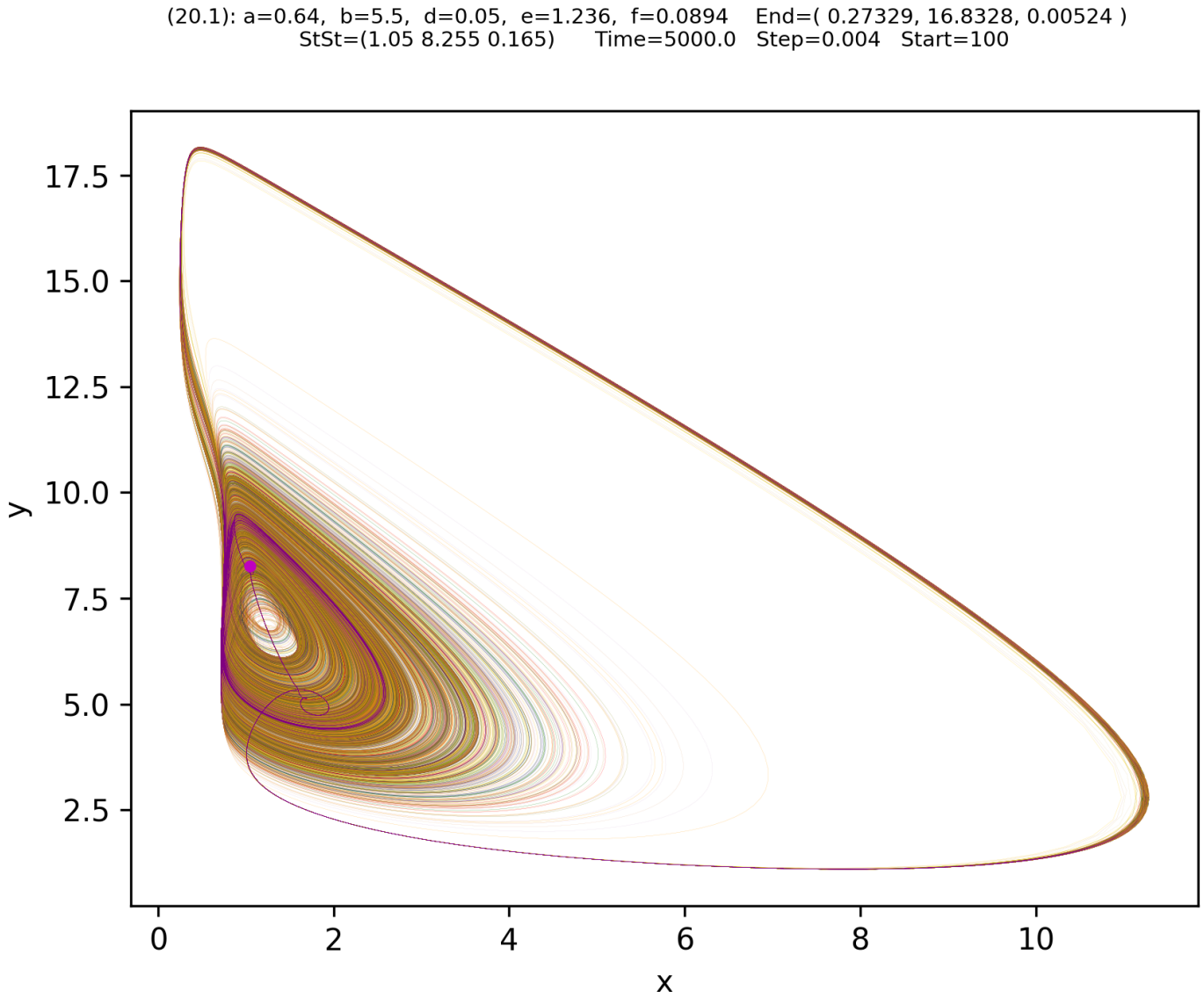
Legende: Chaos im **Beispiel 150**: $\lambda_1 = 0.050$
für: $a = 2.9$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $e = 2.39318$ und $f = 0.1$.



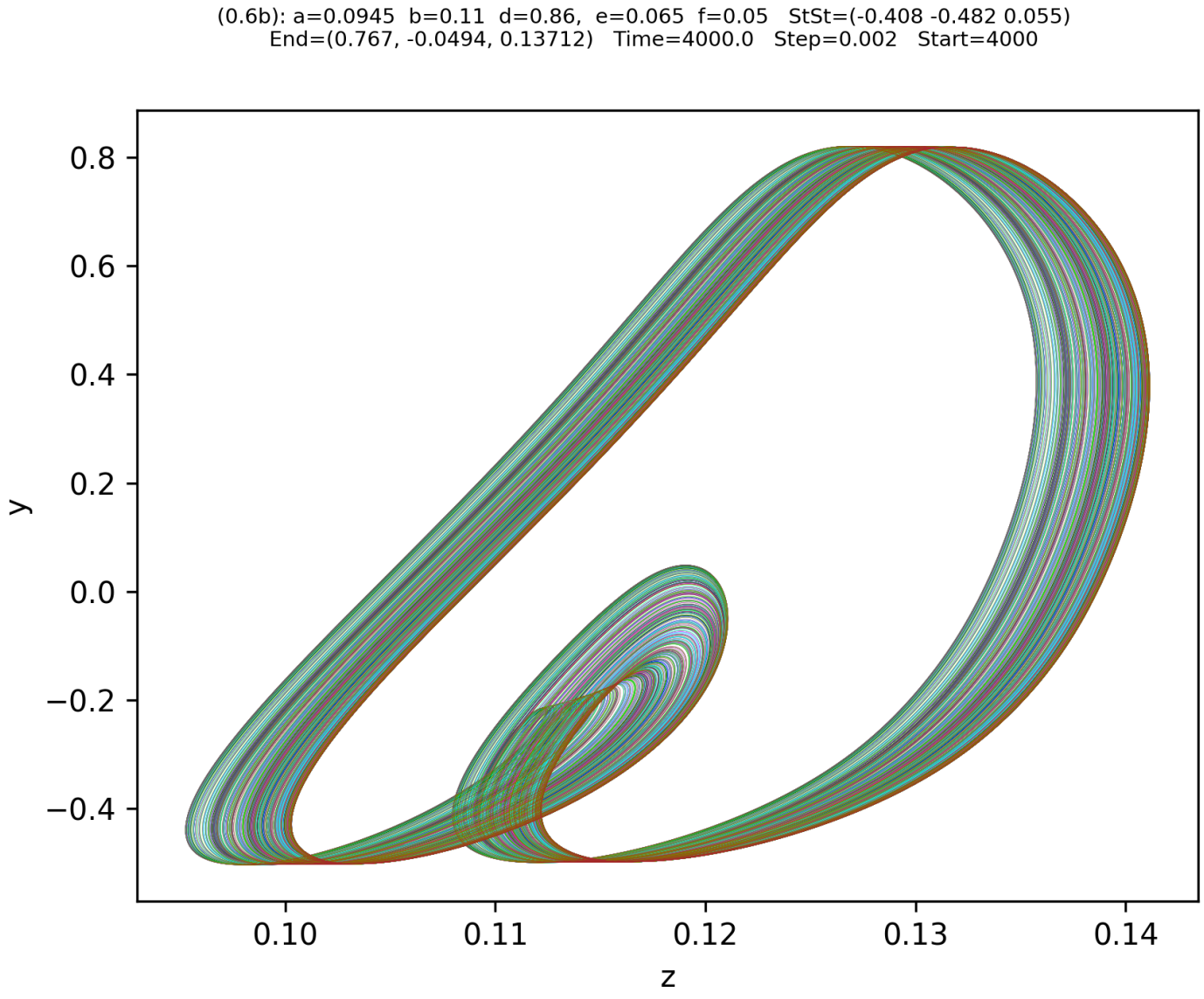
Legende: Chaos im **Beispiel 151**: $\lambda_1 = 0.015$
für: $a = 1.975$, $b = 0.4$, $d = 0.15$, $e = 0.057$ und $f = 0.12$.



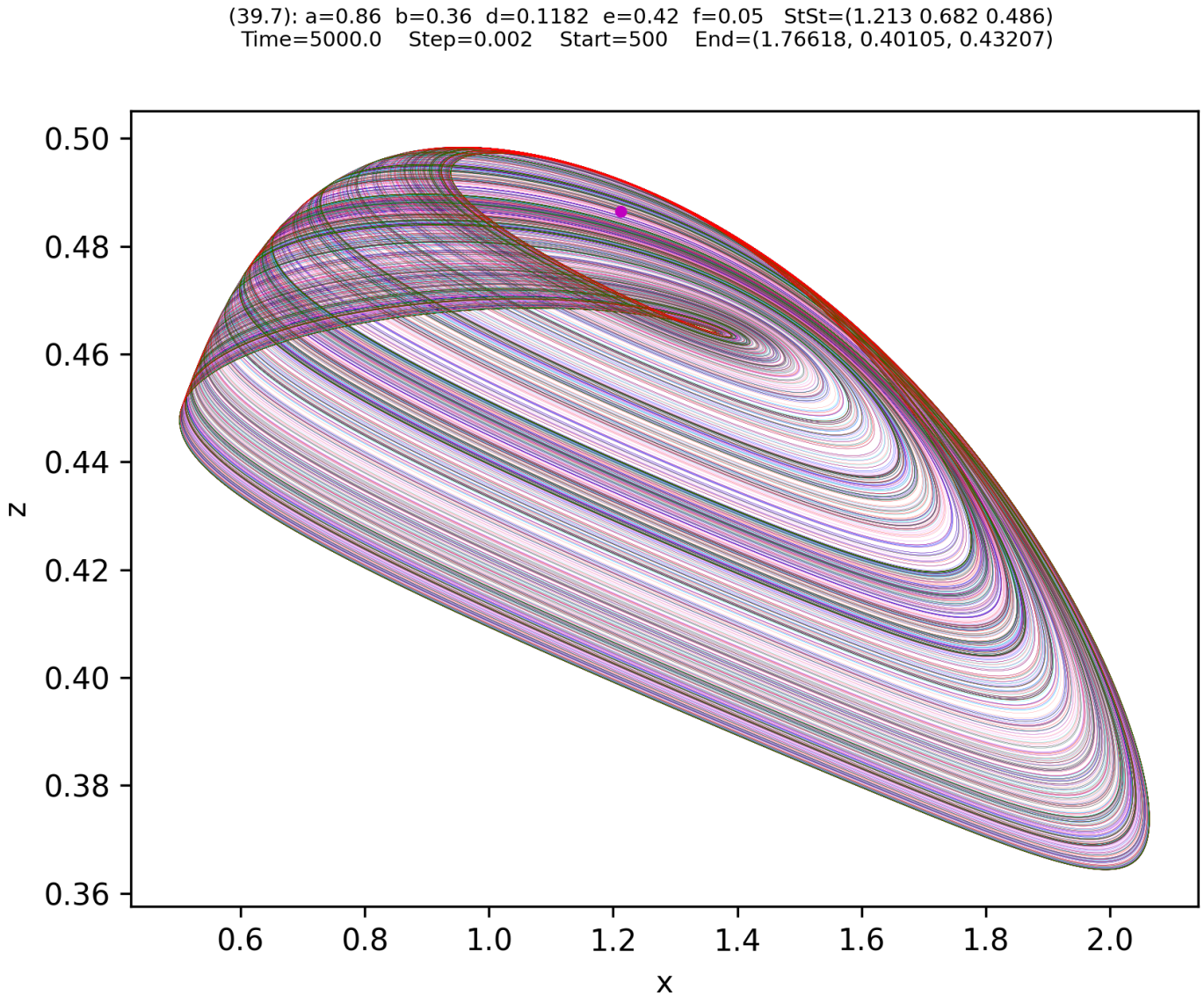
Legende: Chaos im **Beispiel 152**: $\lambda_1 = 0.043$
für: $a = 0.64$, $b = 5.5$, $d = 0.05$, $e = 1.236$ und $f = 0.0894$.



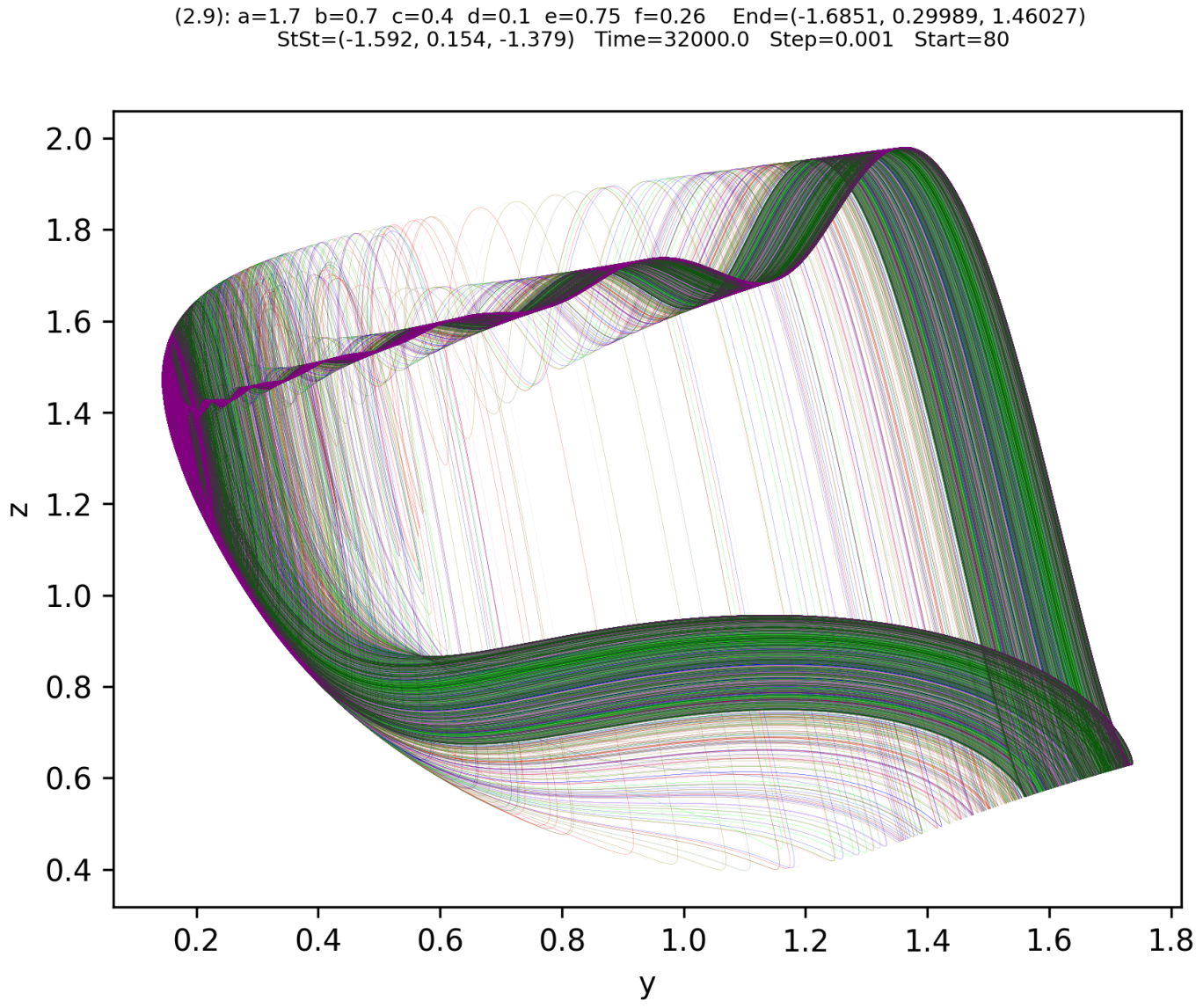
Legende: Chaos im **Beispiel 153**: $\lambda_1 = 0.011$
für: $a = 0.0945$, $b = 0.11$, $d = 0.86$, $e = 0.65$ und $f = 0.05$.



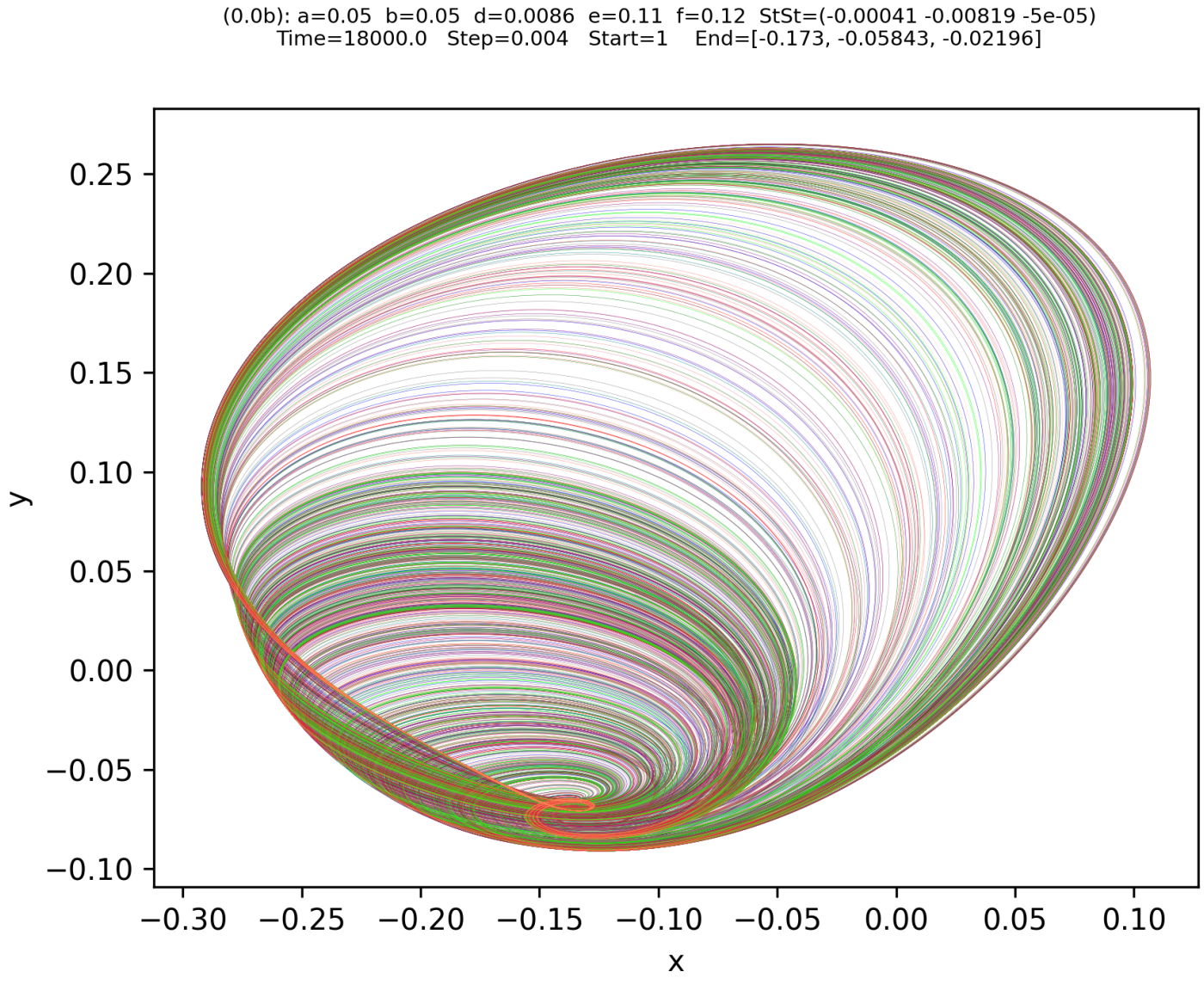
Legende: Chaos im **Beispiel 154**: $\lambda_1 = 0.010$
für: $a = 0.86$, $b = 0.36$, $d = 0.1182$, $e = 0.42$ und $f = 0.05$.



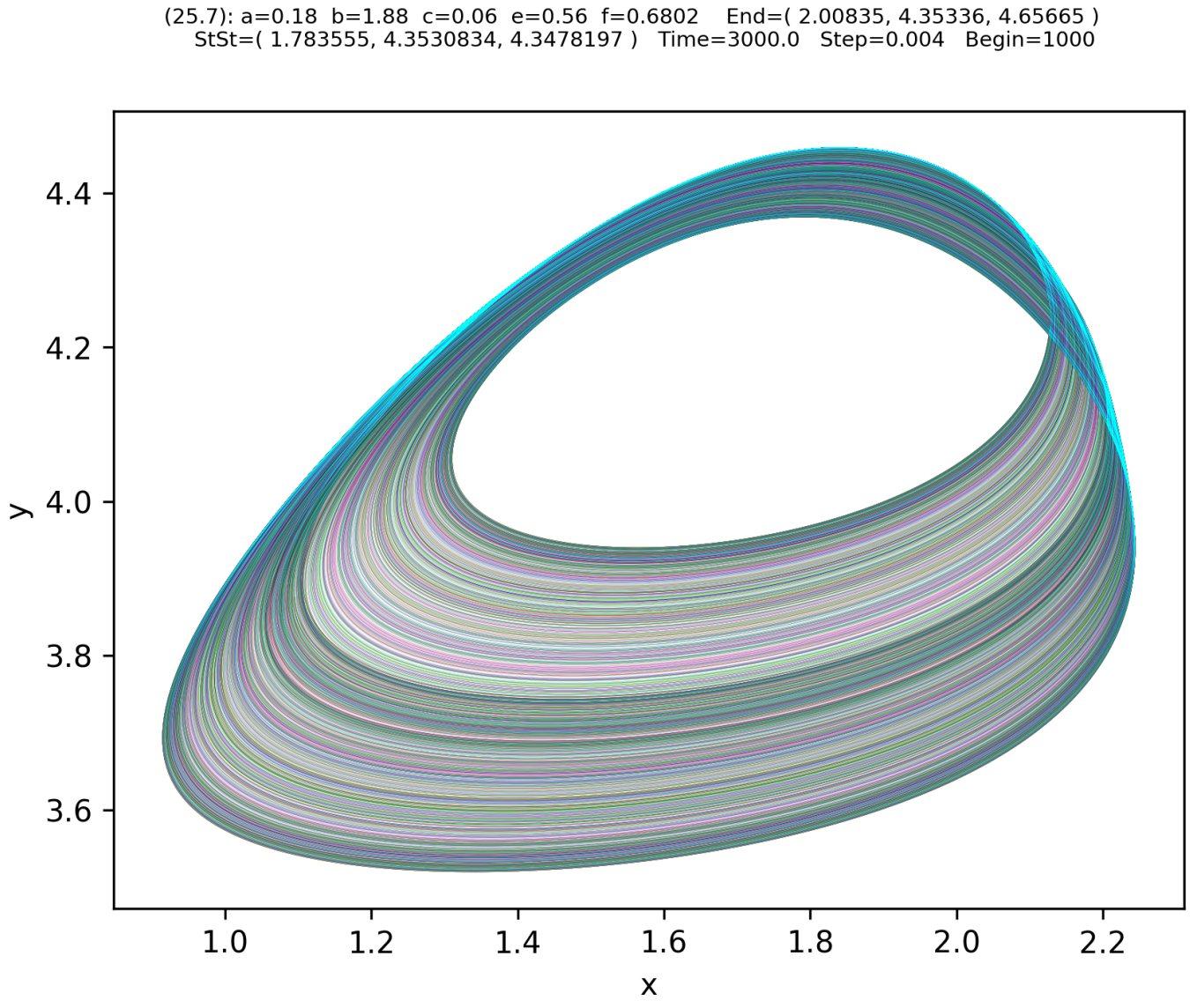
Legende: Chaos im **Beispiel 155**: $\lambda_1 = 0.012$
für: $a = 1.7$, $b = 0.7$, $c = 0.4$, $d = 0.1$, $e = 0.75$ und $f = 0.26$.



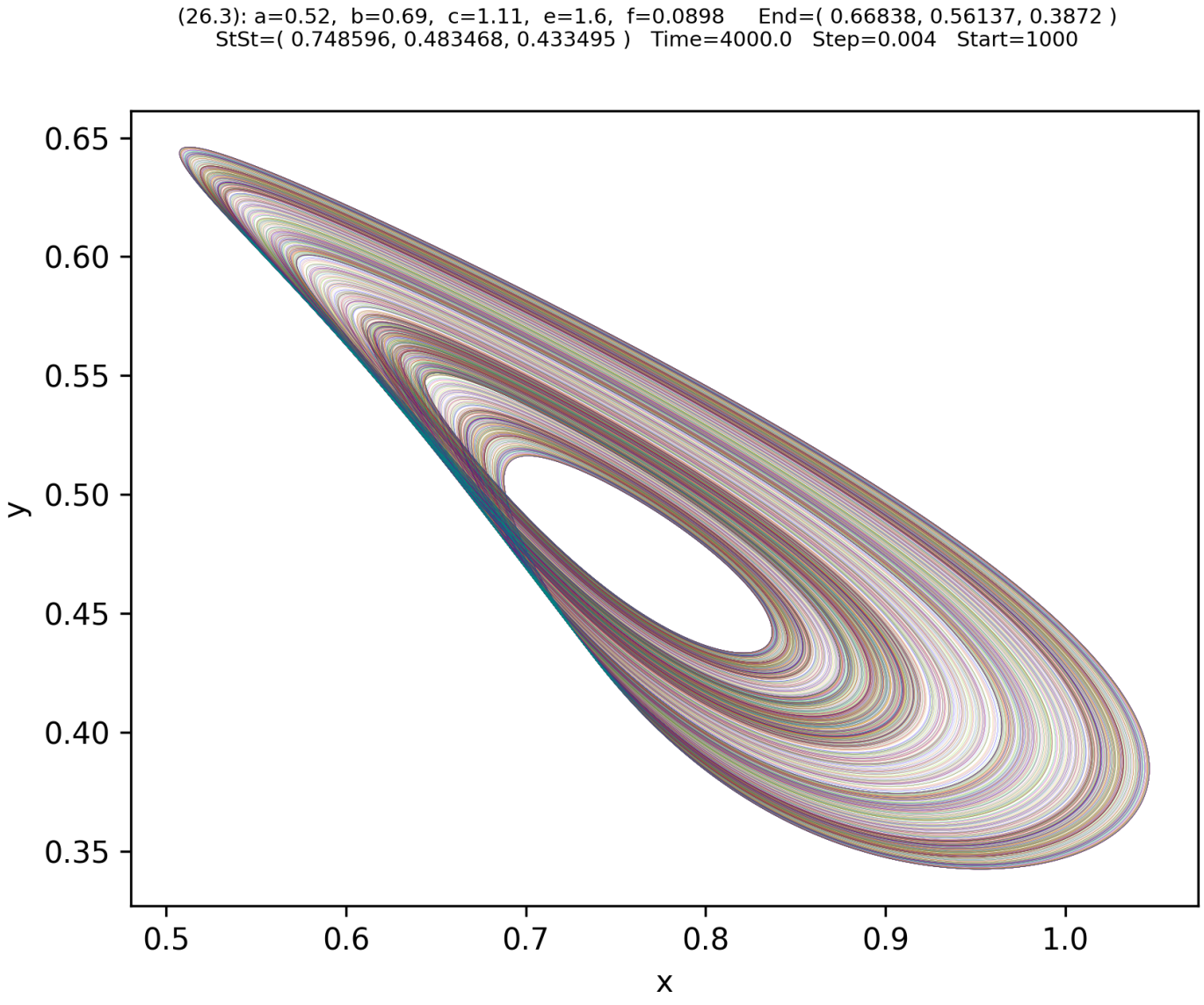
Legende: Chaos im **Beispiel 156**: $\lambda_1 = 0.005$
für: $a = 0.05$, $b = 0.05$, $d = 0.0086$, $e = 0.11$ und $f = 0.12$.



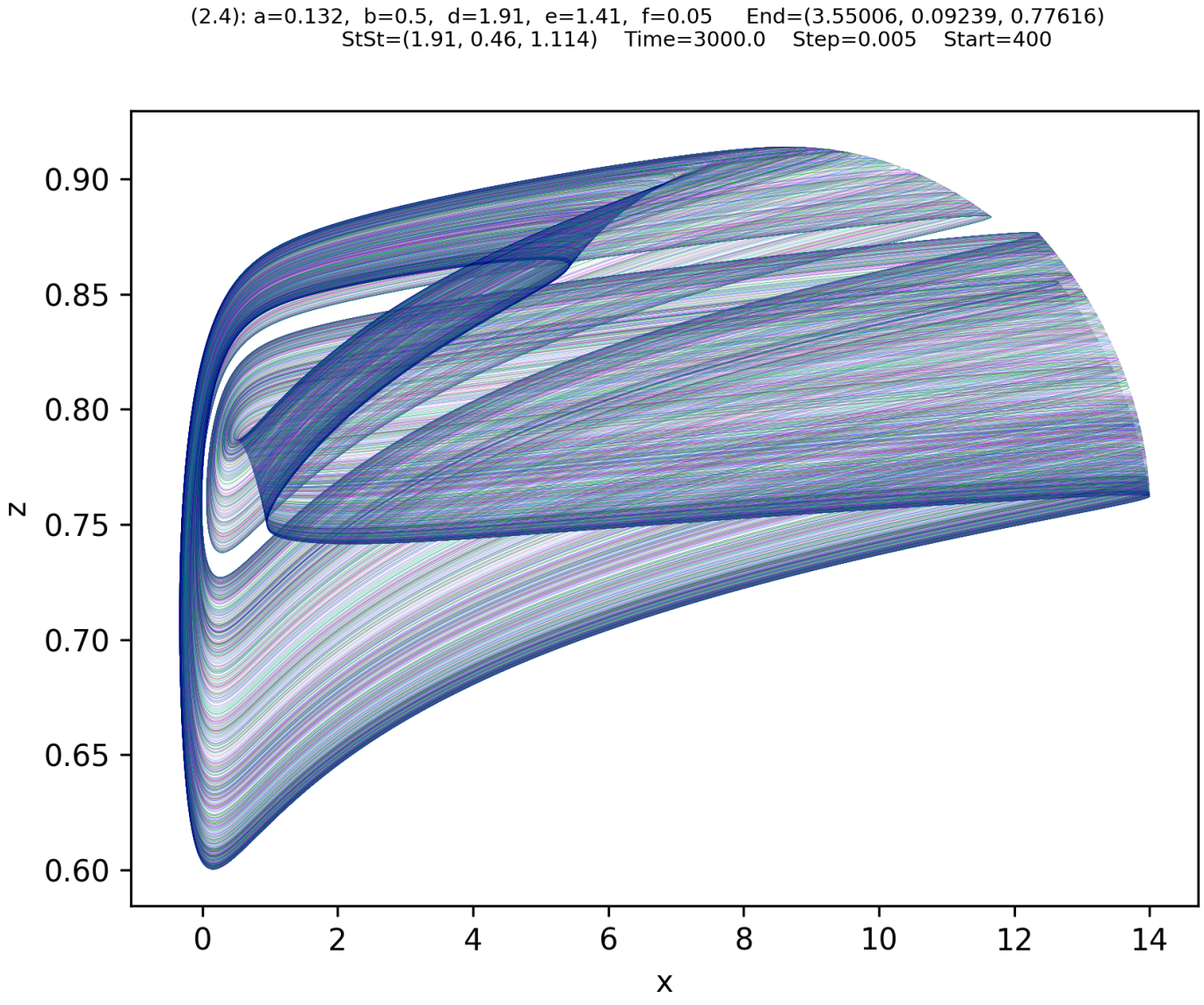
Legende: Chaos im **Beispiel 157**: $\lambda_1 = 0.048$
für: $a = 0.18$, $b = 1.88$, $d = 0.06$, $e = 0.56$ und $f = 0.6802$.



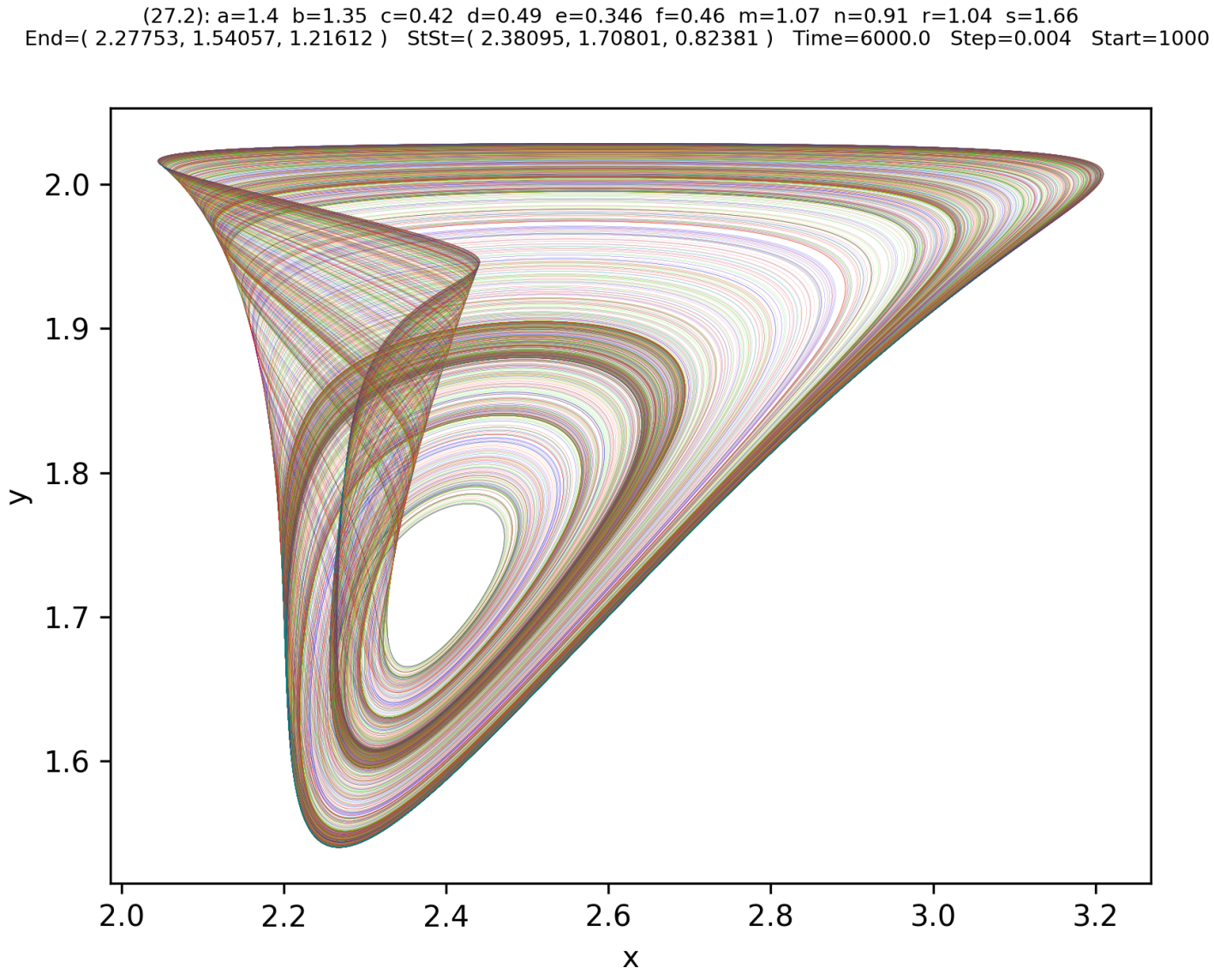
Legende: Chaos im **Beispiel 158**: $\lambda_1 = 0.019$
für: $a = 0.52$, $b = 0.69$, $d = 1.11$, $e = 1.6$ und $f = 0.0898$.



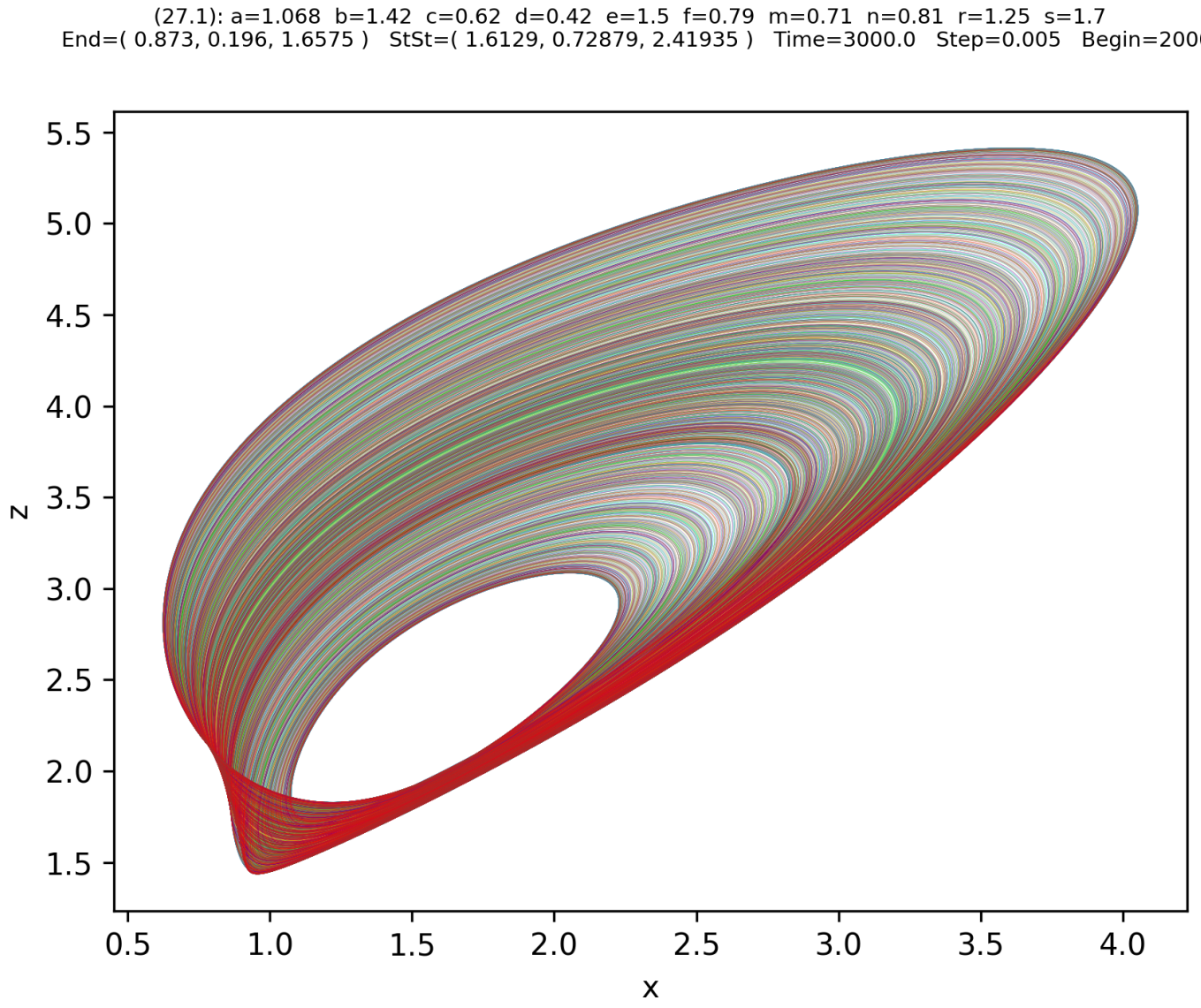
Legende: Chaos im **Beispiel 159**: $\lambda_1 = 0.026$
für: $a = 0.132$, $b = 0.5$, $d = 1.91$, $e = 1.41$ und $f = 0.05$.



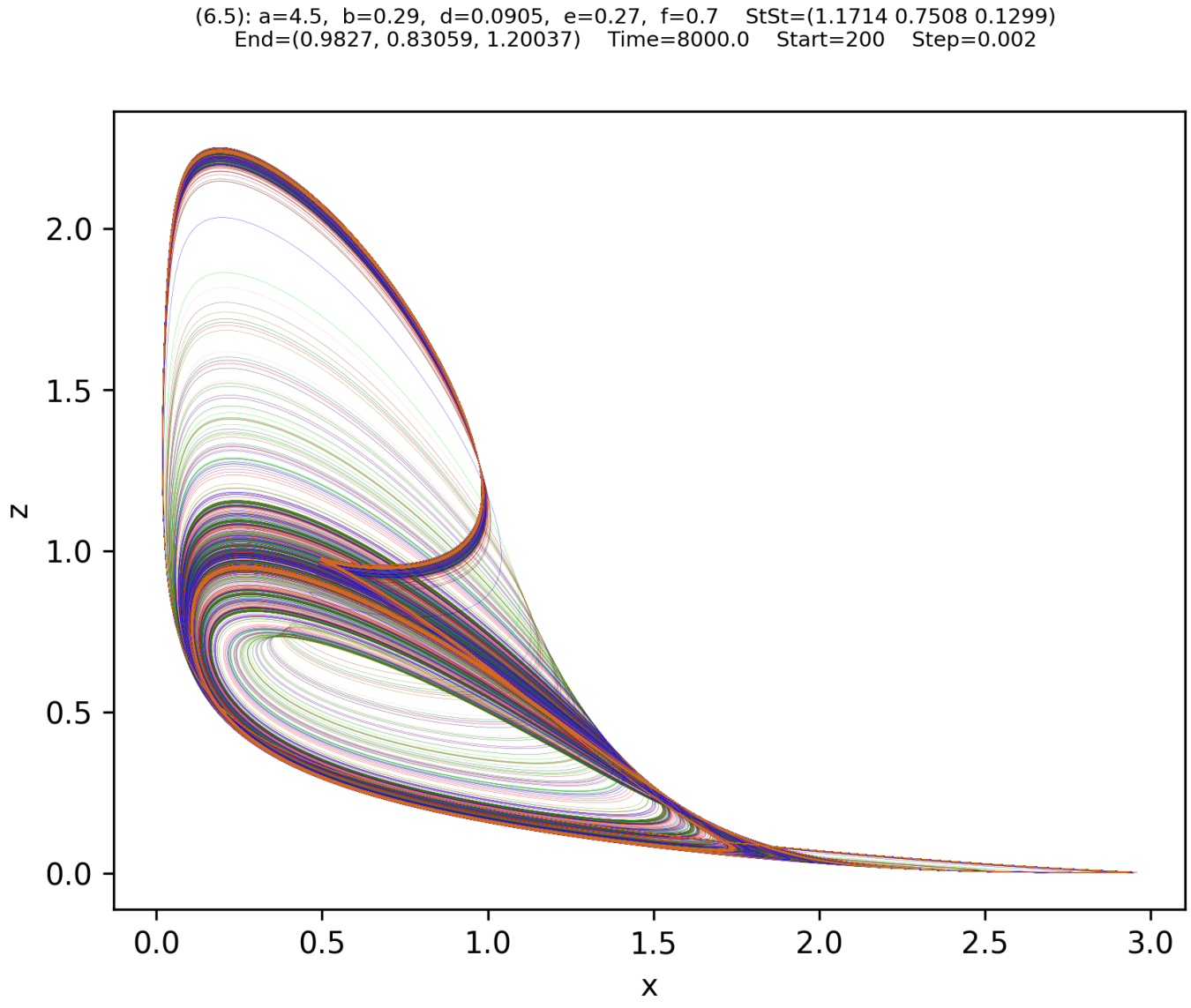
Legende: Chaos im **Beispiel 160**: $\lambda_1 = 0.016$ für: $a = 1.4$, $b = 1.35$, $c = 0.42$
$d = 0.49$, $e = 0.346$, $f = 0.46$, $m = 1.07$, $n = 0.91$, $r = 1.04$, $s = 1.66$.



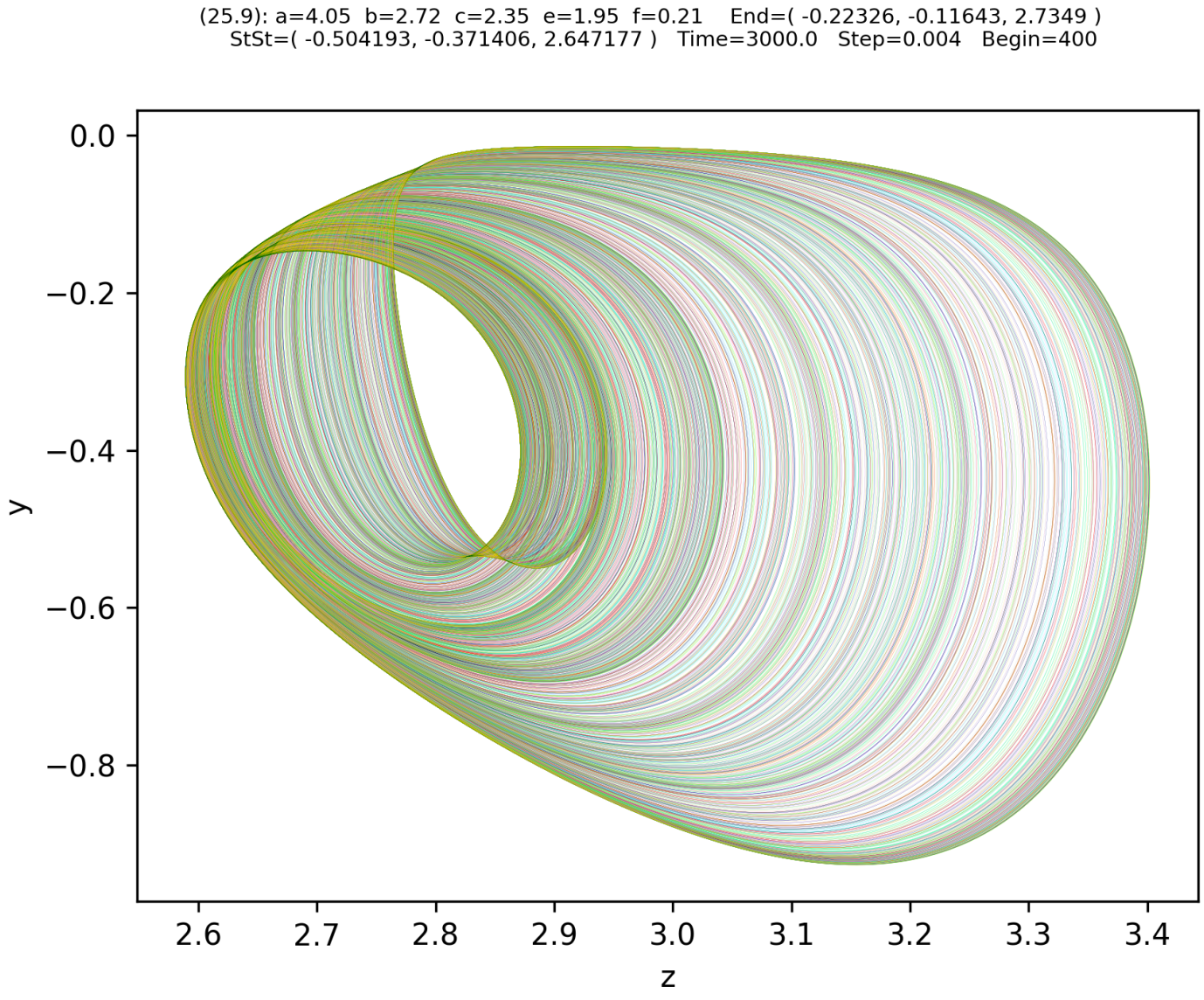
Legende: Chaos im **Beispiel 161**: $\lambda_1 = 0.043$ für: $a = 1.068$, $b = 1.42$, $c = 0.62$, $d = 0.42$, $e = 1.5$, $f = 0.79$, $m = 0.71$, $n = 0.81$, $r = 1.25$, $s = 1.7$.



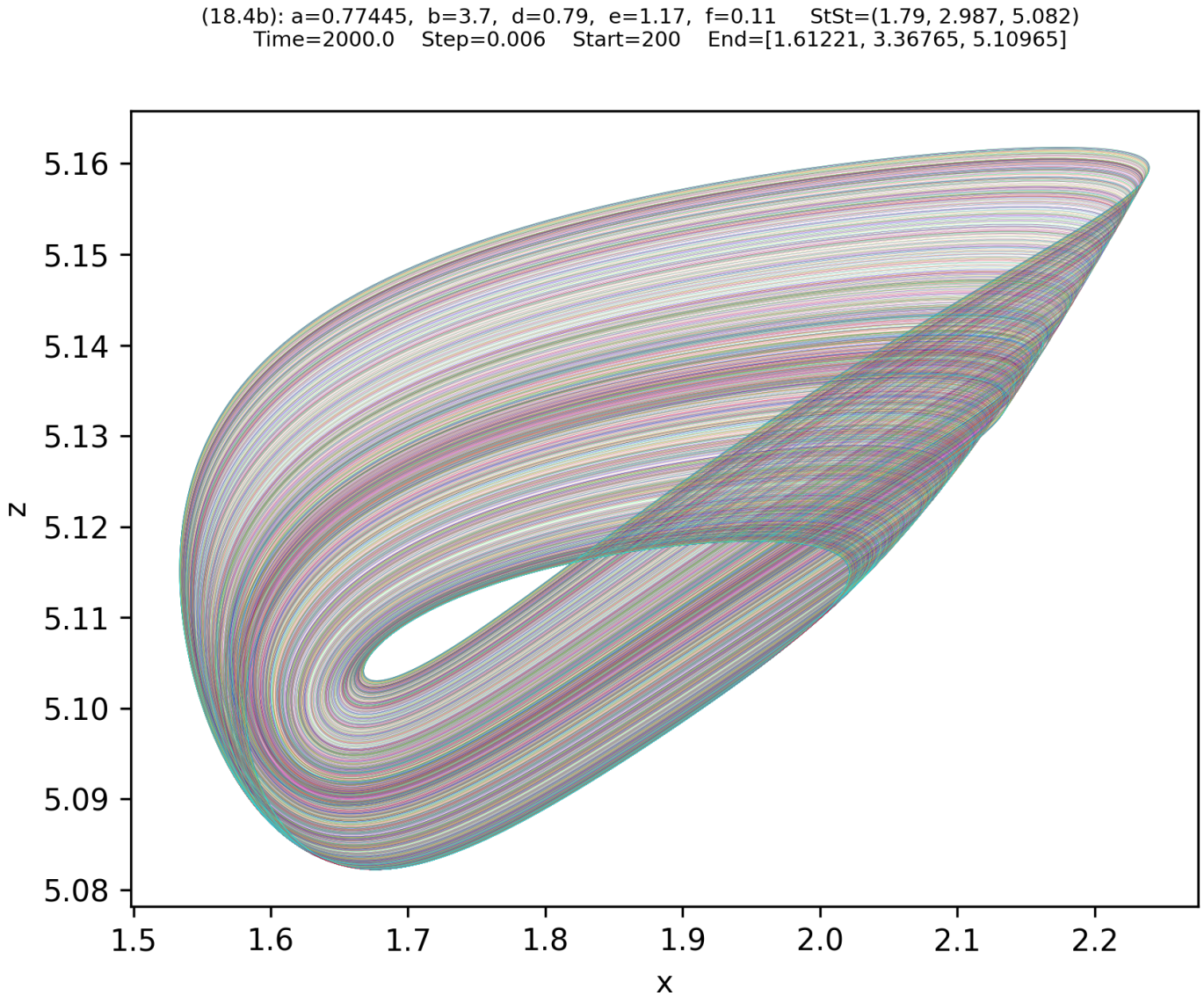
Legende: Chaos im **Beispiel 162**: $\lambda_1 = 0.006$
für: $a = 4.5,\ b = 0.29,\ d = 0.0905,\ e = 0.27,$ und $f = 0.7$.



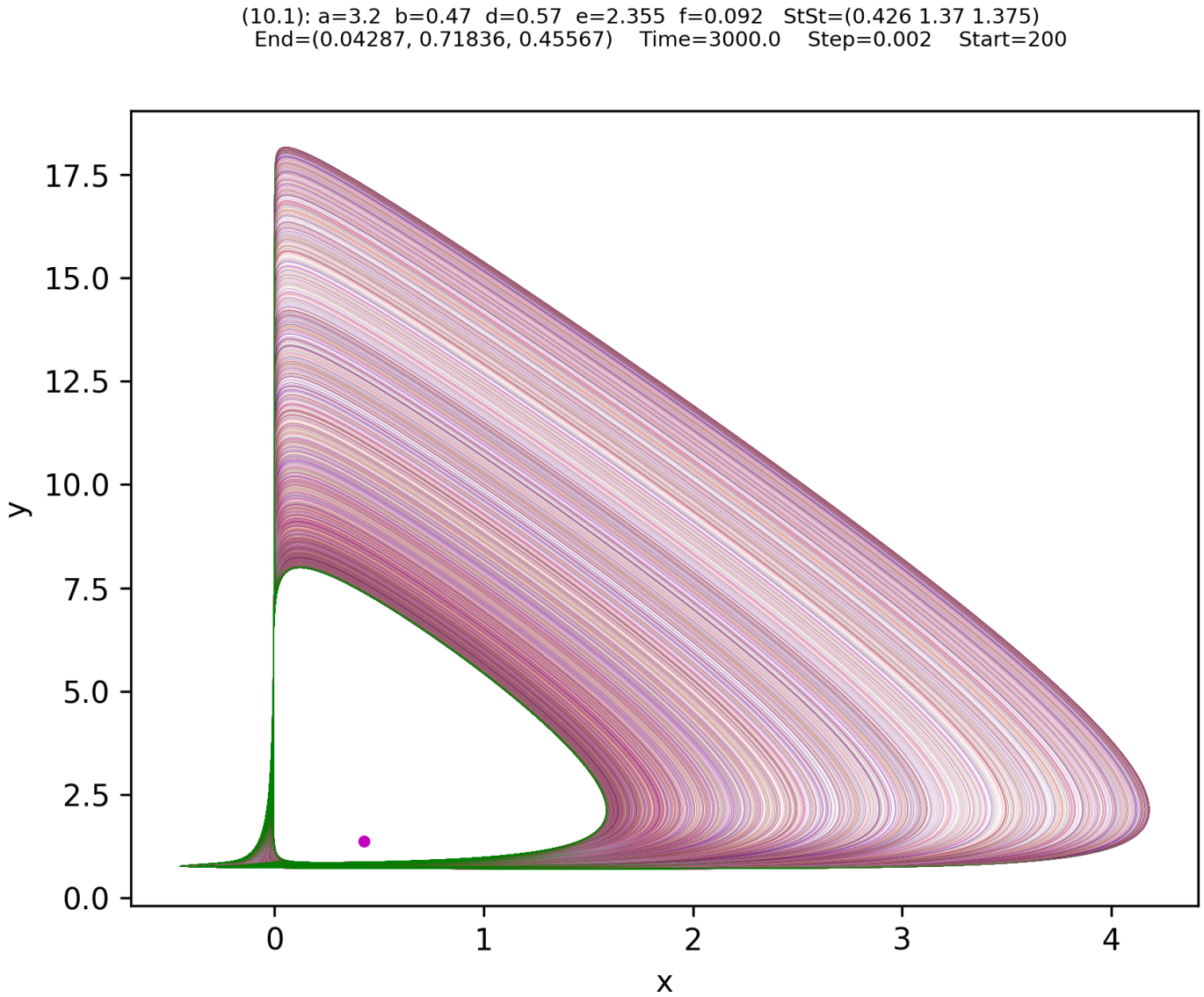
Legende: Chaos im **Beispiel 163**: $\lambda_1 = 0.042$
für: $a = 4.05,\ b = 2.72,\ c = 2.35,\ e = 1.95,$ und $f = 0.21$.



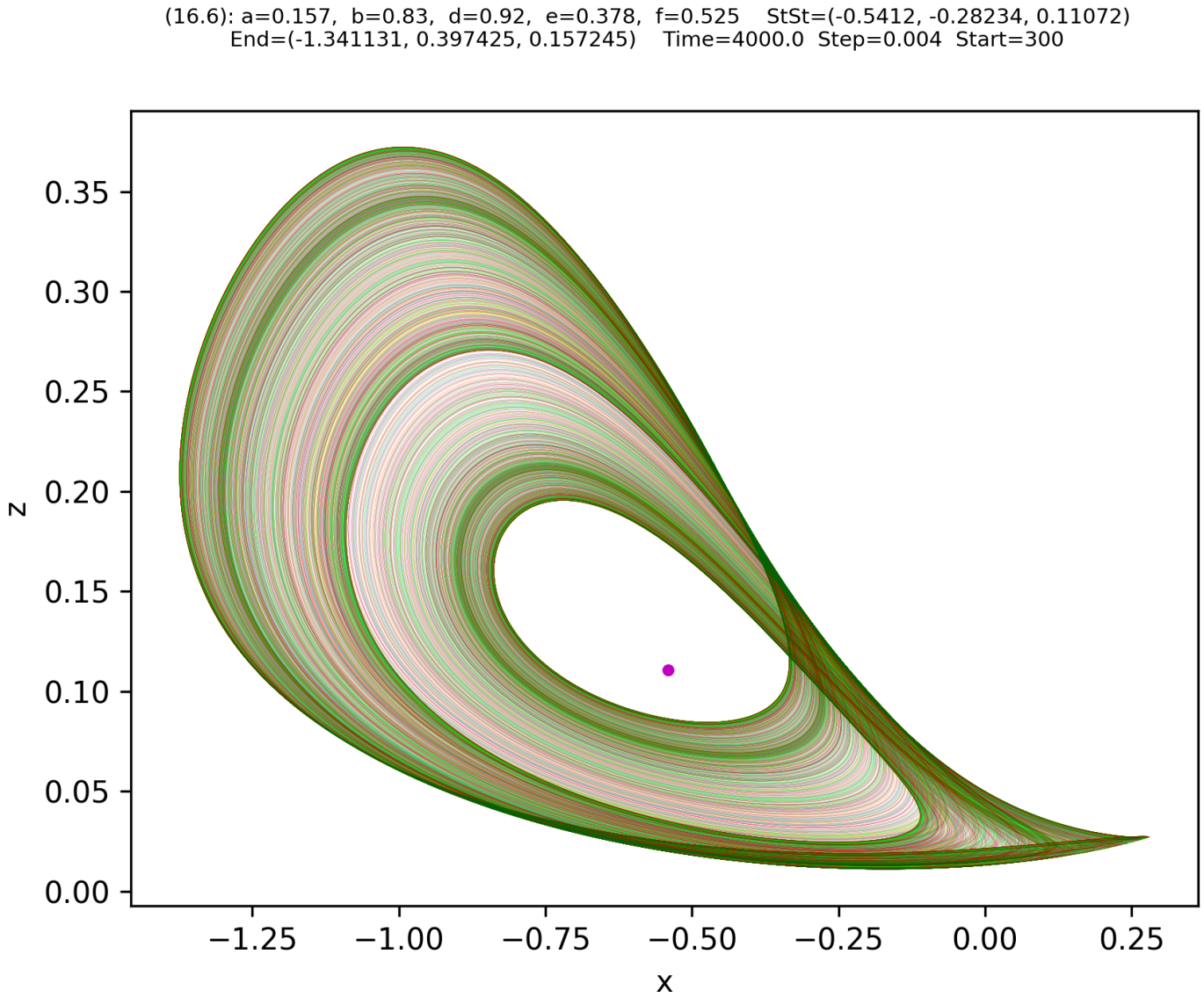
Legende: Chaos im **Beispiel 164**: $\lambda_1 = 0.050$
für: $a = 0.77445$, $b = 3.7$, $d = 0.79$, $e = 1.17$, und $f = 0.11$.



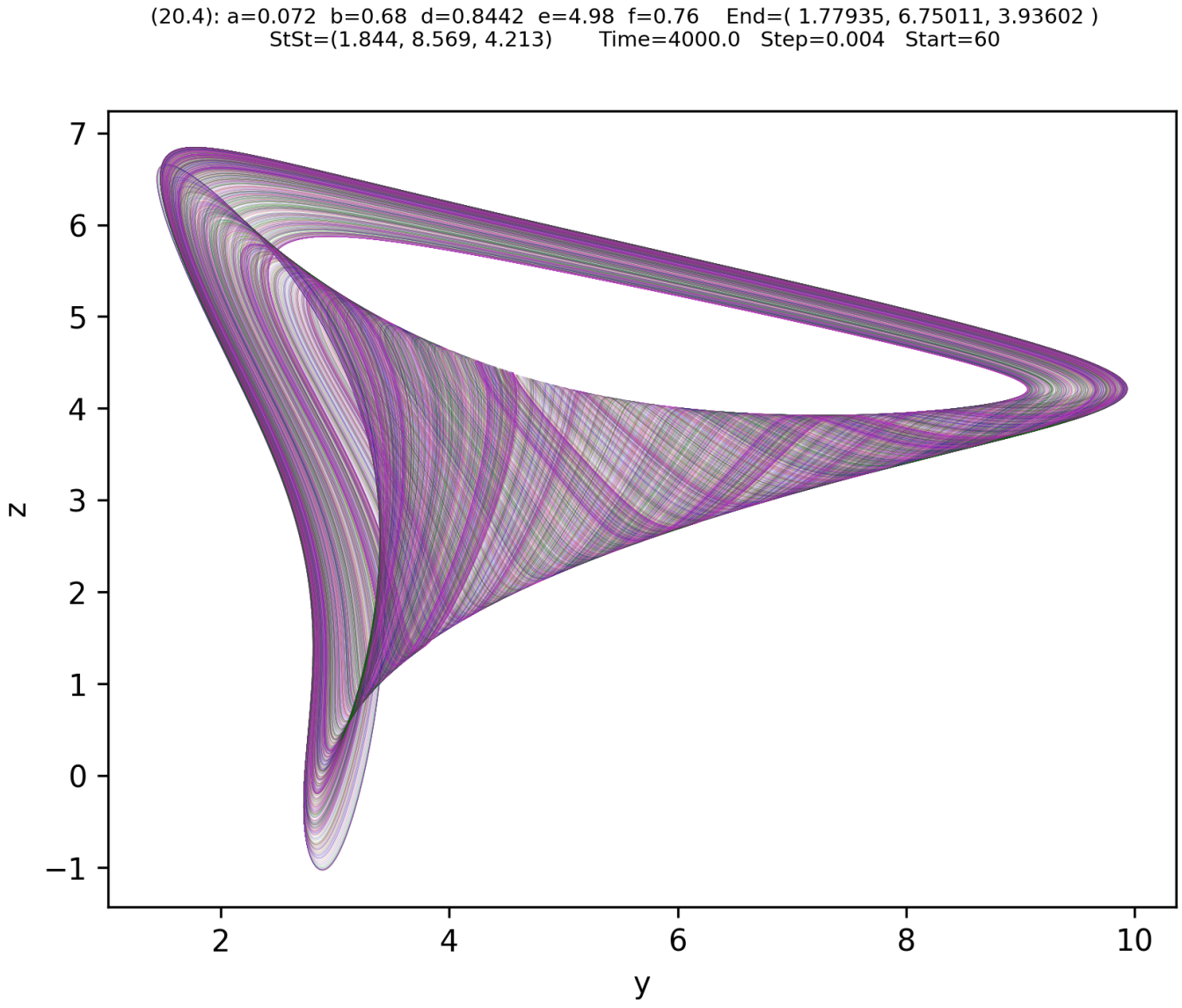
Legende: Chaos im **Beispiel 165**: $\lambda_1 = 0.077$
für: $a = 3.2,\ b = 0.47,\ d = 0.57,\ e = 2.355,$ und $f = 0.092$.



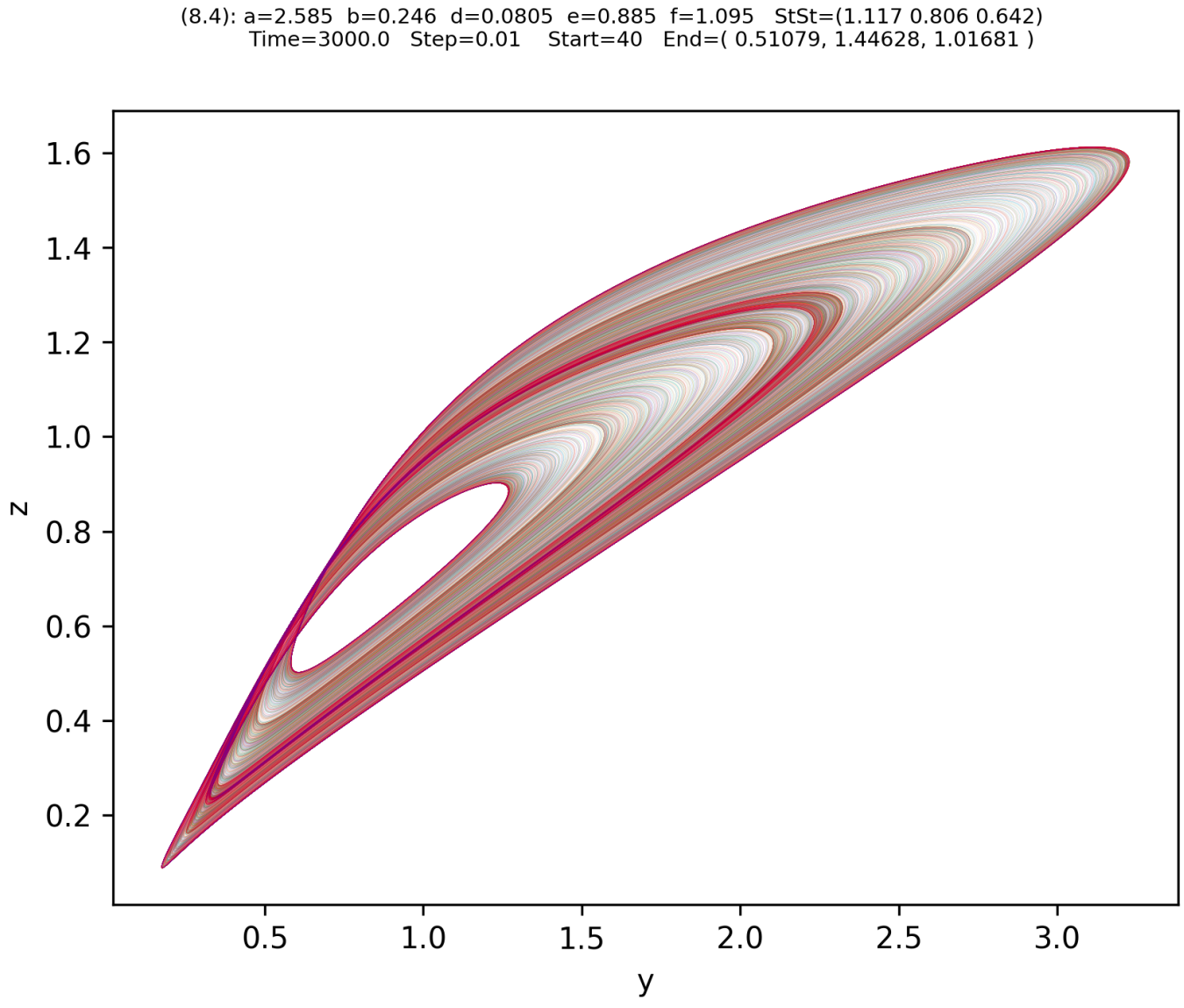
Legende: Chaos im **Beispiel 166**: $\lambda_1 = 0.077$
für: $a = 3.2,\ b = 0.47,\ d = 0.57,\ e = 2.355,$ und $f = 0.092$.



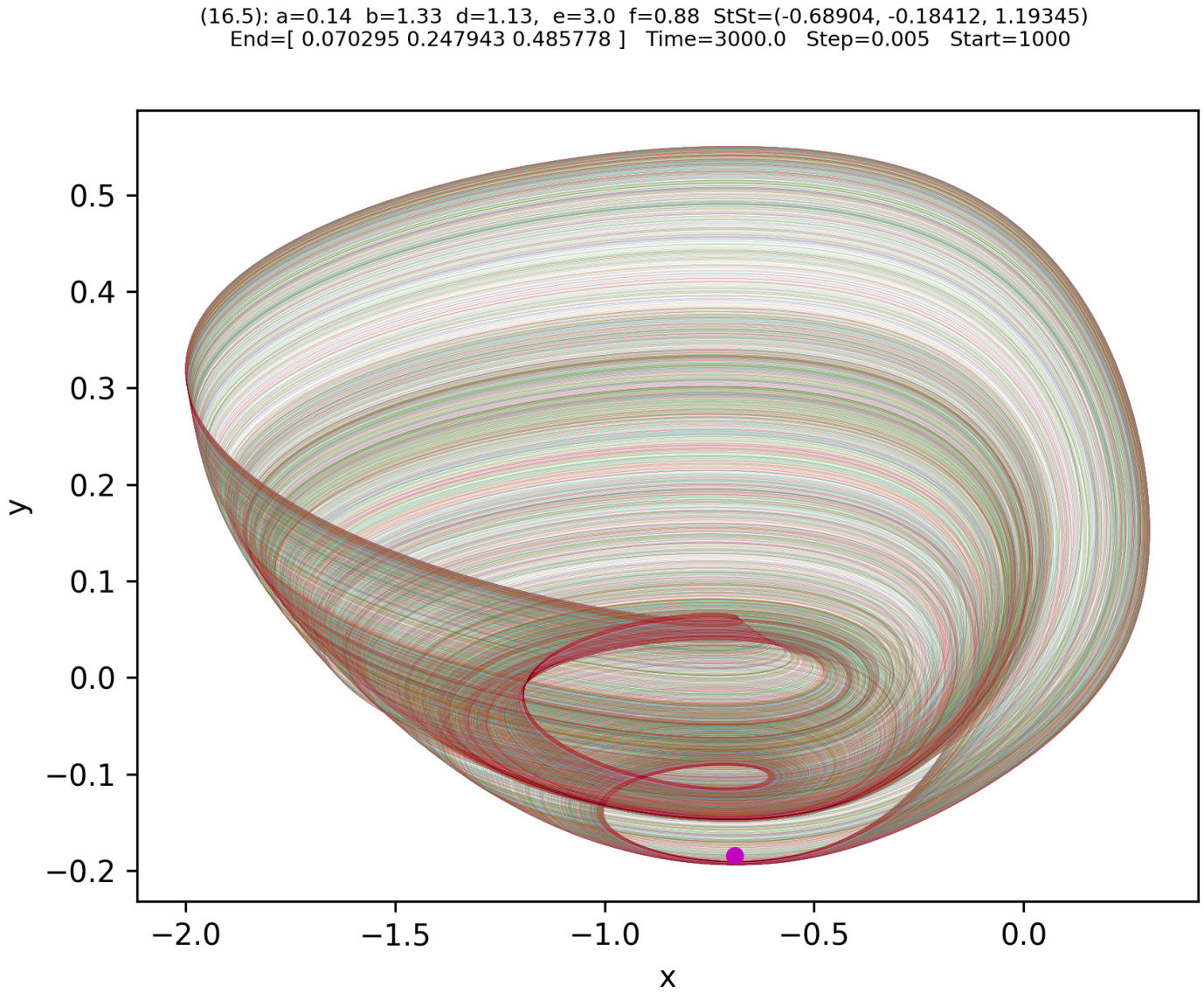
Legende: Chaos im **Beispiel 167**: $\lambda_1 = 0.081$
für: $a = 0.072$, $b = 0.68$, $d = 0.8442$, $e = 4.98$, und $f = 0.76$.



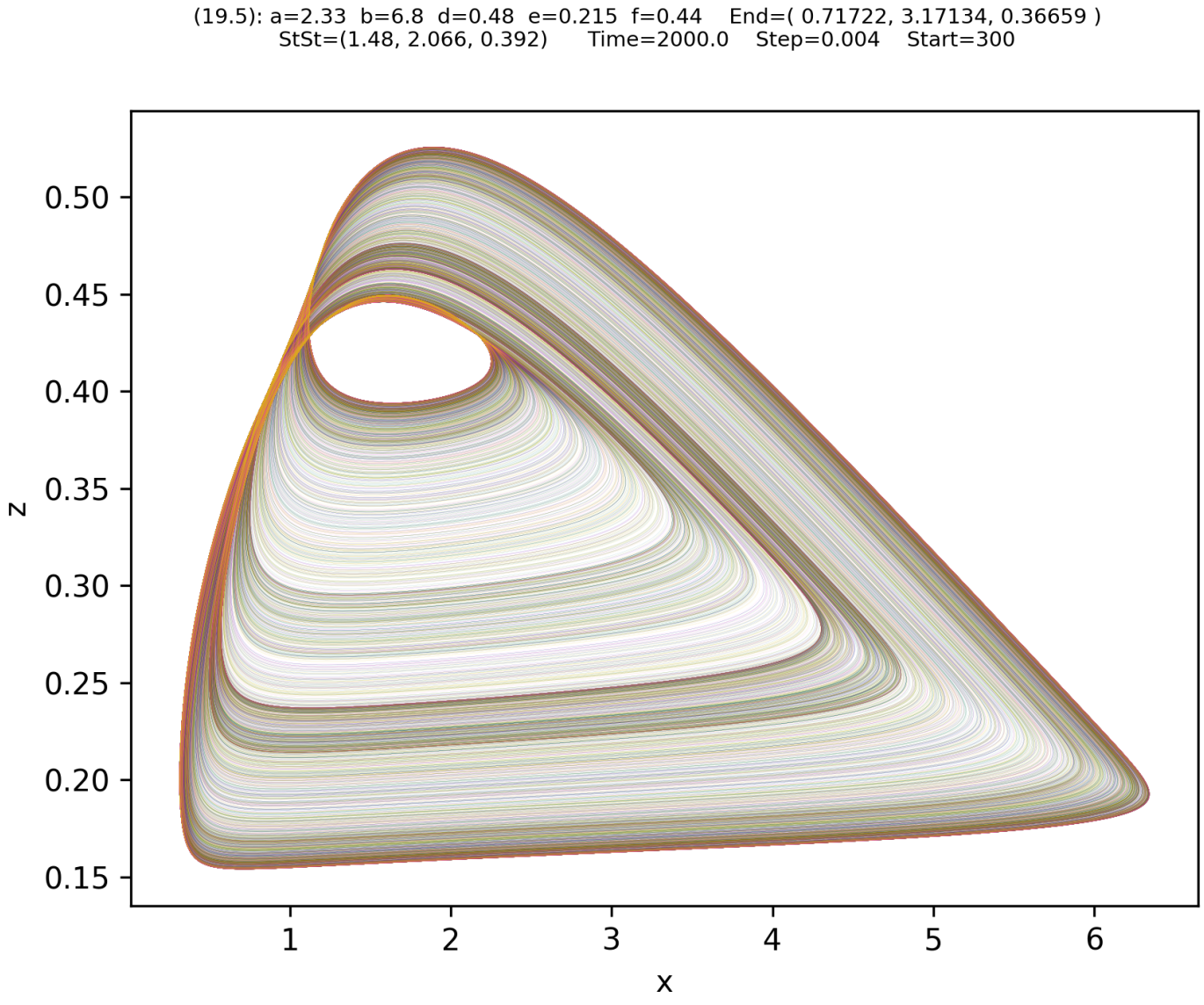
Legende: Chaos im **Beispiel 168**: $\lambda_1 = 0.043$
für: $a = 2.585,\ b = 0.246,\ d = 0.0805,\ e = 0.885,$ und $f = 1.095$.



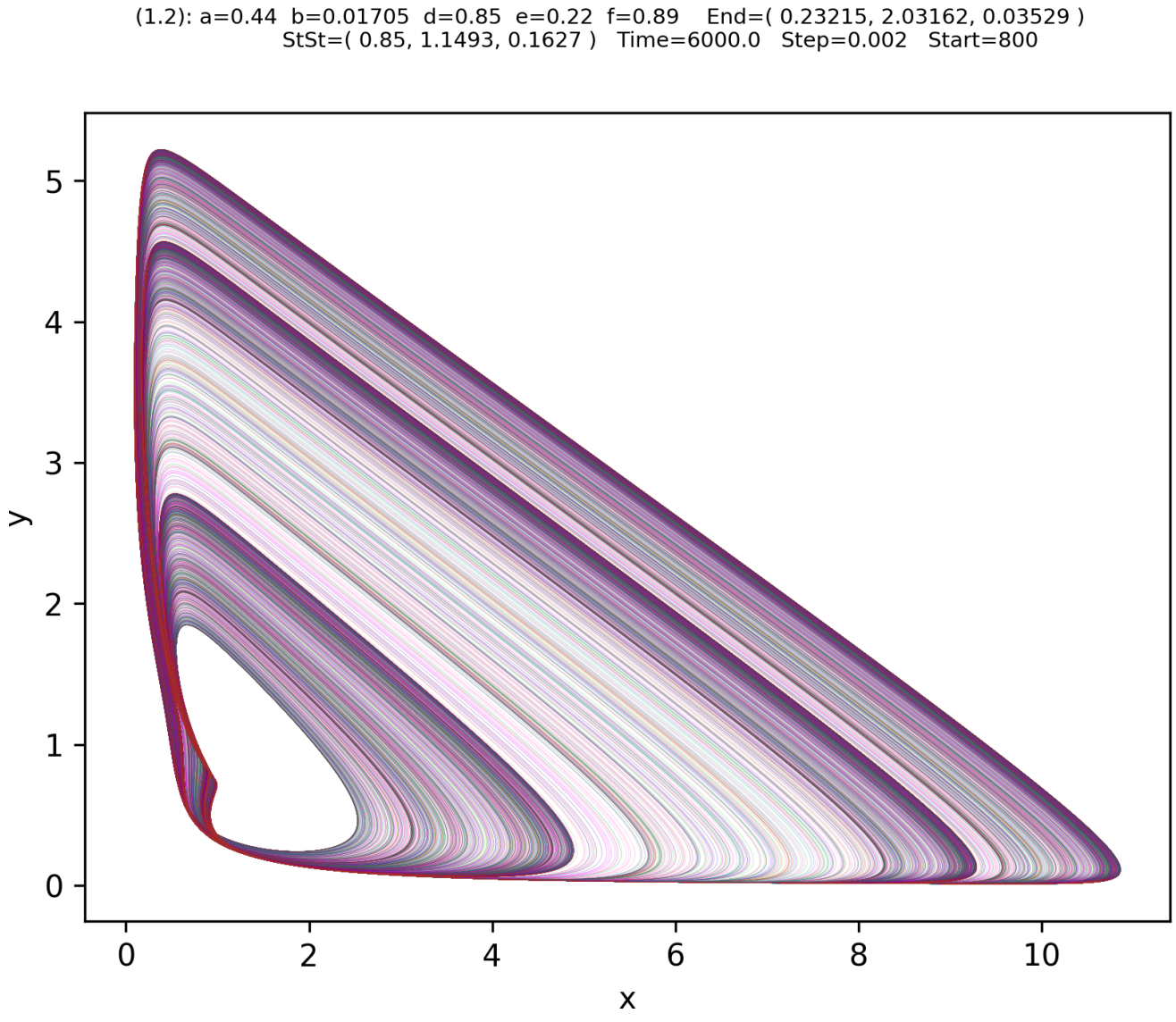
Legende: Chaos im **Beispiel 169**: $\lambda_1 = 0.098$
für: $a = 0.14$, $b = 1.33$, $d = 1.13$, $e = 3.0$ und $f = 0.88$.



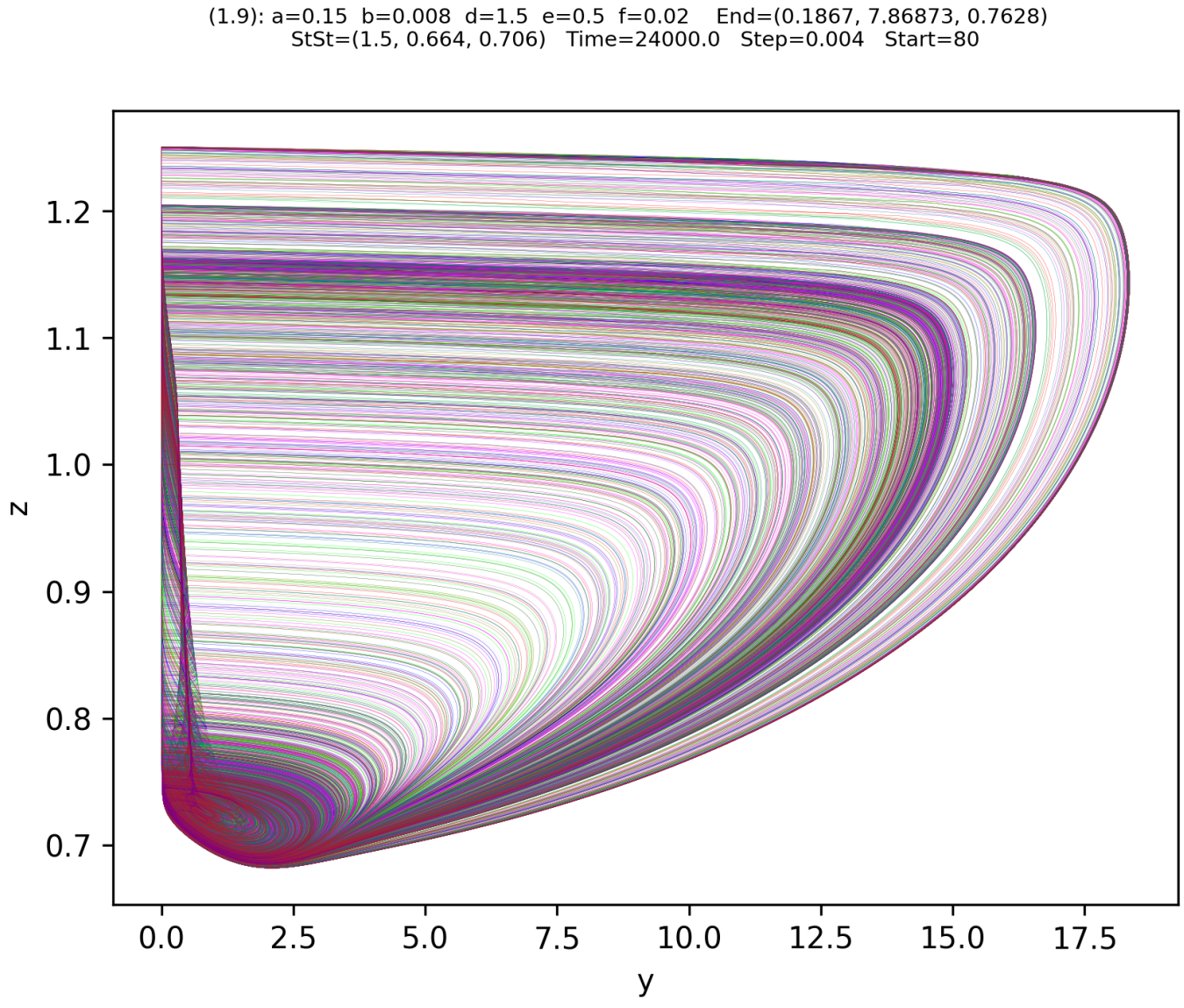
Legende: Chaos im **Beispiel 170**: $\lambda_1 = 0.083$
für: $a = 2.33,\ b = 6.8,\ d = 0.48,\ e = 0.215,$ und $f = 0.44$.



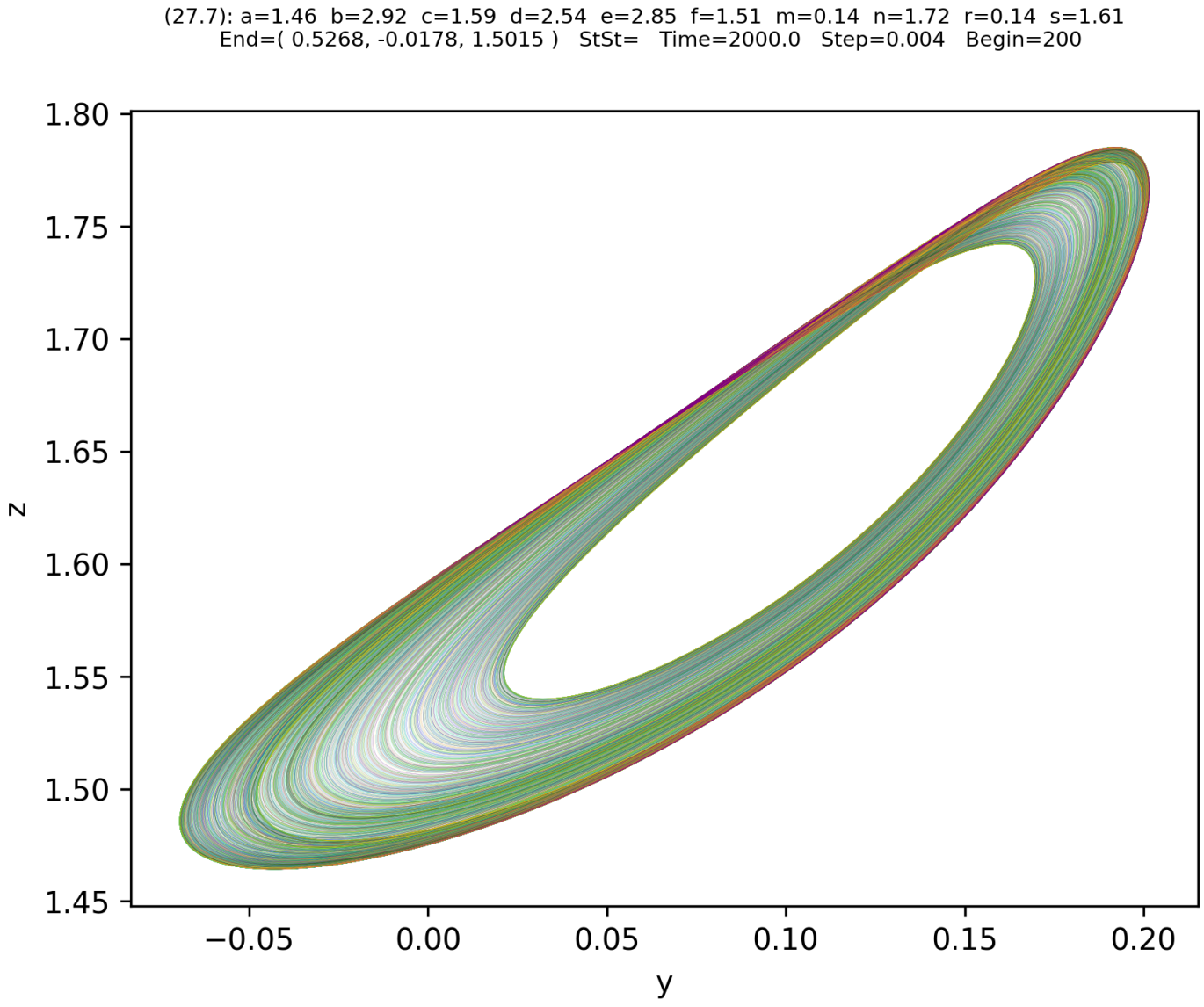
Legende: Chaos im **Beispiel 171**: $\lambda_1 = 0.012$
für: $a = 0.44$, $b = 0.01705$, $d = 0.85$, $e = 0.22$, und $f = 0.89$.



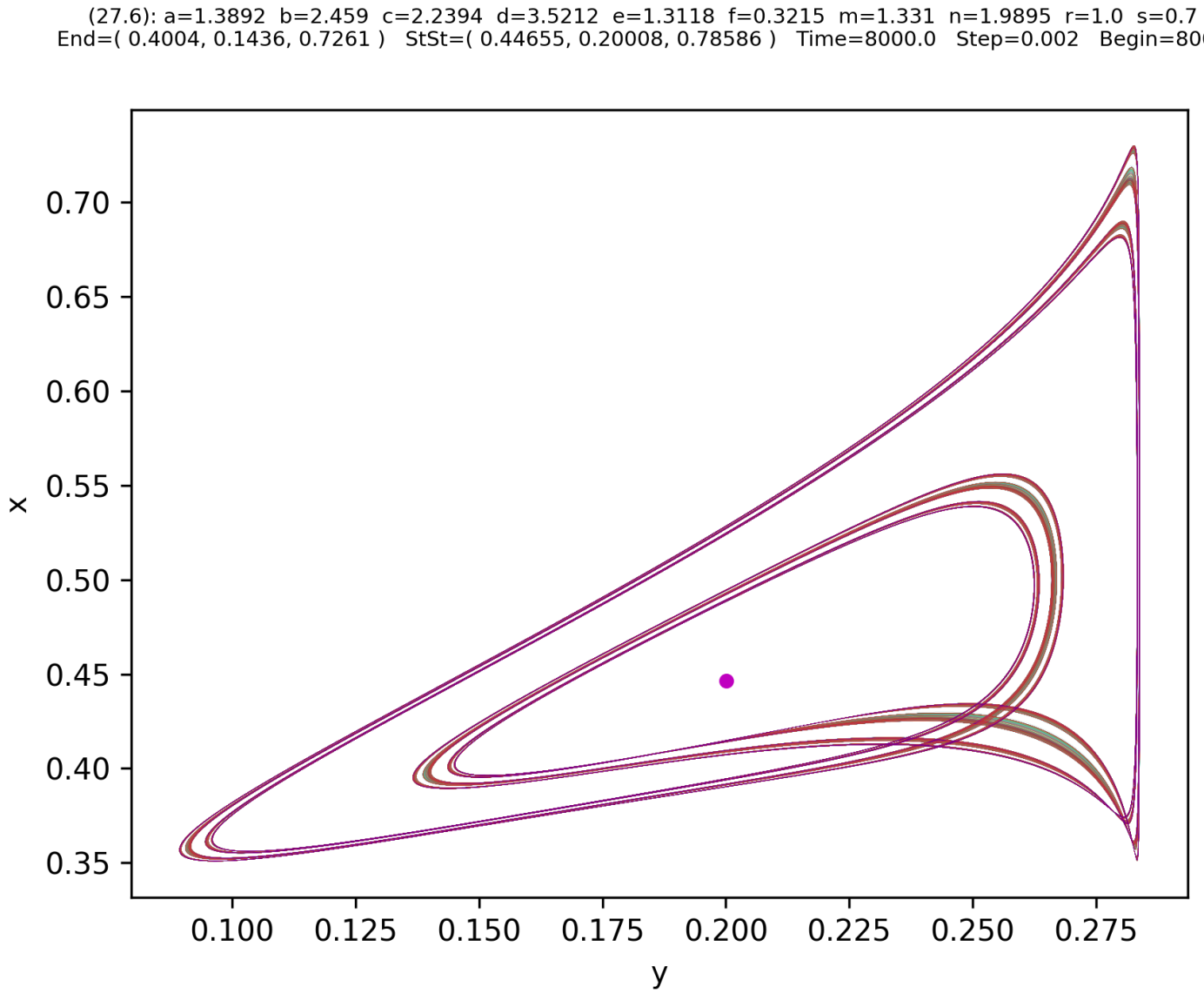
Legende: Chaos im **Beispiel 172**: $\lambda_1 = 0.028$
für: $a = 0.15,\ b = 0.008,\ d = 1.5,\ e = 0.5,$ und $f = 0.02$.



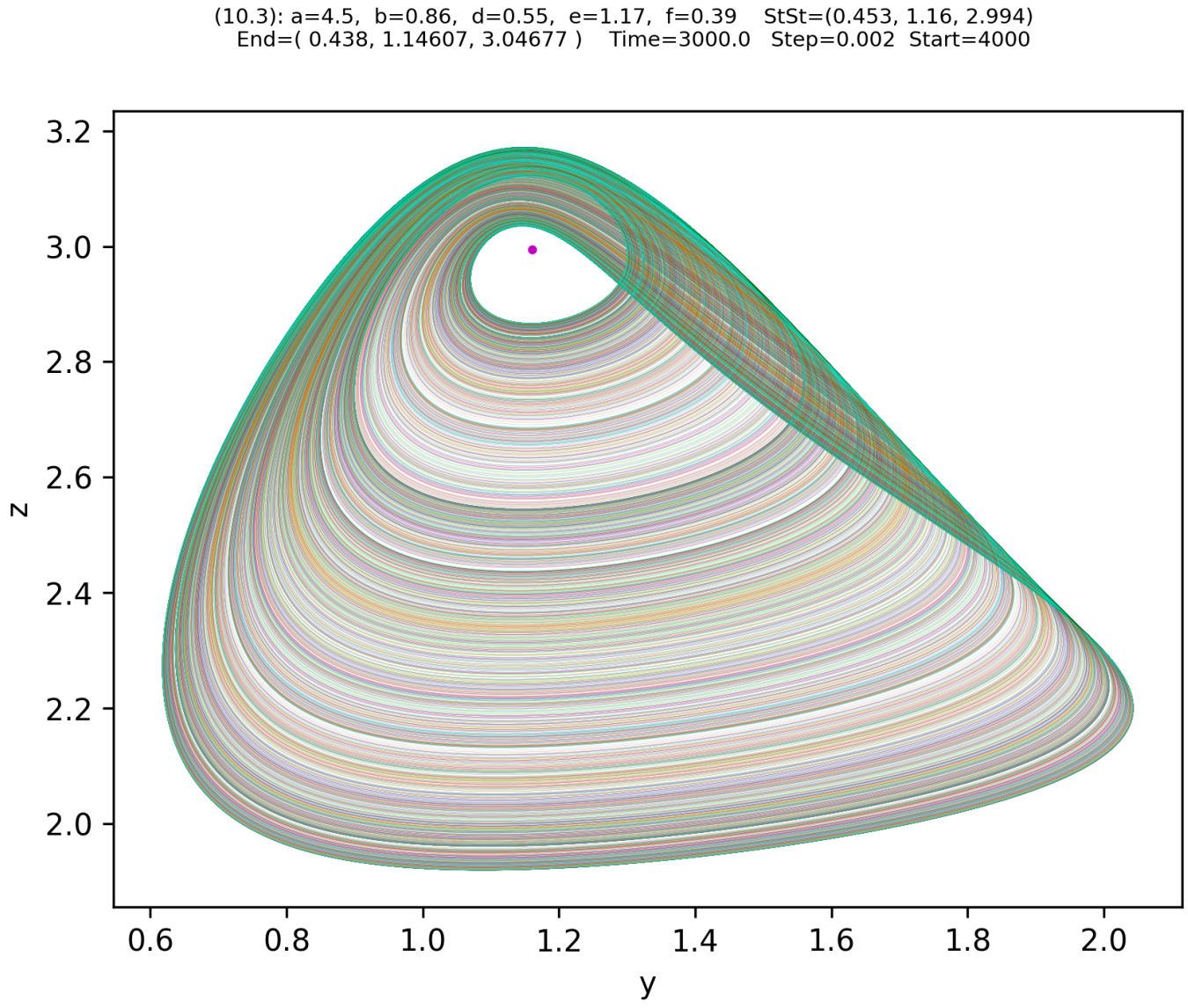
Legende: Chaos im **Beispiel 173**: $\lambda_1 = 0.055$ für: $a = 1.068$, $b = 1.42$, $c = 0.62$, $d = 0.42$, $e = 1.5$, $f = 0.79$, $m = 0.71$, $n = 0.81$, $r = 1.25$, $s = 1.7$.



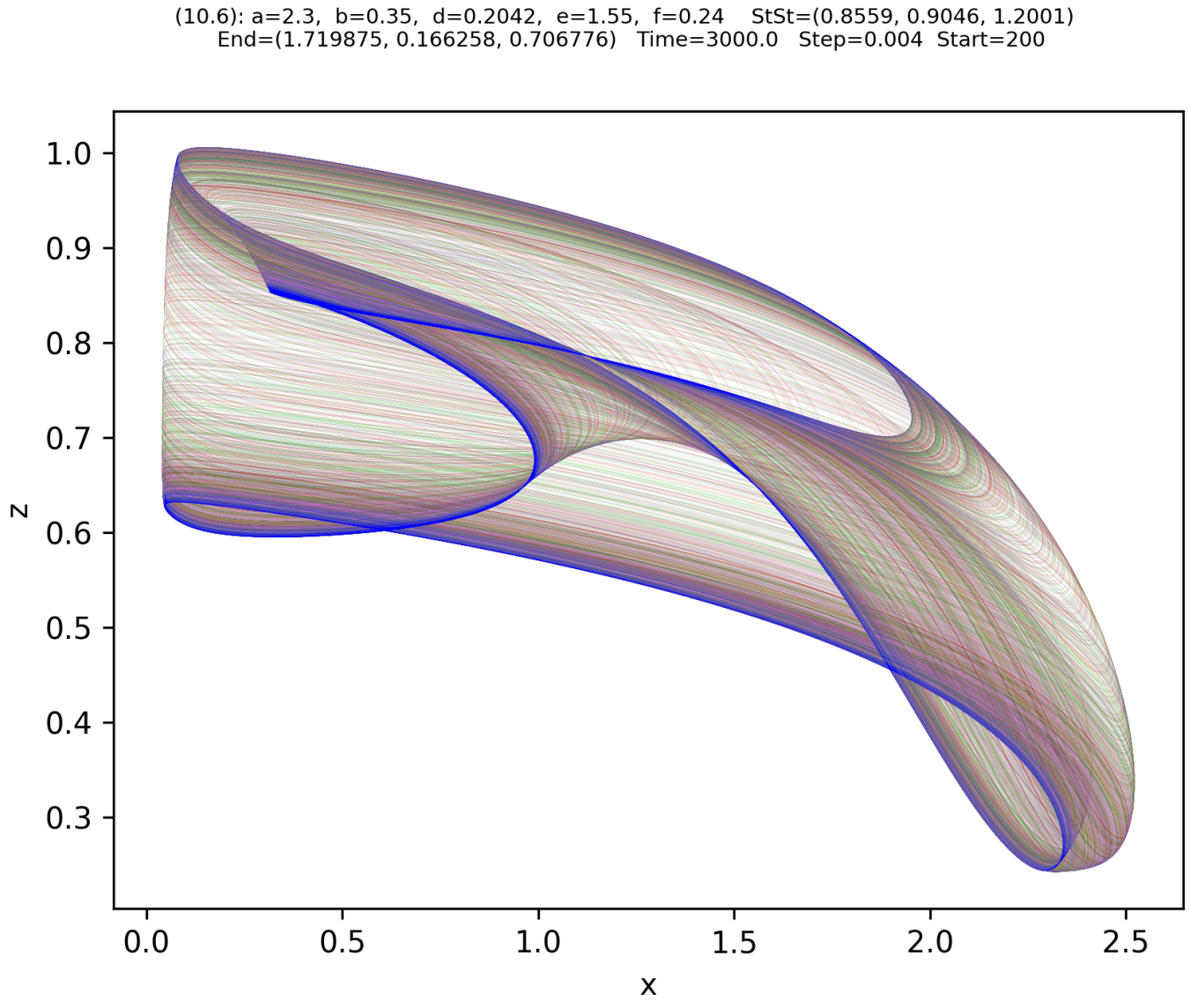
Legende: Chaos im **Beispiel 174**: $\lambda_1 = 0.003$ für: $a = 1.3891$, $b = 2.459$, $r = 1.0$, $c = 2.2394$, $d = 3.5212$, $e = 1.3118$, $f = 0.3215$, $m = 1.331$, $n = 1.9895$, $s = 0.7$



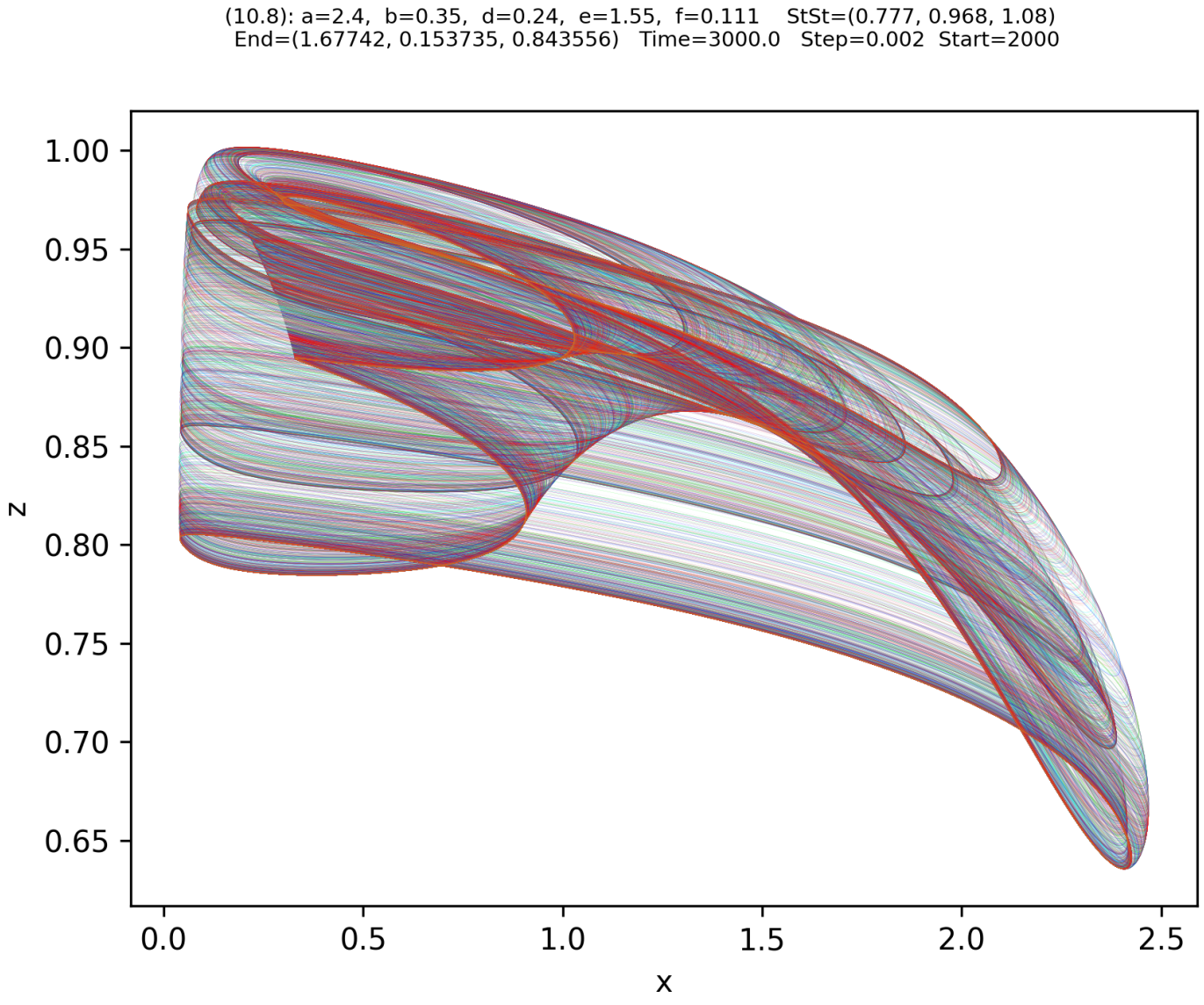
Legende: Chaos im **Beispiel 175**: $\lambda_1 = 0.050$
für: $a = 4.5,\ b = 0.86,\ d = 0.55,\ e = 1.17,$ und $f = 0.39$.



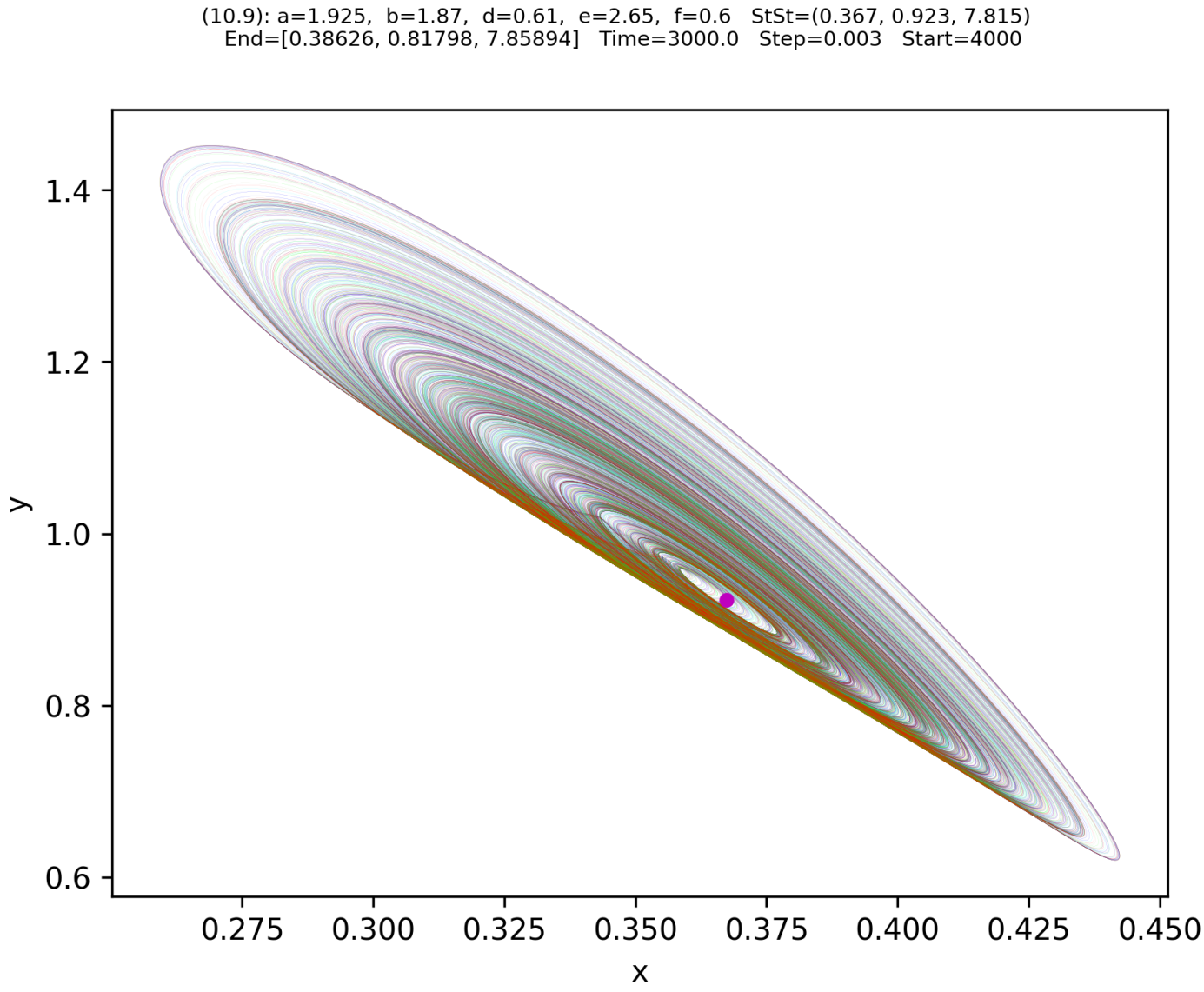
Legende: Chaos im **Beispiel 176**: $\lambda_1 = 0.050$
für: $a = 2.3,\ b = 0.35,\ d = 0.2042,\ e = 1.55,$ und $f = 0.24$.



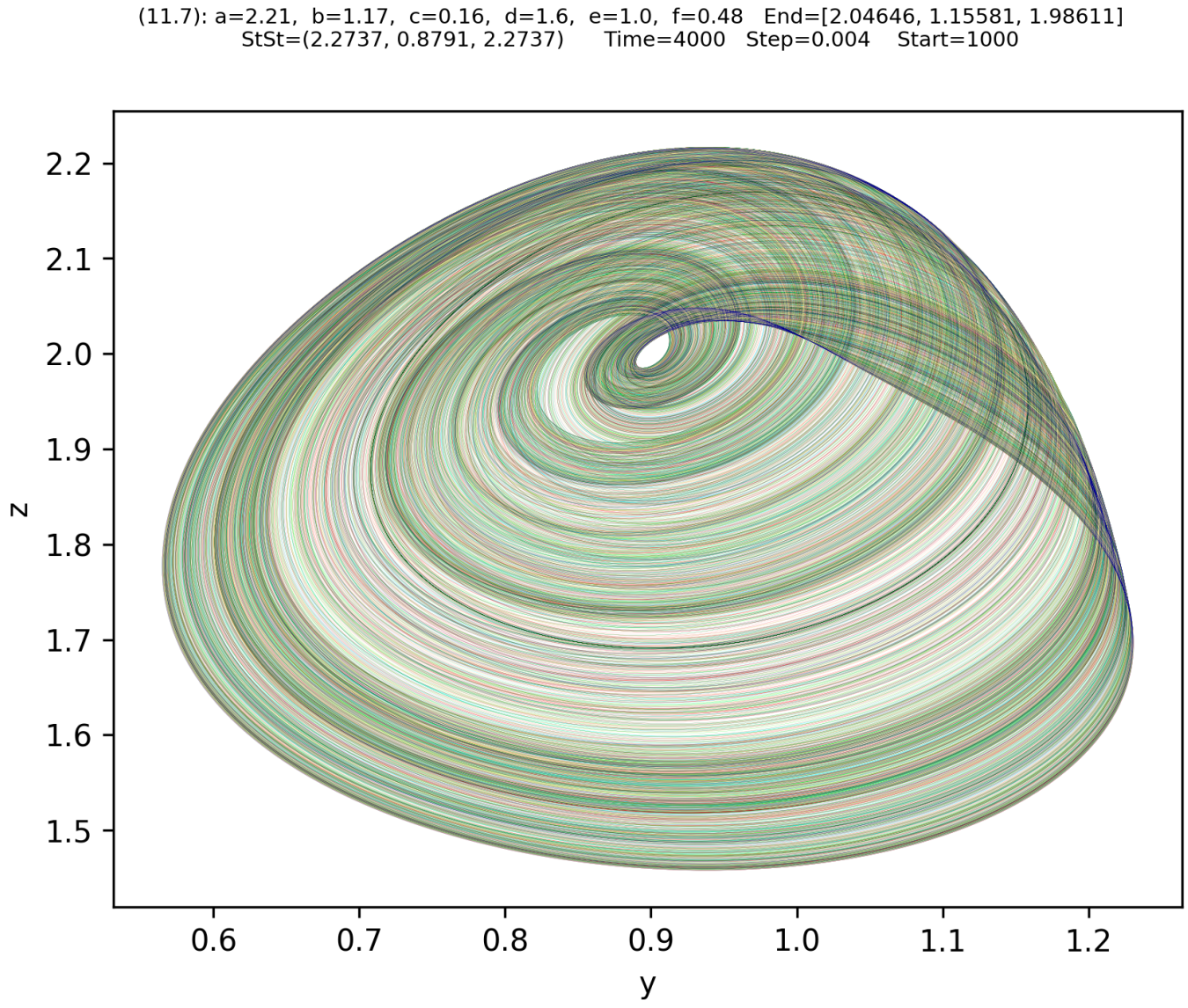
Legende: Chaos im **Beispiel 177**: $\lambda_1 = 0.060$
für: $a = 2.4,\ b = 0.35,\ d = 0.24,\ e = 1.55,$ und $f = 0.111$.



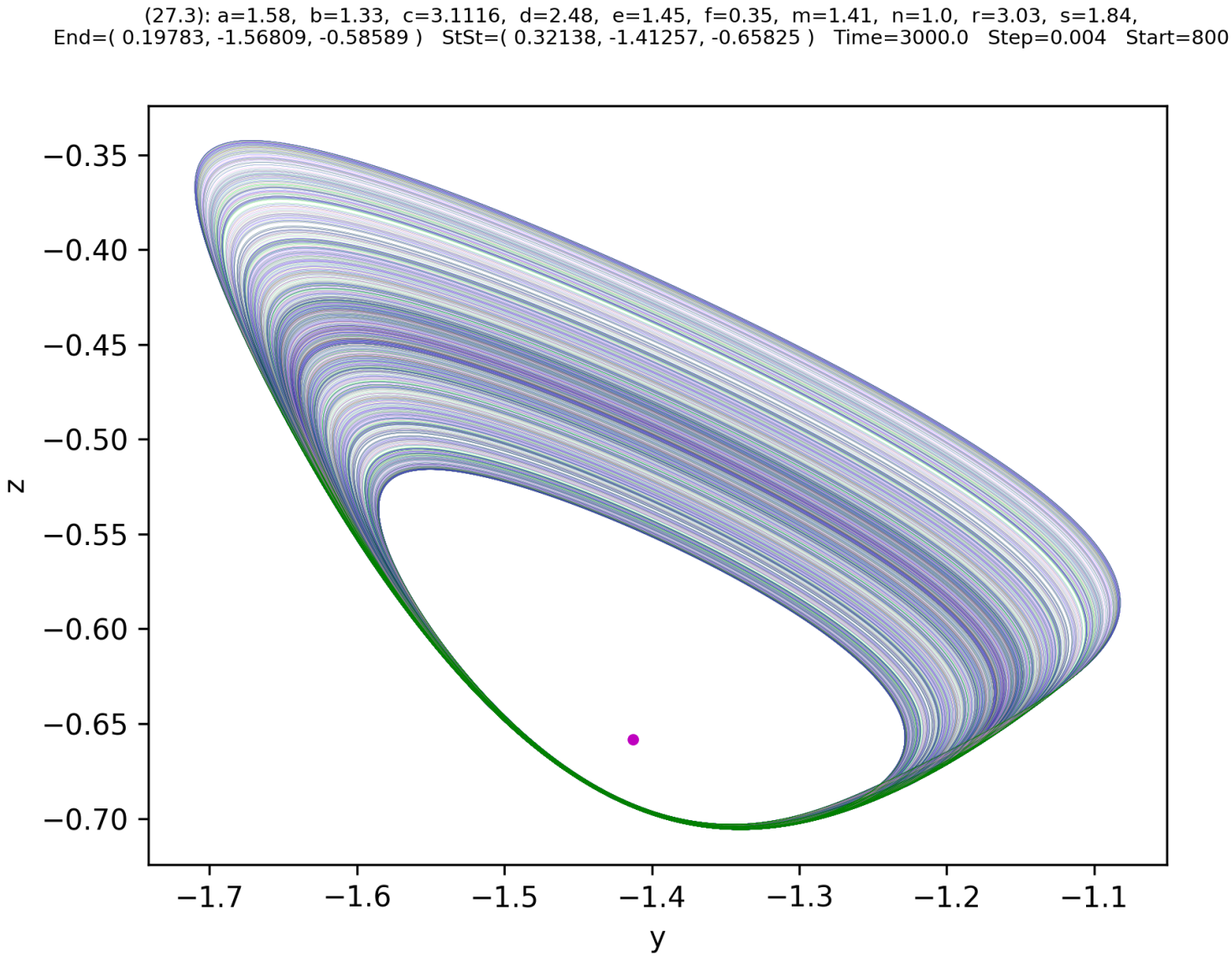
Legende: Chaos im **Beispiel 178**: $\lambda_1 = 0.077$
für: $a = 1.925,\ b = 1.87,\ d = 0.61,\ e = 2.65,$ und $f = 0.6$.



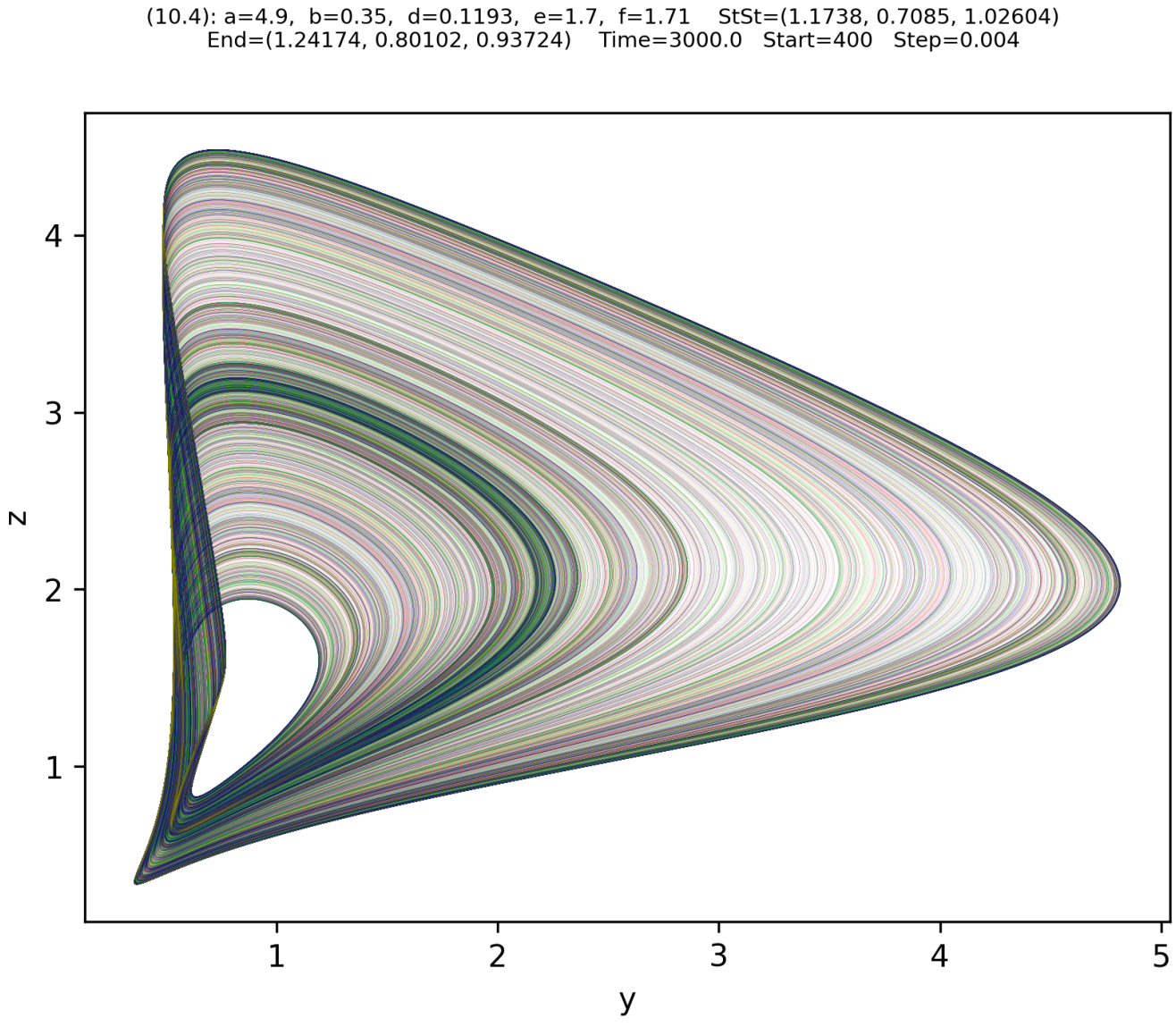
Legende: Chaos im **Beispiel 179**: $\lambda_1 = 0.061$
für: $a = 2.21$, $b = 1.17$, $c = 0.16$, $d = 1.6$, $e = 1.0$ und $f = 0.48$.



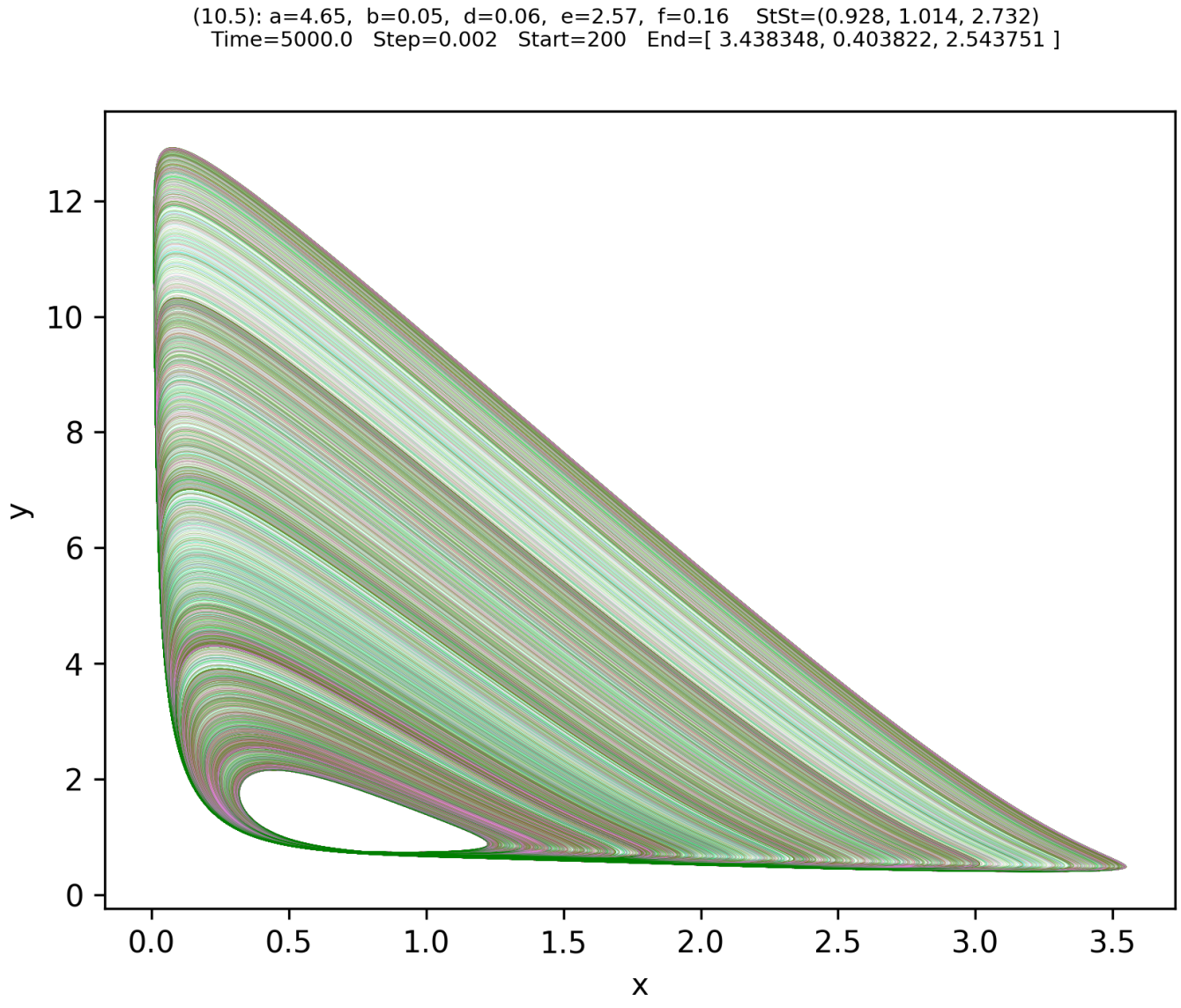
Legende: Chaos im **Beispiel 180**: $\lambda_1 = 0.029$ für: $a = 1.58$, $b = 1.33$, $c = 3.1116$, $d = 2.48$, $e = 1.45$, $f = 0.35$, $m = 1.41$, $n = 1.0$, $r = 3.03$, $s = 1.84$.



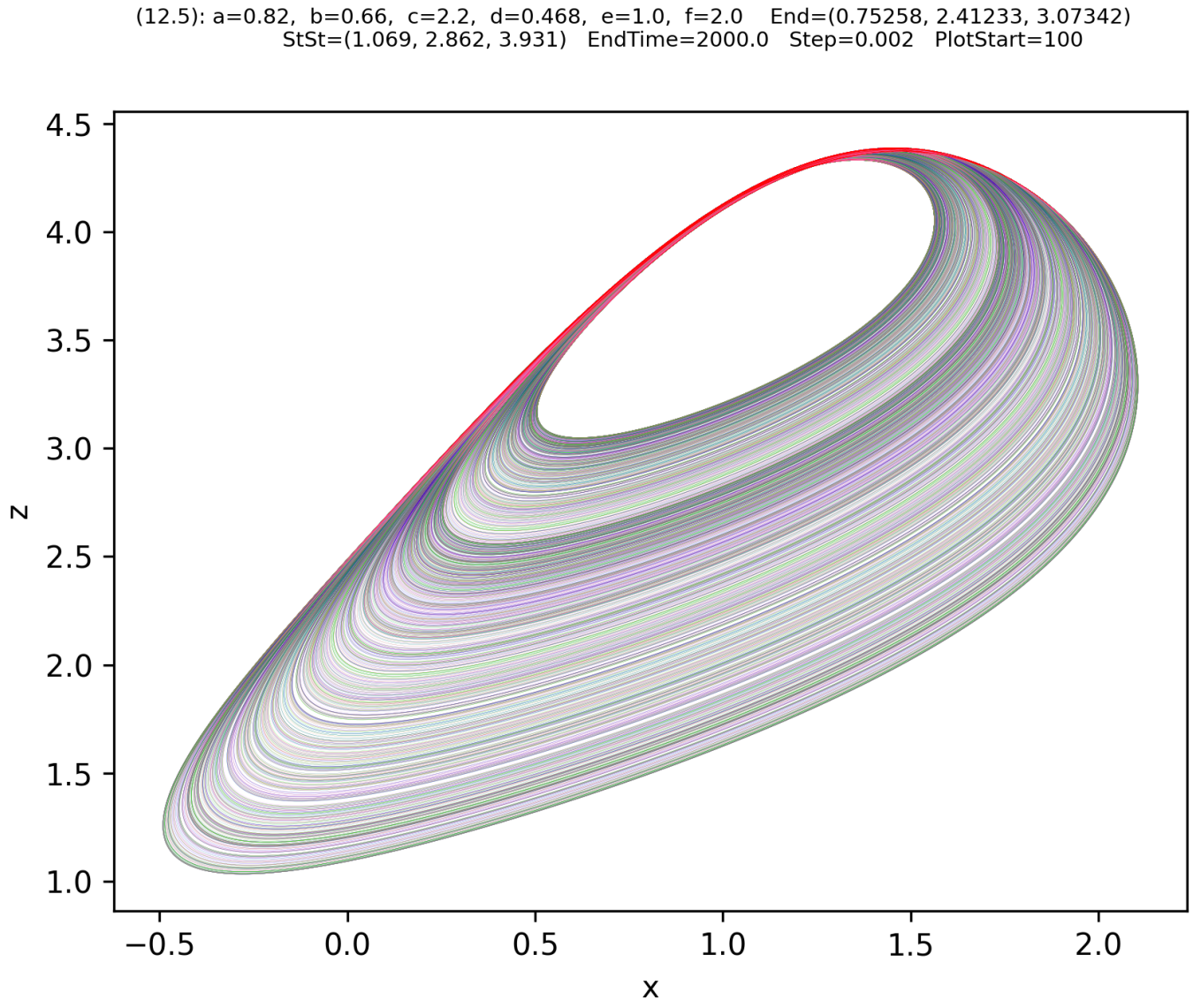
Legende: Chaos im **Beispiel 181**: $\lambda_1 = 0.050$
für: $a = 4.9$, $b = 0.35$, $d = 0.1193$, $e = 1.7$ und $f = 1.71$.



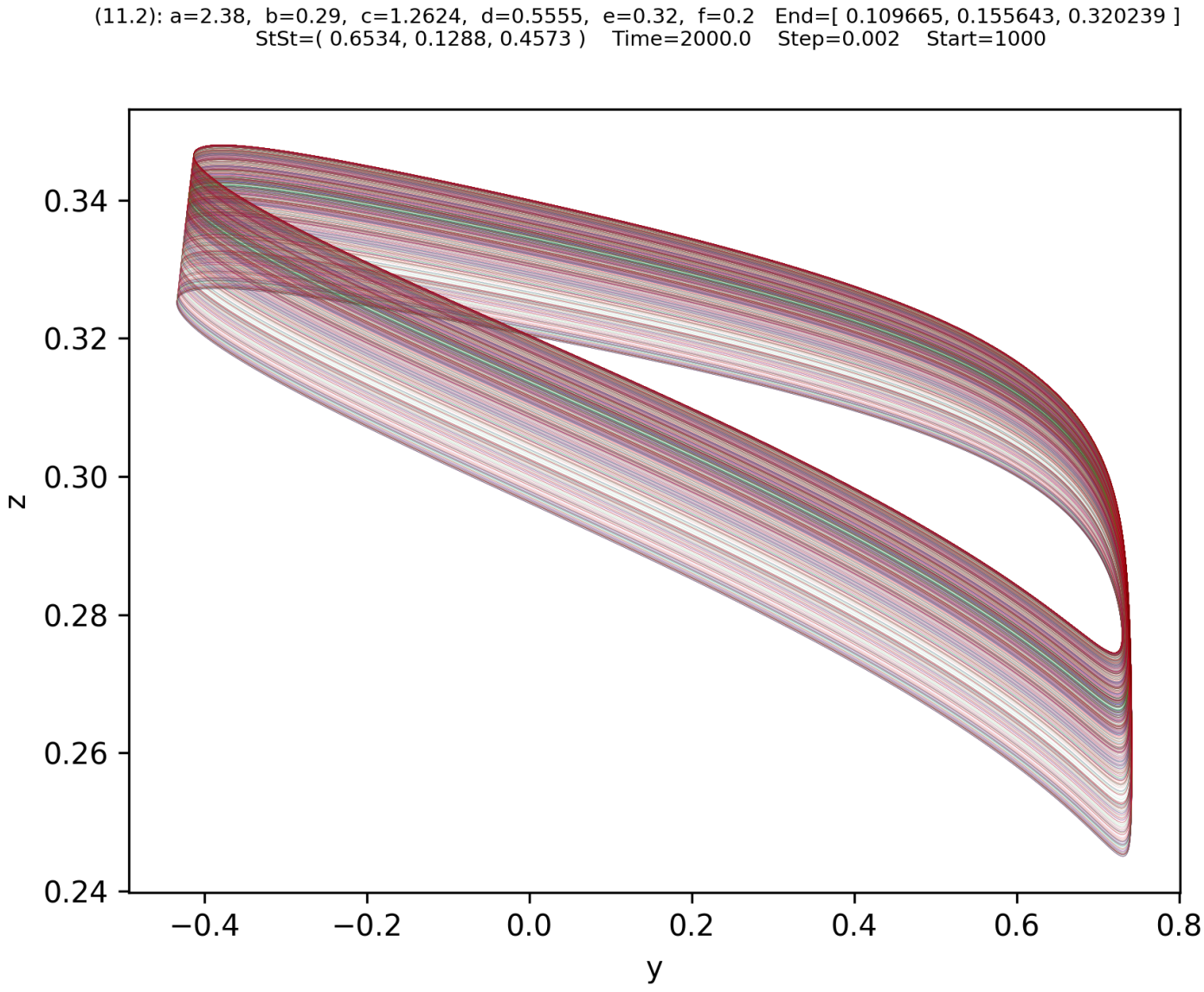
Legende: Chaos im **Beispiel 182**: $\lambda_1 = 0.060$
für: $a = 4.65$, $b = 0.05$, $d = 0.06$, $e = 2.57$ und $f = 0.16$.



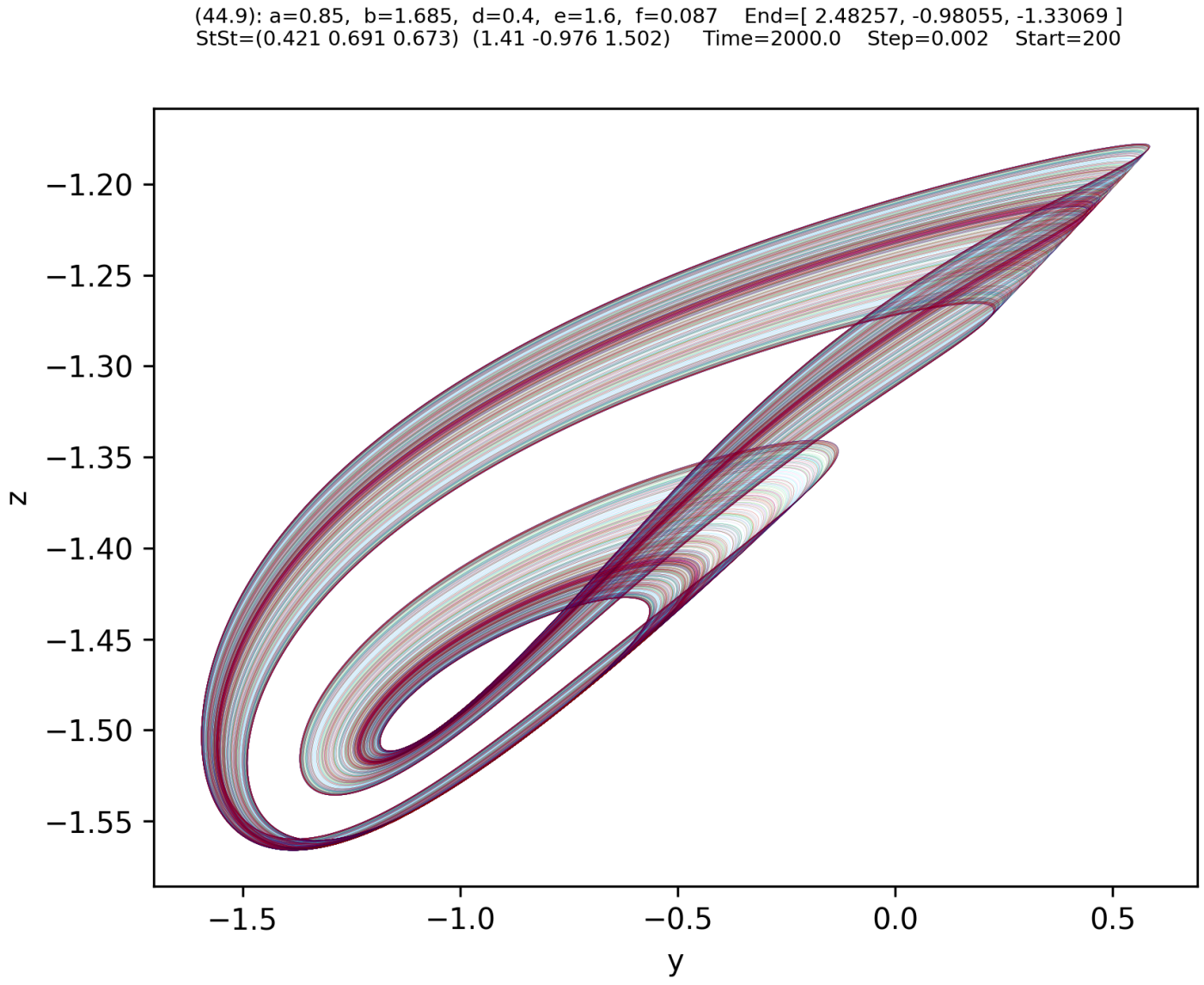
Legende: Chaos im **Beispiel 183**: $\lambda_1 = 0.039$
für: $a = 0.82$, $b = 0.66$, $c = 2.2$, $d = 0.468$ und $f = 2.0$.



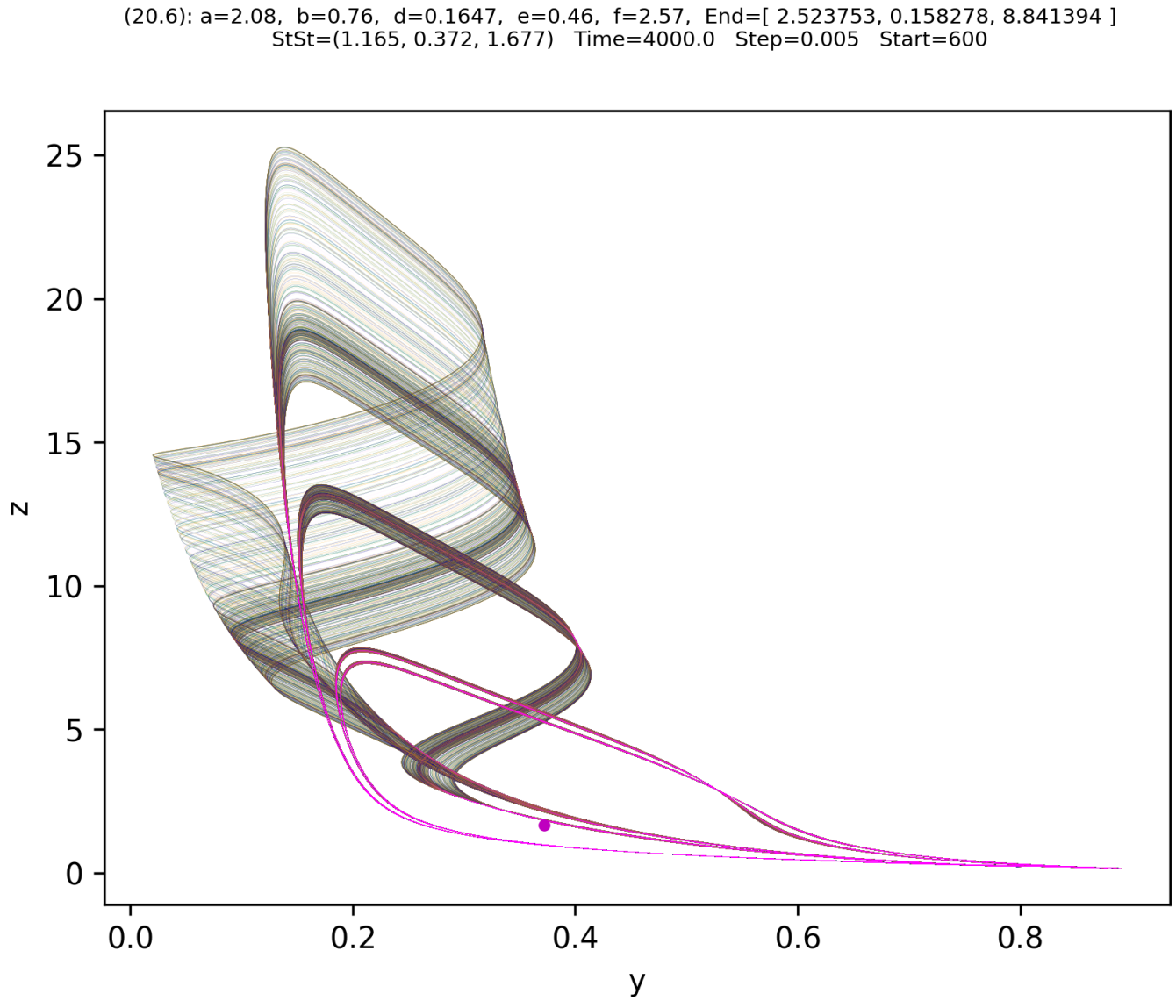
Legende: Chaos im **Beispiel 184**: $\lambda_1 = 0.035$ für:
$a = 2.38,\ b = 0.29,\ c = 1.2624,\ d = 0.5555, e = 0.32$ und $f = 0.2$.



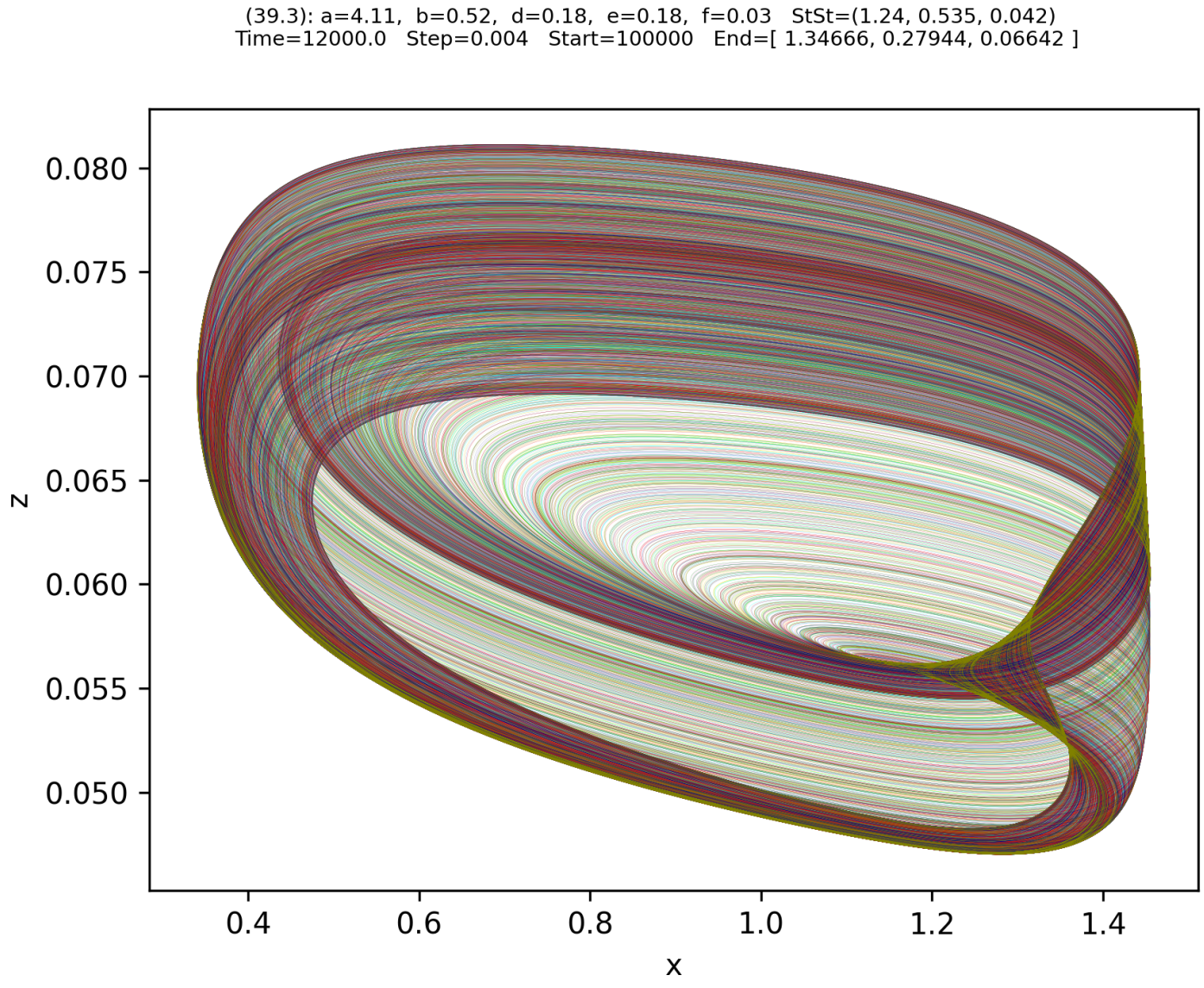
Legende: Chaos im **Beispiel 185**: $\lambda_1 = 0.021$
für: $a = 0.85$, $b = 1.685$, $d = 0.4$, $e = 1.6$ und $f = 0.087$.



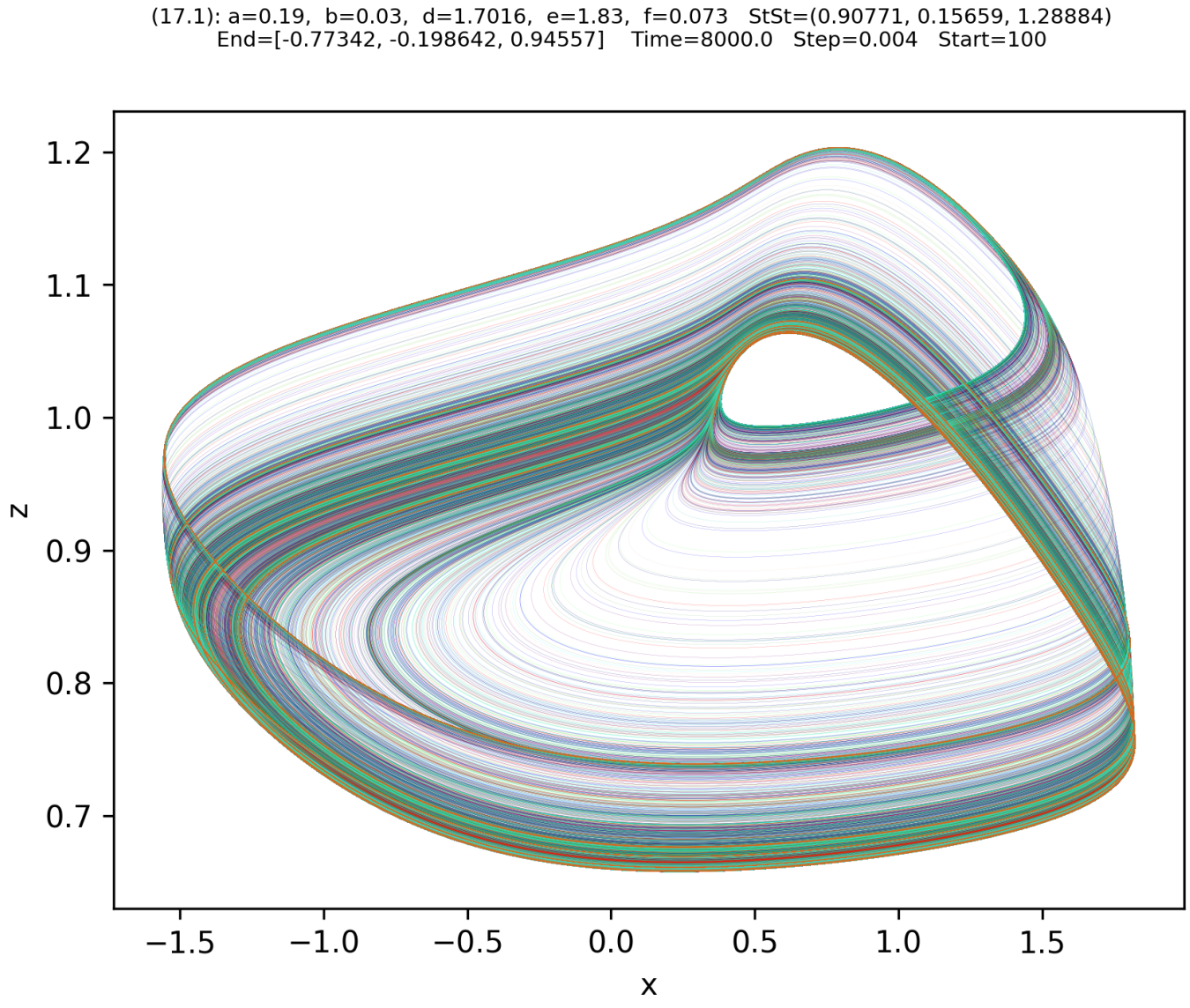
Legende: Chaos im **Beispiel 186**: $\lambda_1 = 0.011$
für: $a = 2.08$, $b = 0.76$, $d = 0.1647$, $e = 0.46$ und $f = 2.57$.



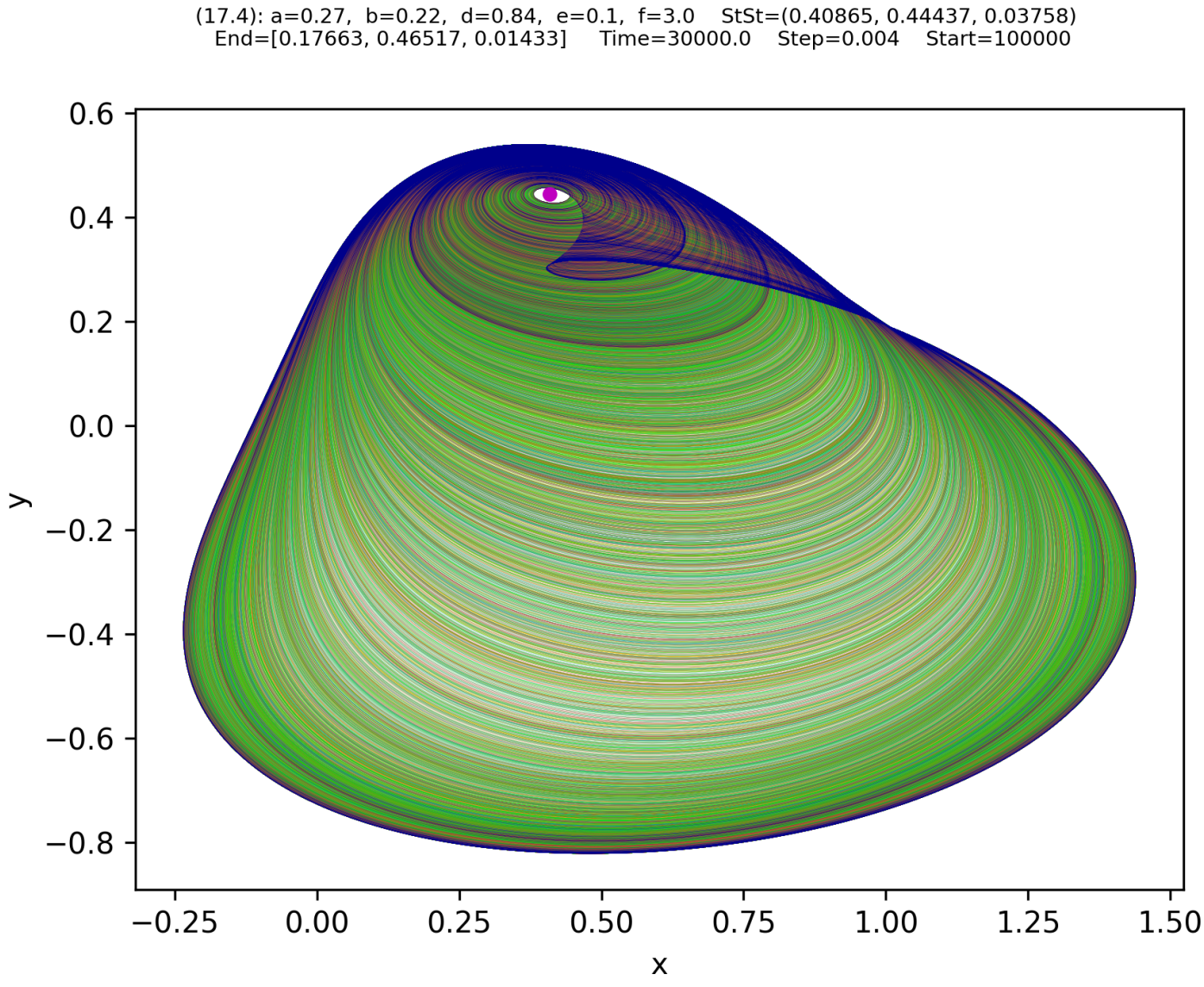
Legende: Chaos im **Beispiel 187**: $\lambda_1 = 0.024$
für: $a = 4.11$, $b = 0.52$, $d = 0.18$, $e = 0.18$ und $f = 0.03$.



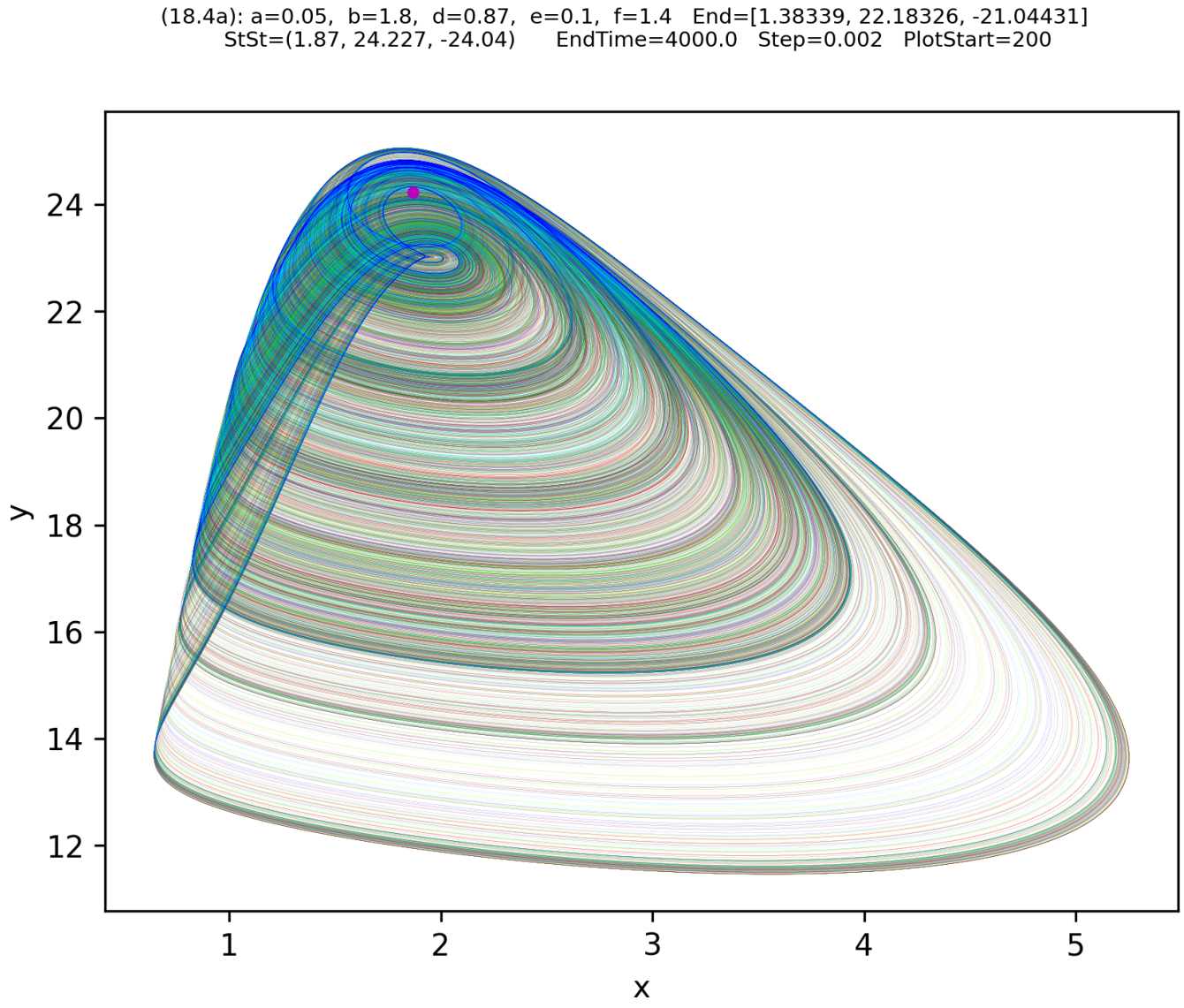
Legende: Chaos im **Beispiel 188**: $\lambda_1 = 0.033$
für: $a = 0.19$, $b = 0.03$, $d = 1.7016$, $e = 1.83$ und $f = 0.073$.



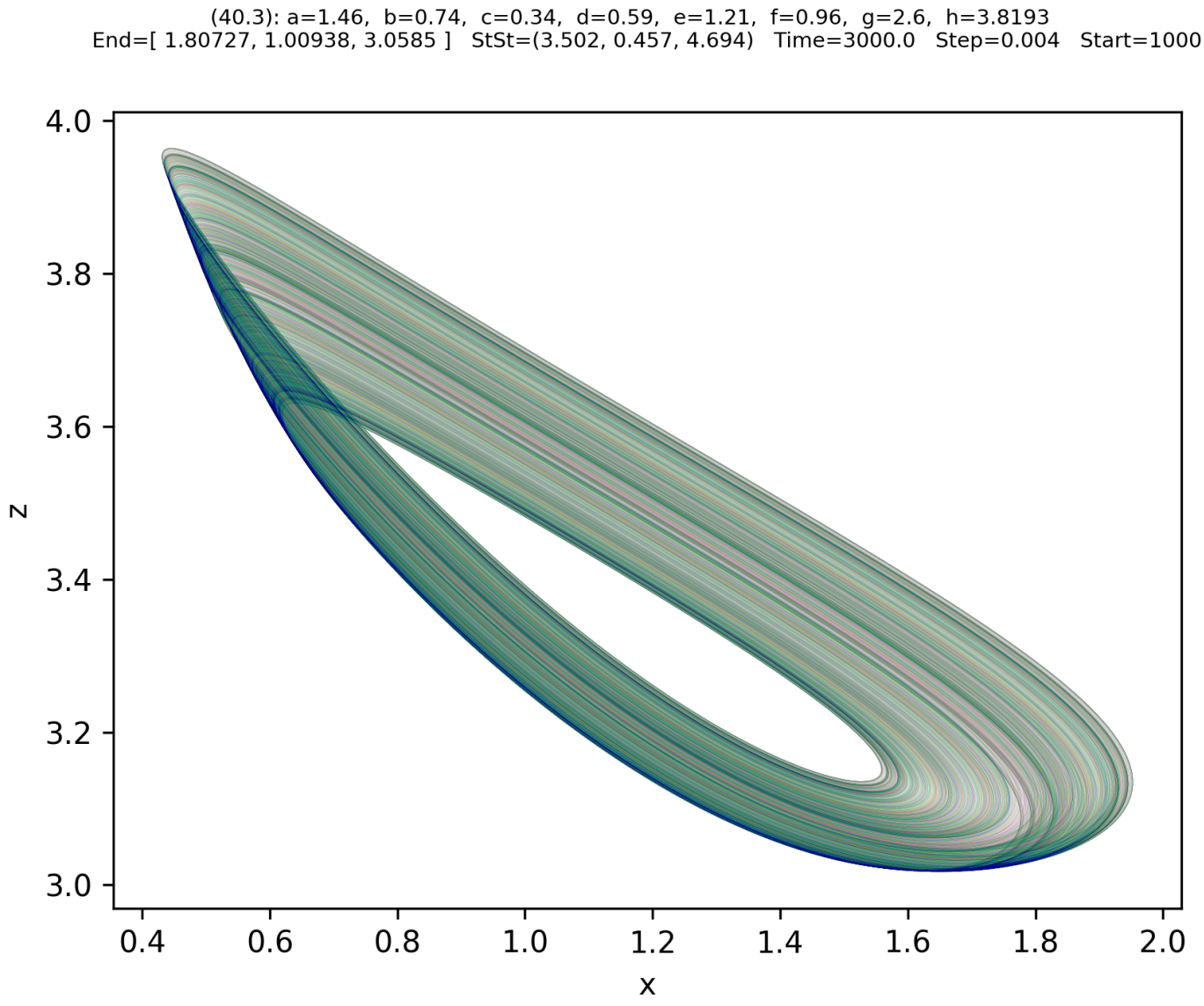
Legende: Chaos im **Beispiel 189**: $\lambda_1 = 0.073$
für: $a = 0.27$, $b = 0.22$, $d = 0.84$, $e = 0.1$ und $f = 3.0$.



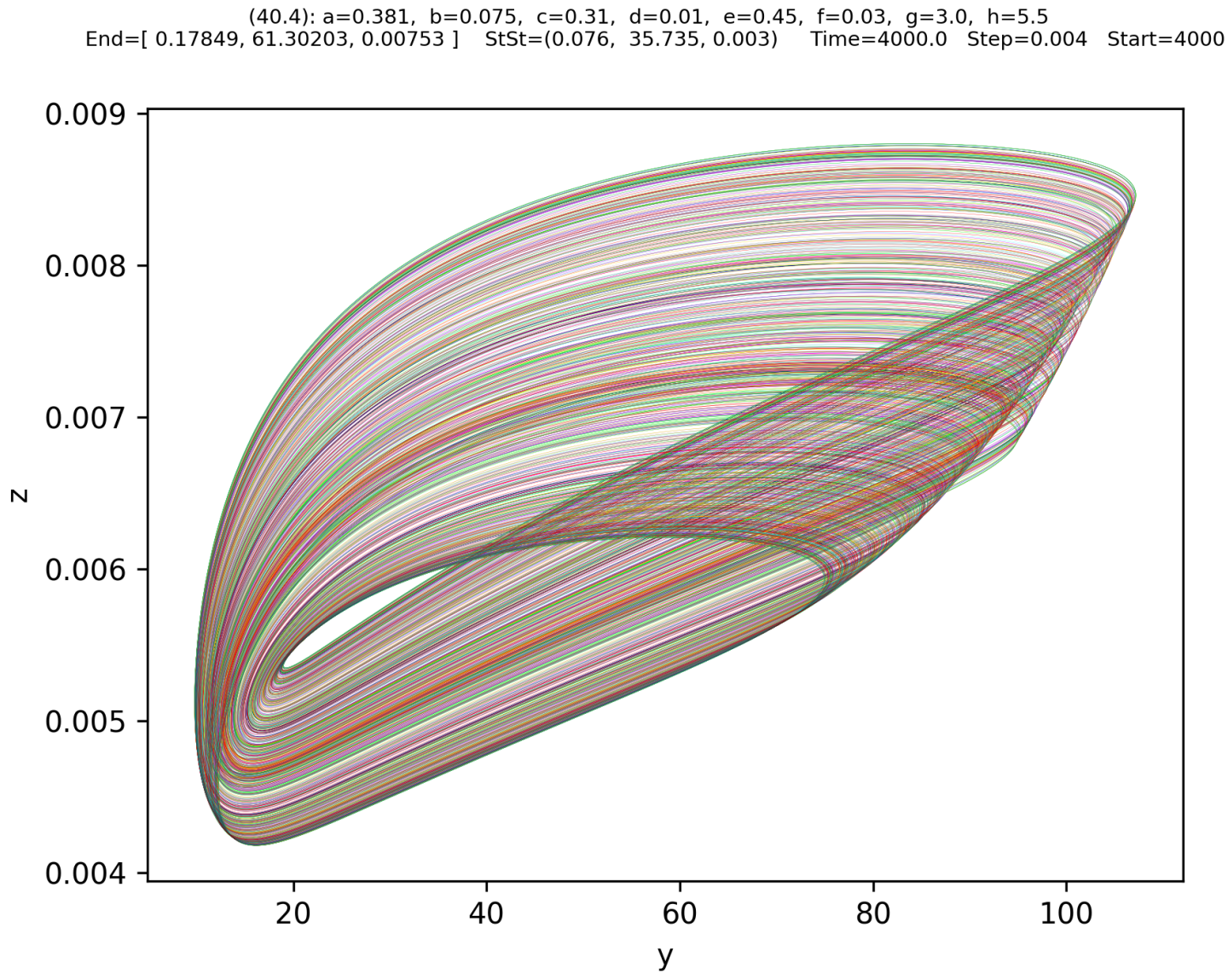
Legende: Chaos im **Beispiel 190**: $\lambda_1 = 0.050$
für: $a = 0.05$, $b = 1.8$, $d = 0.87$, $e = 0.1$ und $f = 1.4$.



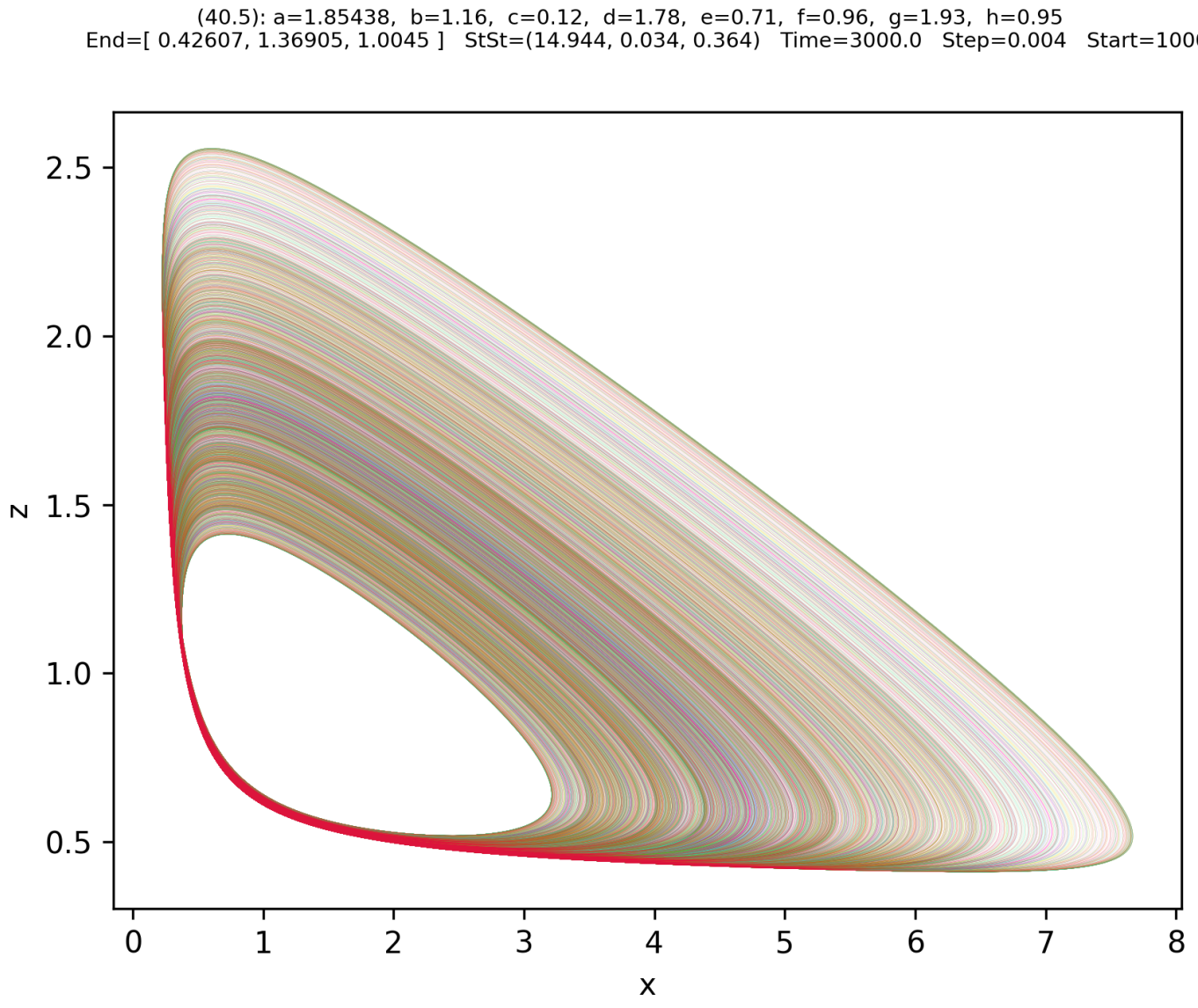
Legende: Chaos im **Beispiel 191**: $\lambda_1 = 0.092$ für: $a = 1.46$, $b = 0.74$, $c = 0.34$, $d = 0.59$, $e = 1.21$, $f = 0.96$, $g = 2.6$, $h = 3.8193$.



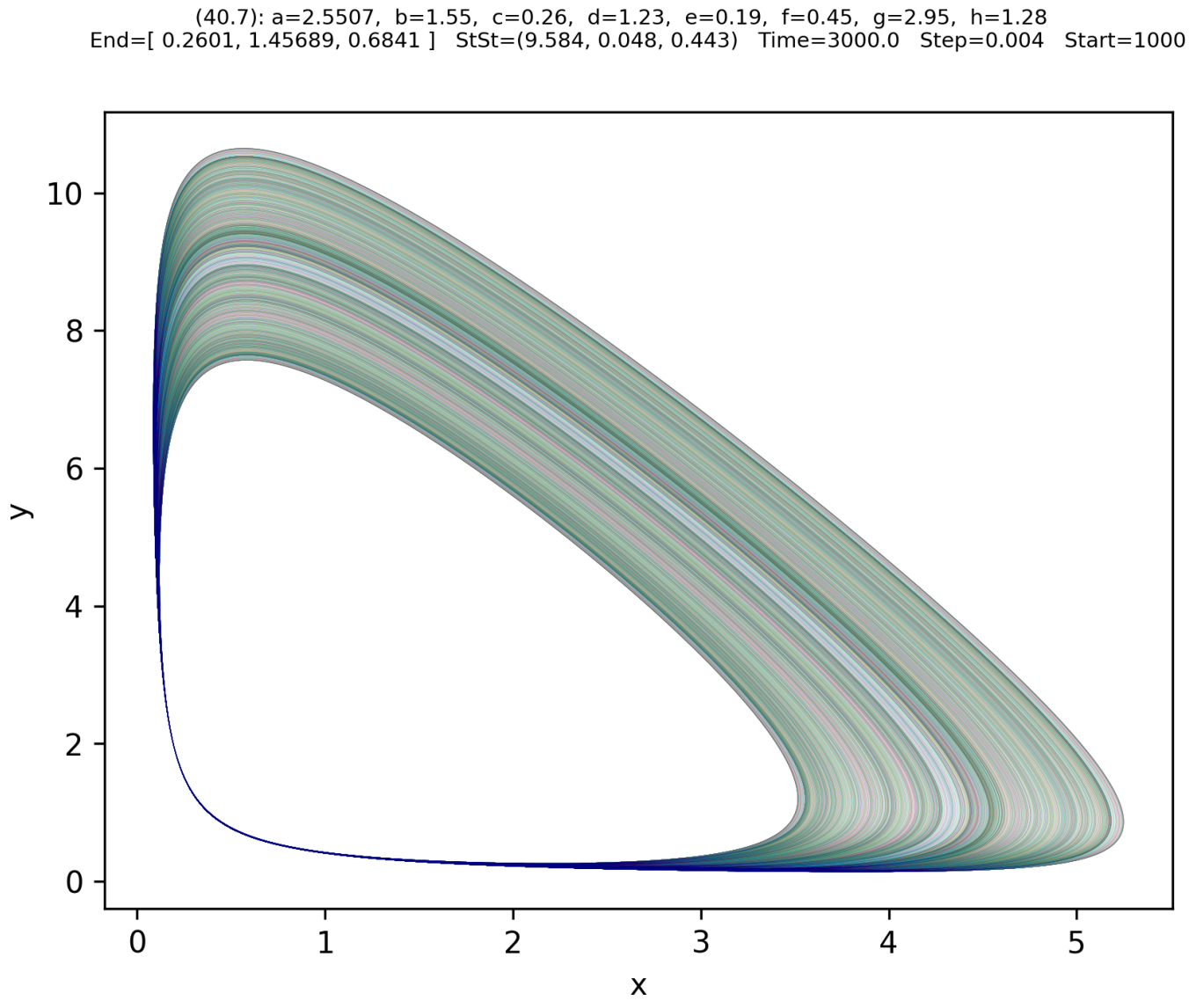
Legende: Chaos im **Beispiel 192**: $\lambda_1 = 0.013$ für: $a = 0.381$, $b = 0.075$, $c = 0.31$, $d = 0.01$, $e = 0.45$, $f = 0.03$, $g = 3.0$, $h = 5.5$.



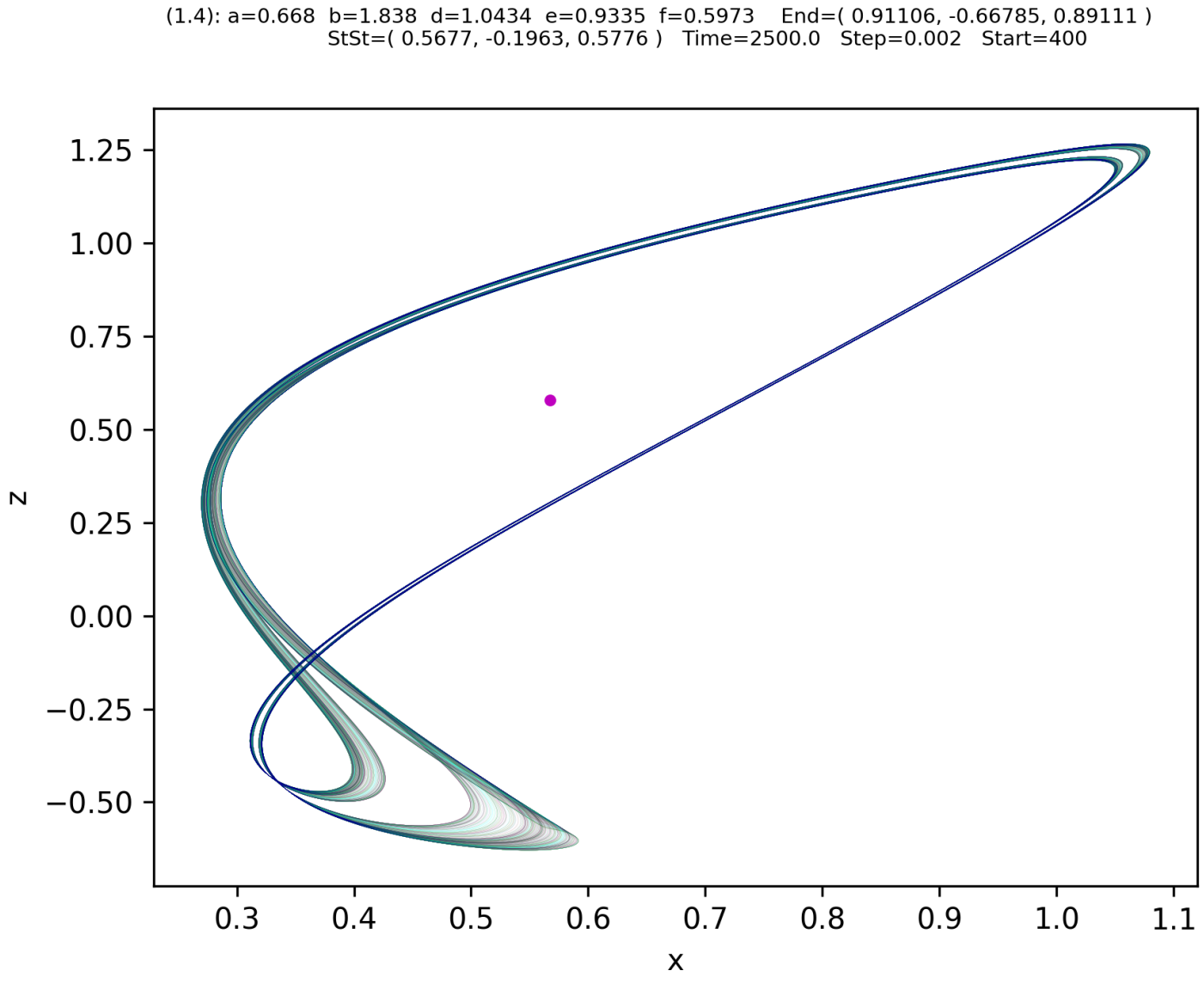
Legende: Chaos im **Beispiel 193**: $\lambda_1 = 0.098$ für: $a = 1.85438$, $b = 1.16$, $c = 0.12$, $d = 1.78$, $e = 0.71$, $f = 0.96$, $g = 1.93$, $h = 0.95$.



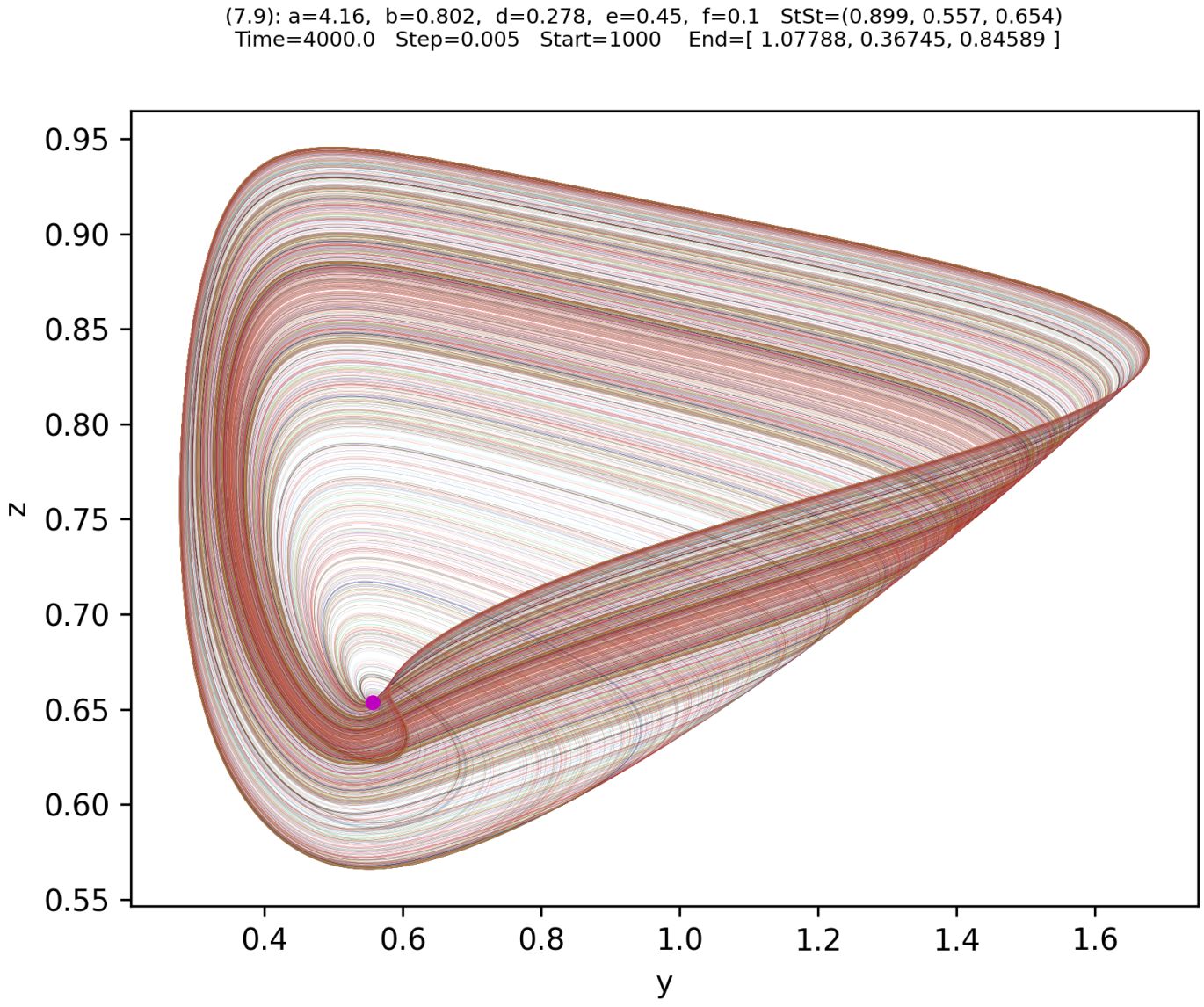
Legende: Chaos im **Beispiel 194**: $\lambda_1 = 0.106$ für: $a = 2.5507$, $b = 1.55$, $c = 0.26$, $d = 1.23$, $e = 0.19$, $f = 0.45$, $g = 2.95$, $h = 1.28$.



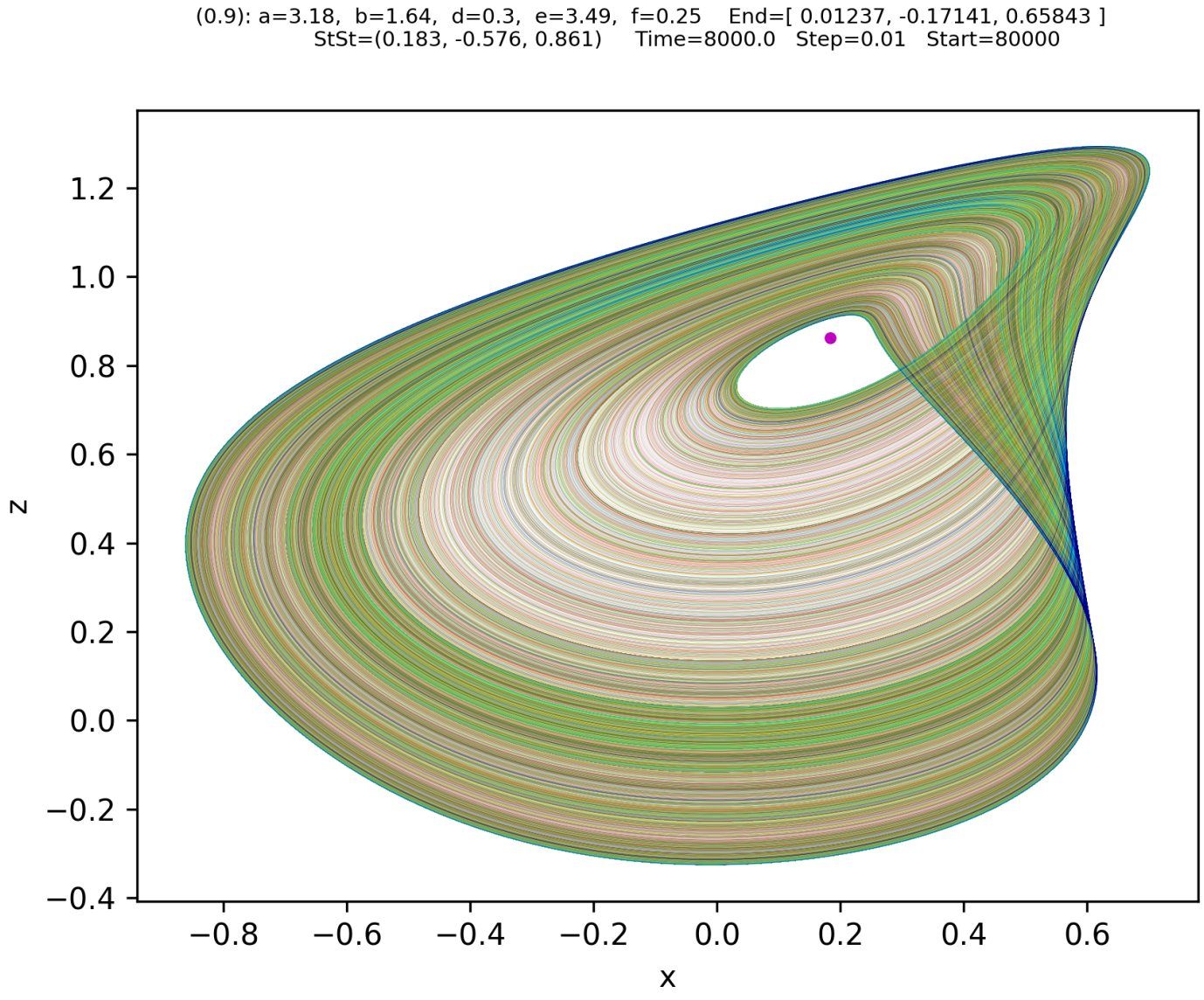
Legende: Chaos im **Beispiel 195**: $\lambda_1 = 0.020$
für: $a = 0.668$, $b = 1.838$, $d = 1.0434$, $e = 0.9335$ und $f = 0.5973$.



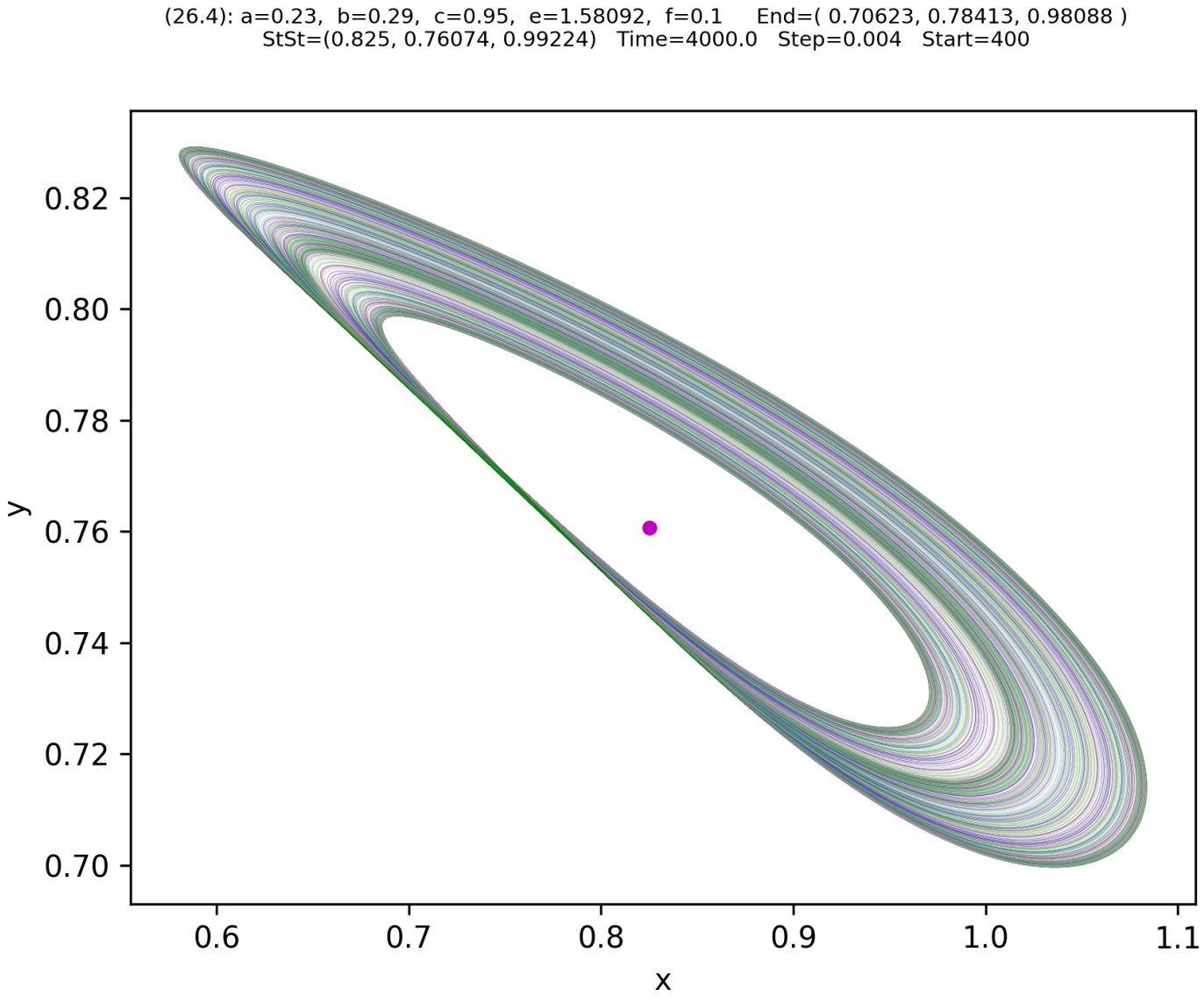
Legende: Chaos im **Beispiel 196**: $\lambda_1 = 0.019$
für: $a = 4.16$, $b = 0.802$, $d = 0.278$, $e = 0.45$ und $f = 0.1$.



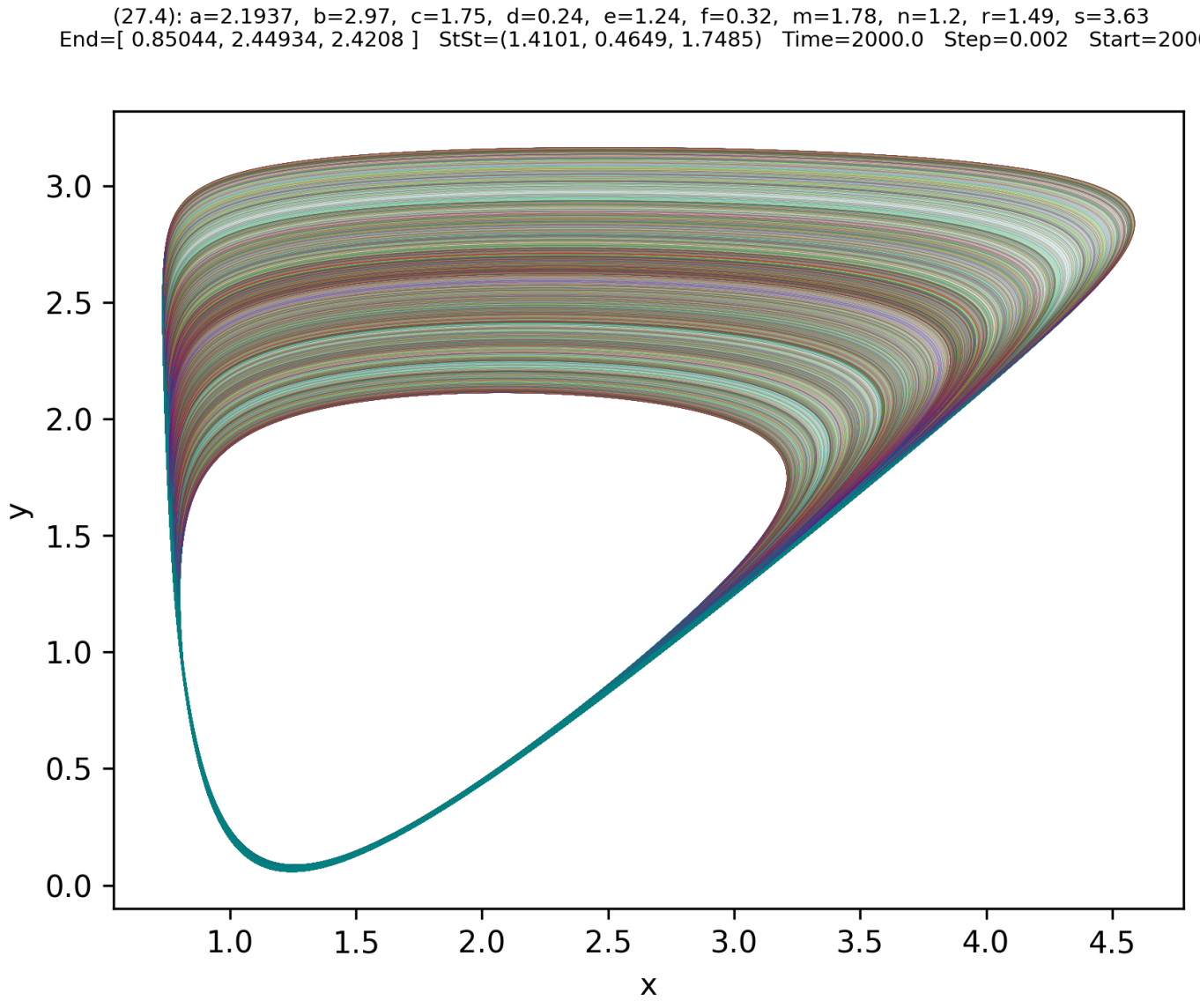
Legende: Chaos im **Beispiel 197**: $\lambda_1 = 0.040$
für: $a = 3.18$, $b = 1.64$, $d = 0.3$, $e = 3.49$ und $f = 0.25$.



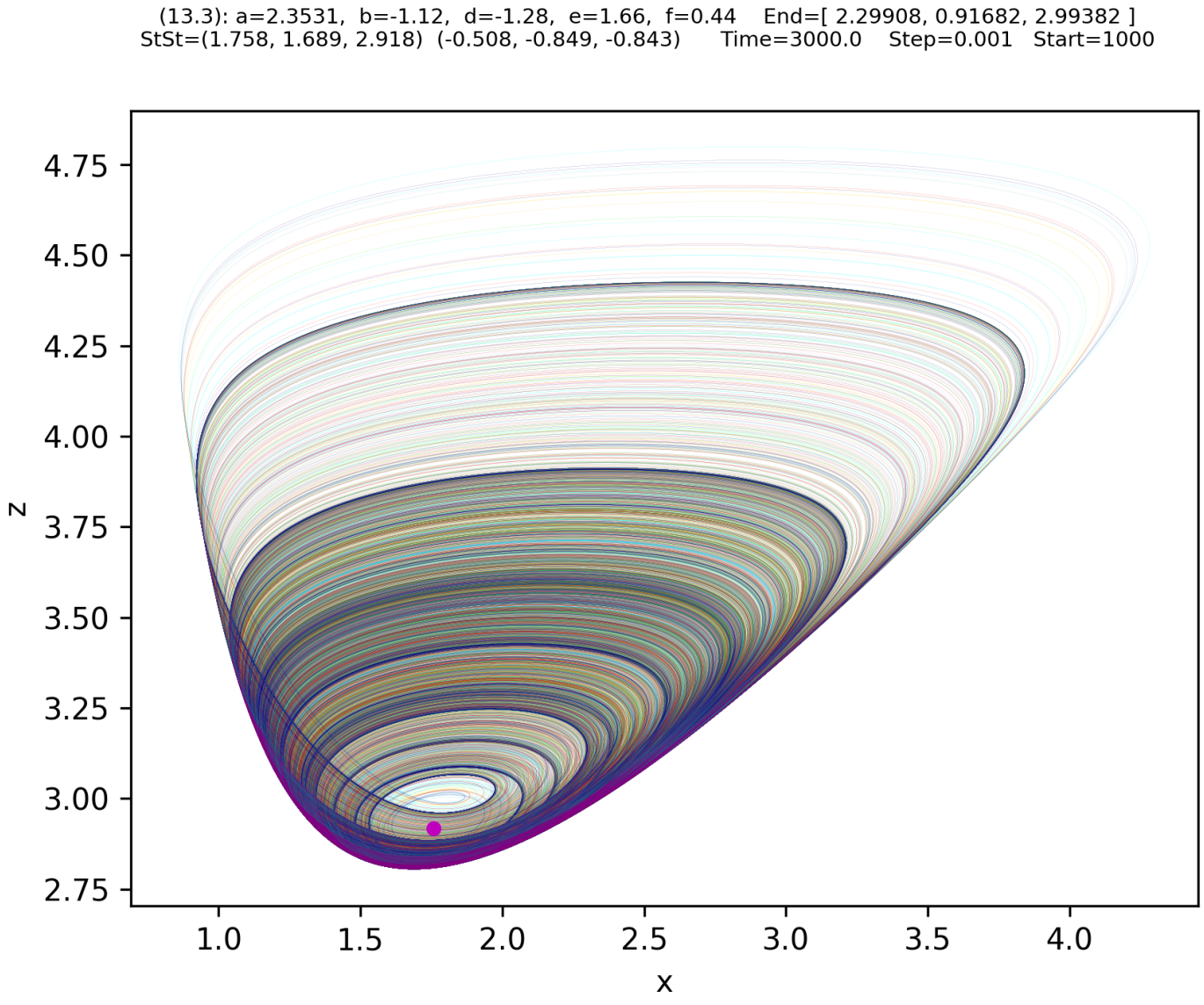
Legende: Chaos im **Beispiel 198**: $\lambda_1 = 0.019$
für: $a = 0.23,\ b = 0.29,\ c = 0.95,\ e = 1.58092$ und $f = 0.1$.



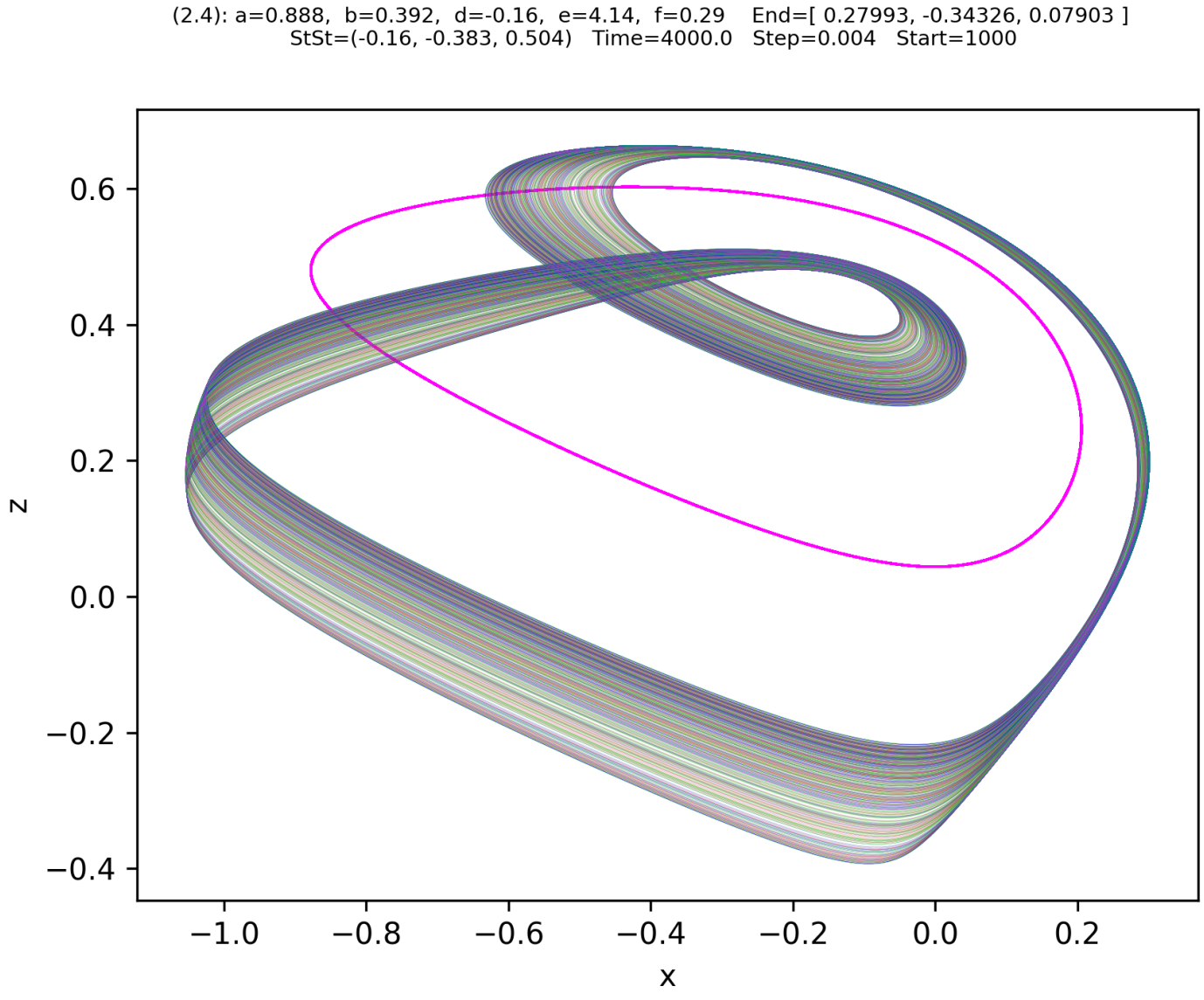
Legende: Chaos im **Beispiel 199**: $\lambda_1 = 0.107$ für: $a = 2.1937$, $b = 2.97$, $c = 1.75$, $d = 0.24$, $e = 1.24$, $f = 0.32$, $m = 1.78$, $n = 1.2$, $r = 1.49$, $s = 3.63$.



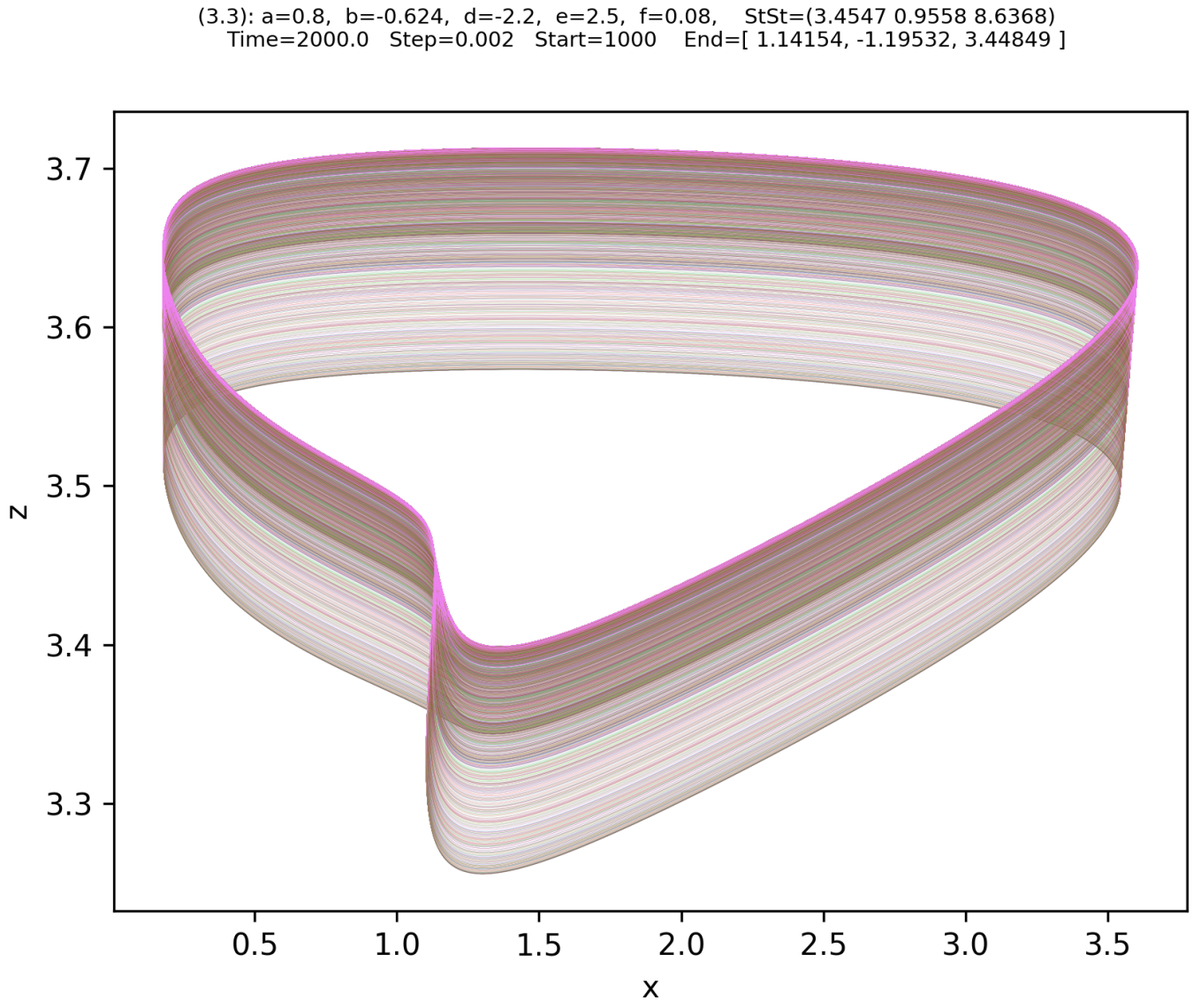
Legende: Chaos im **Beispiel 200**: $\lambda_1 = 0.023$
für: $a = 2.3531$, $b = -1.12$, $d = -1.28$, $e = 1.66$ und $f = 0.44$.



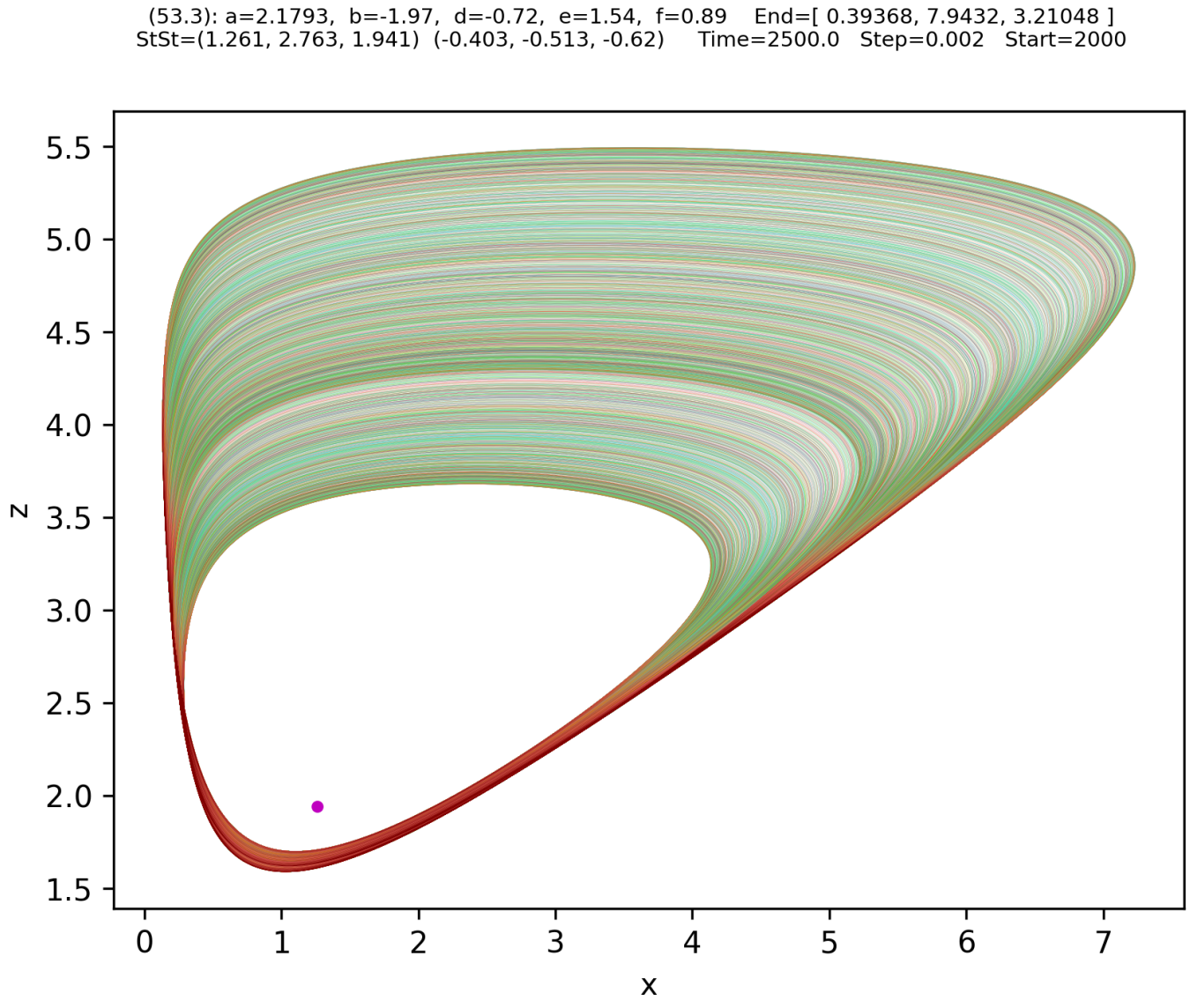
Legende: Chaos im **Beispiel 201**: $\lambda_1 = 0.021$
für: $a = 0.888$, $b = 0.392$, $d = -0.16$, $e = 4.14$ und $f = 0.29$.
Koexistenz mit einem benachbarten Grenzzyklus (magenta).



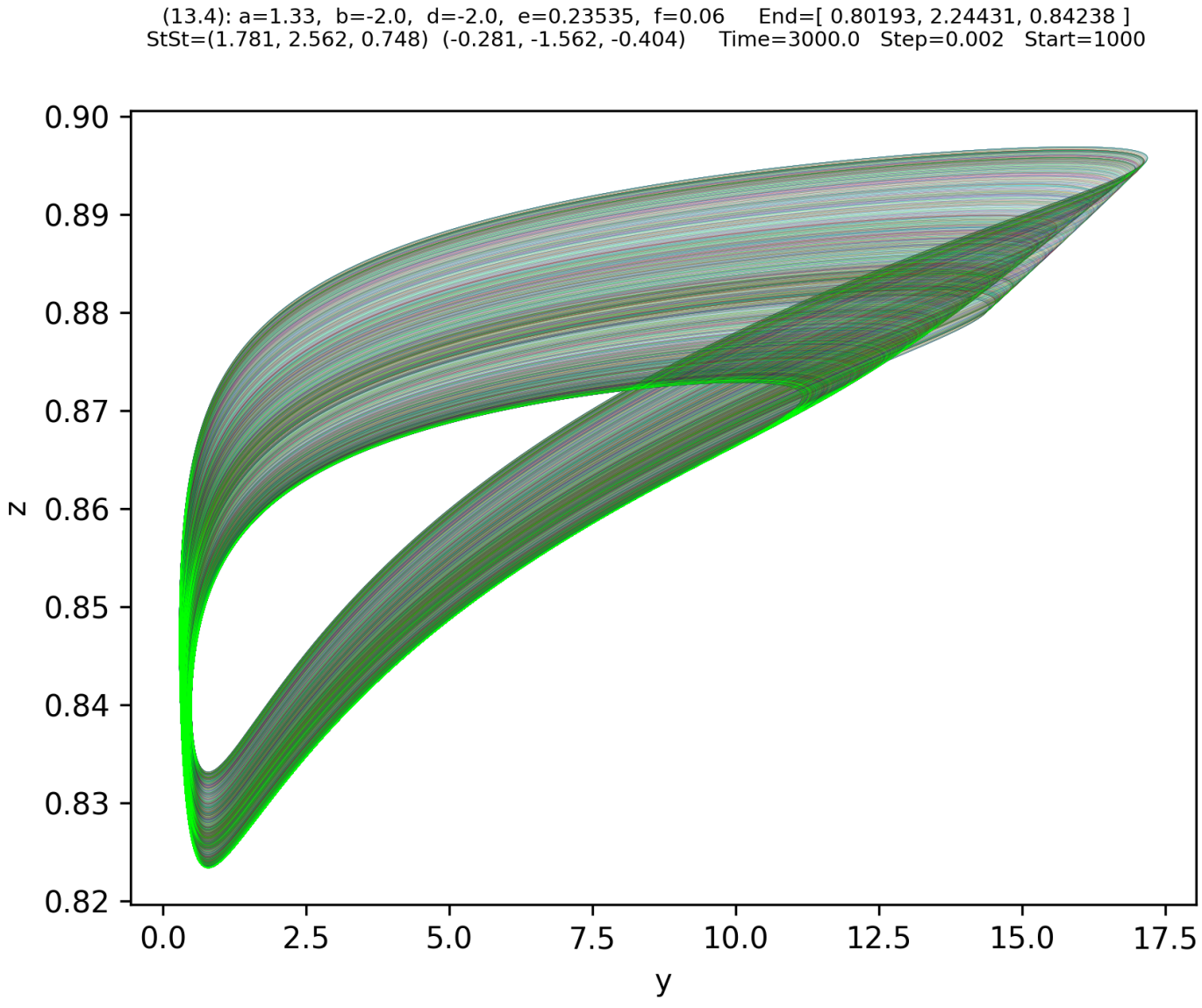
Legende: Chaos im **Beispiel 202**: $\lambda_1 = 0.094$
für: $a = 0.8$, $b = -0.624$, $d = -2.2$, $e = 2.5$ und $f = 0.08$.



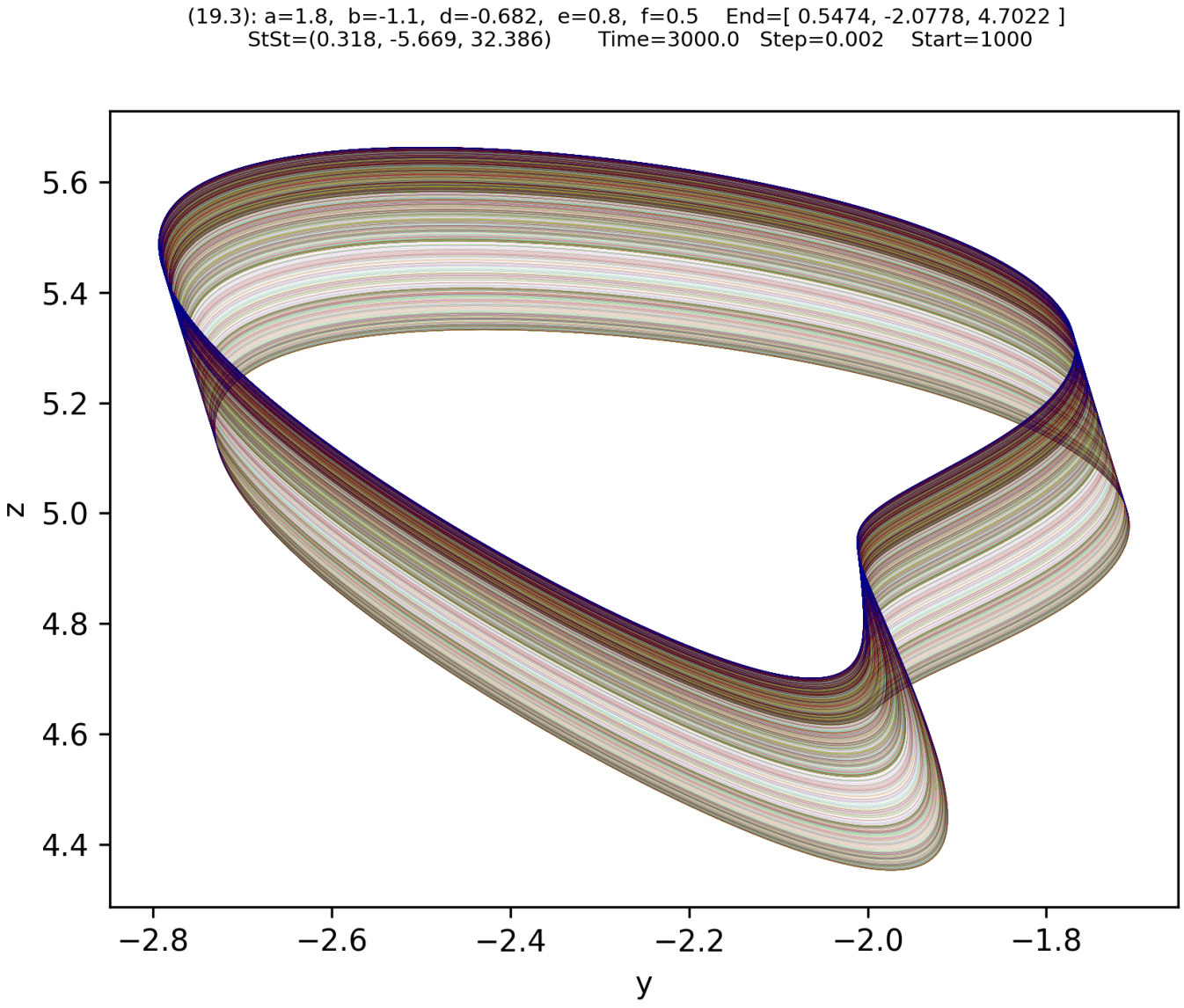
Legende: Chaos im **Beispiel 203**: $\lambda_1 = 0.145$
für: $a = 2.1793$, $b = -1.97$, $d = -0.72$, $e = 1.54$ und $f = 0.89$.



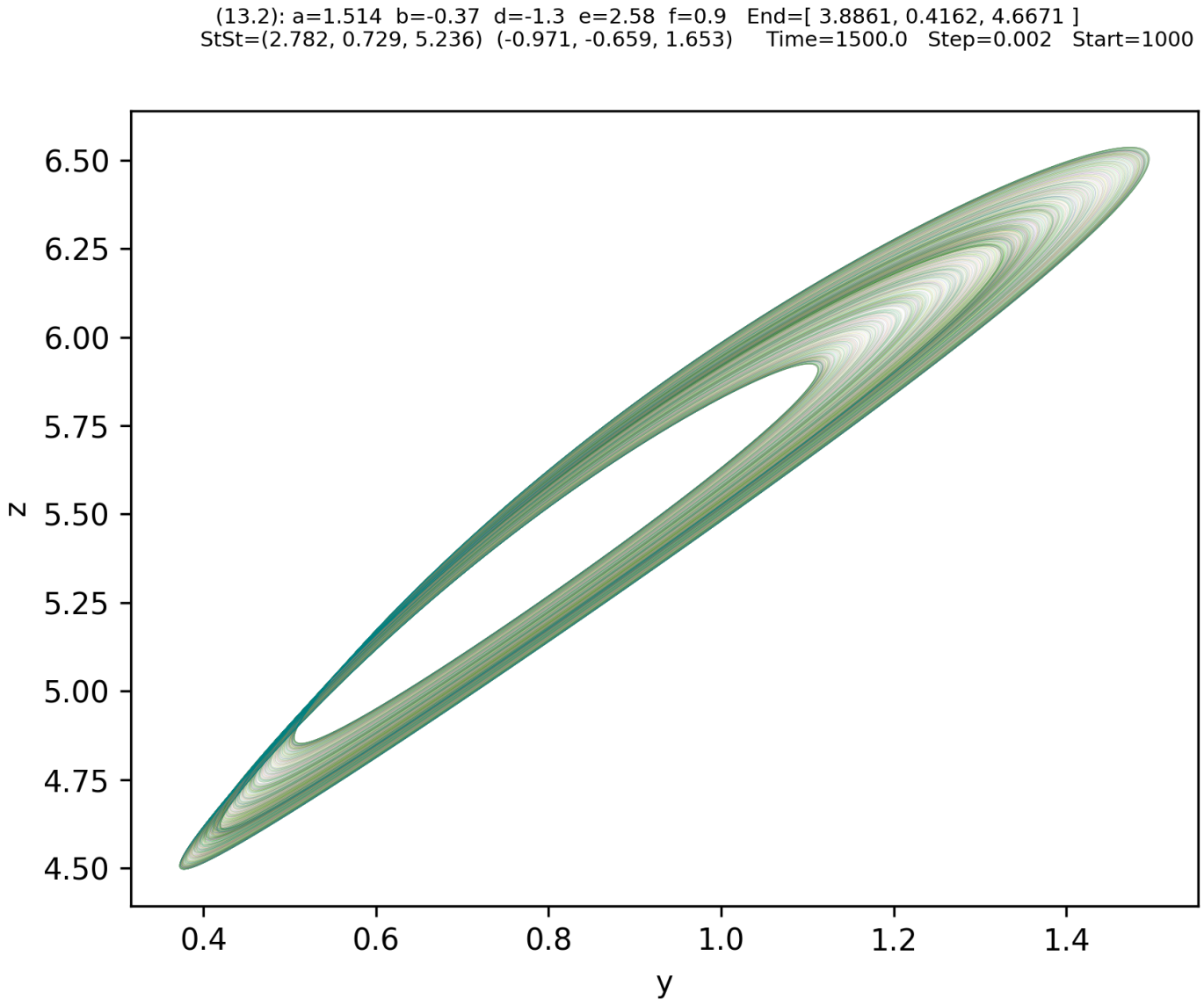
Legende: Chaos im **Beispiel 204**: $\lambda_1 = 0.116$
für: $a = 1.33,\ b = -2.0,\ d = -2.0,\ e = 0.23535$ und $f = 0.06$.



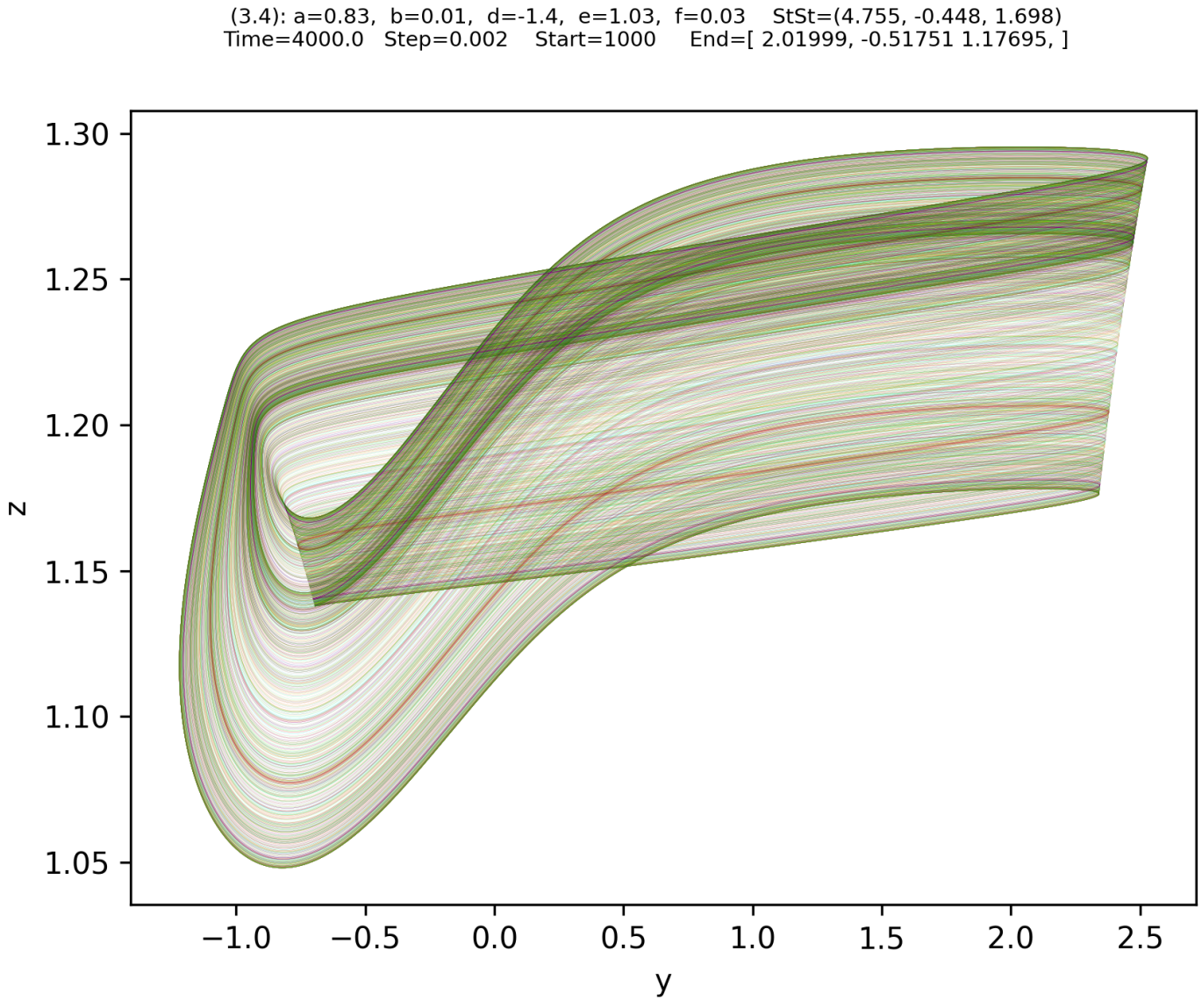
Legende: Chaos im **Beispiel 205**: $\lambda_1 = 0.074$
für: $a = 1.8$, $b = -1.1$, $d = -0.682$, $e = 0.8$ und $f = 0.5$.



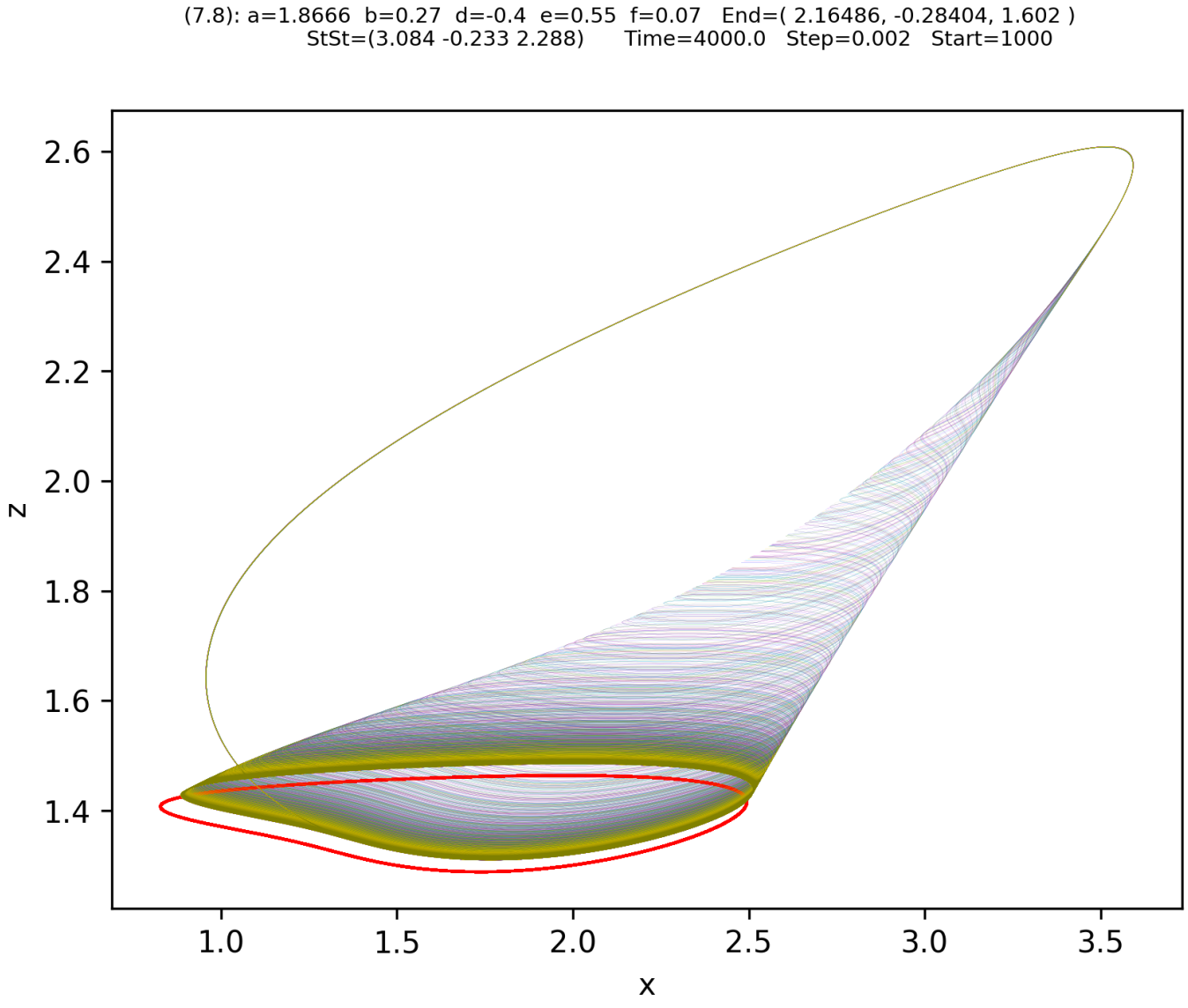
Legende: Chaos im **Beispiel 206**: $\lambda_1 = 0.092$
für: $a = 1.514$, $b = -0.37$, $d = -1.3$, $e = 2.58$ und $f = 0.9$.



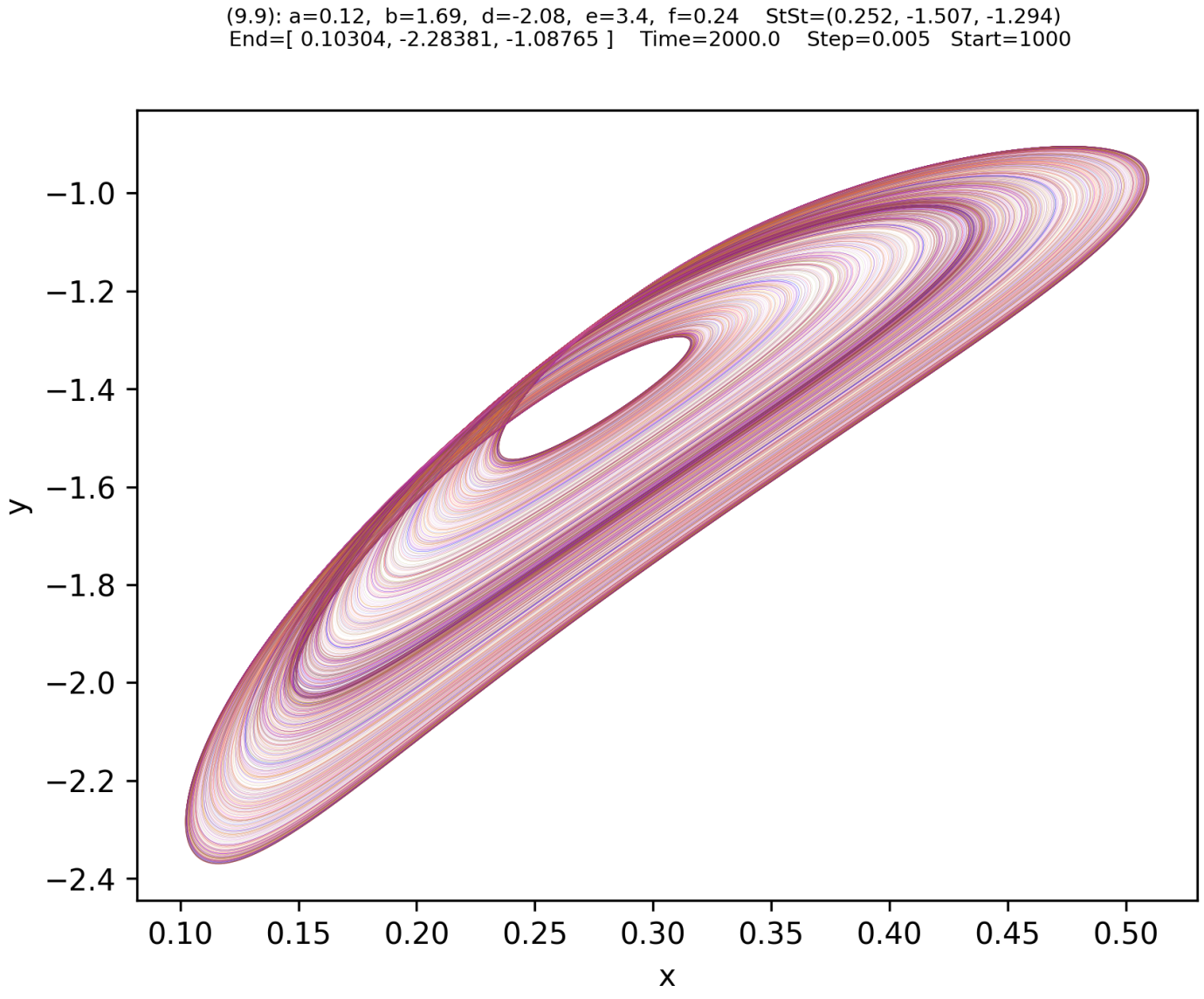
Legende: Chaos im **Beispiel 207**: $\lambda_1 = 0.027$
für: $a = 0.83$, $b = 0.01$, $d = -1.4$, $e = 1.03$ und $f = 0.03$.



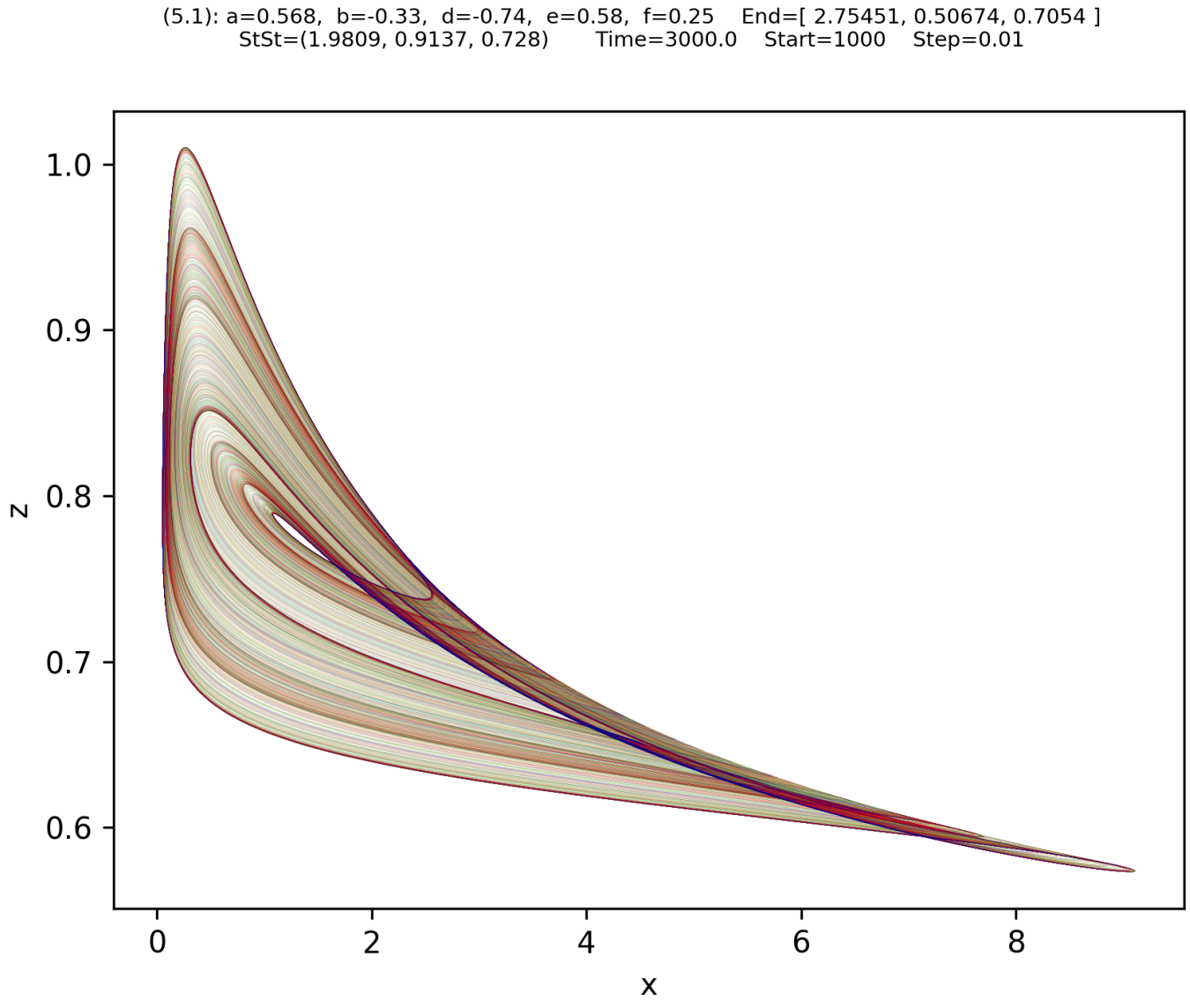
Legende: Chaos im **Beispiel 208**: $\lambda_1 = 0.005$
für: $a = 1.8666$, $b = 0.27$, $d = -0.4$, $e = 0.55$ und $f = 0.07$.
Koexistenz mit einem benachbarten Grenzzyklus (rot).



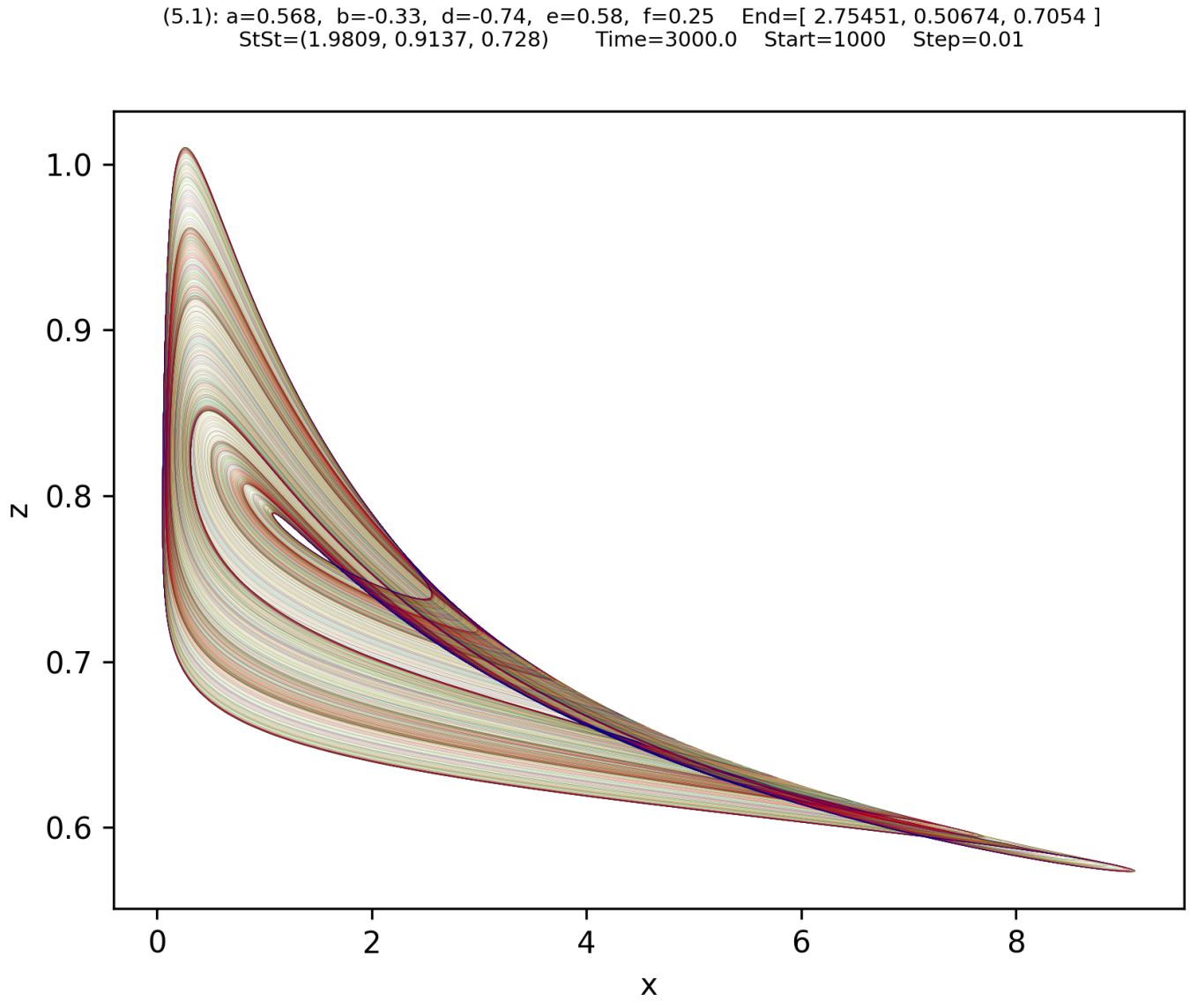
Legende: Chaos im **Beispiel 209**: $\lambda_1 = 0.036$
für: $a = 0.12$, $b = 1.69$, $d = -2.08$, $e = 3.4$ und $f = 0.24$.



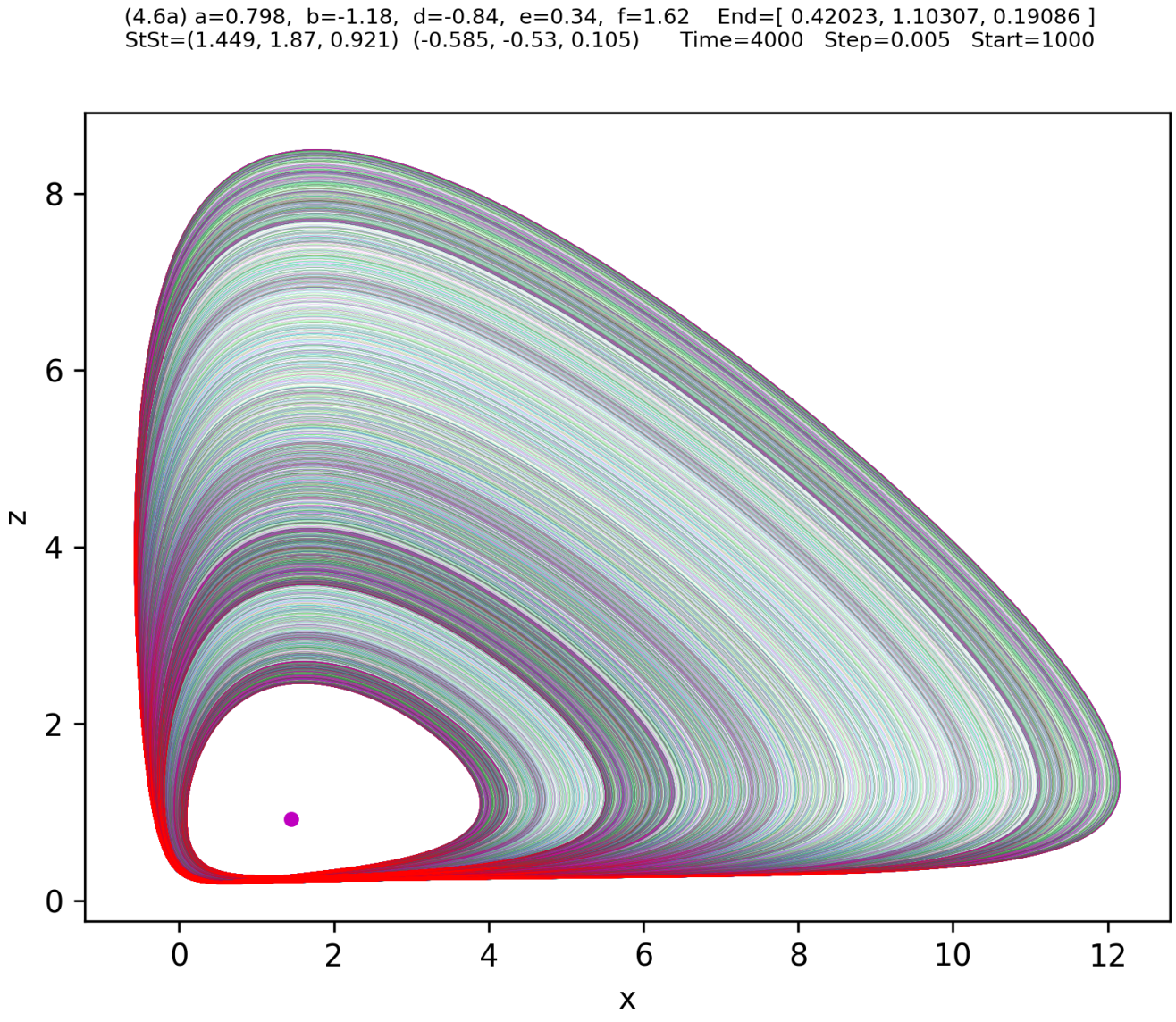
Legende: Chaos im **Beispiel 210**: $\lambda_1 = 0.054$
für: $a = 0.568$, $b = -0.33$, $d = -0.74$, $e = 0.58$ und $f = 0.25$.



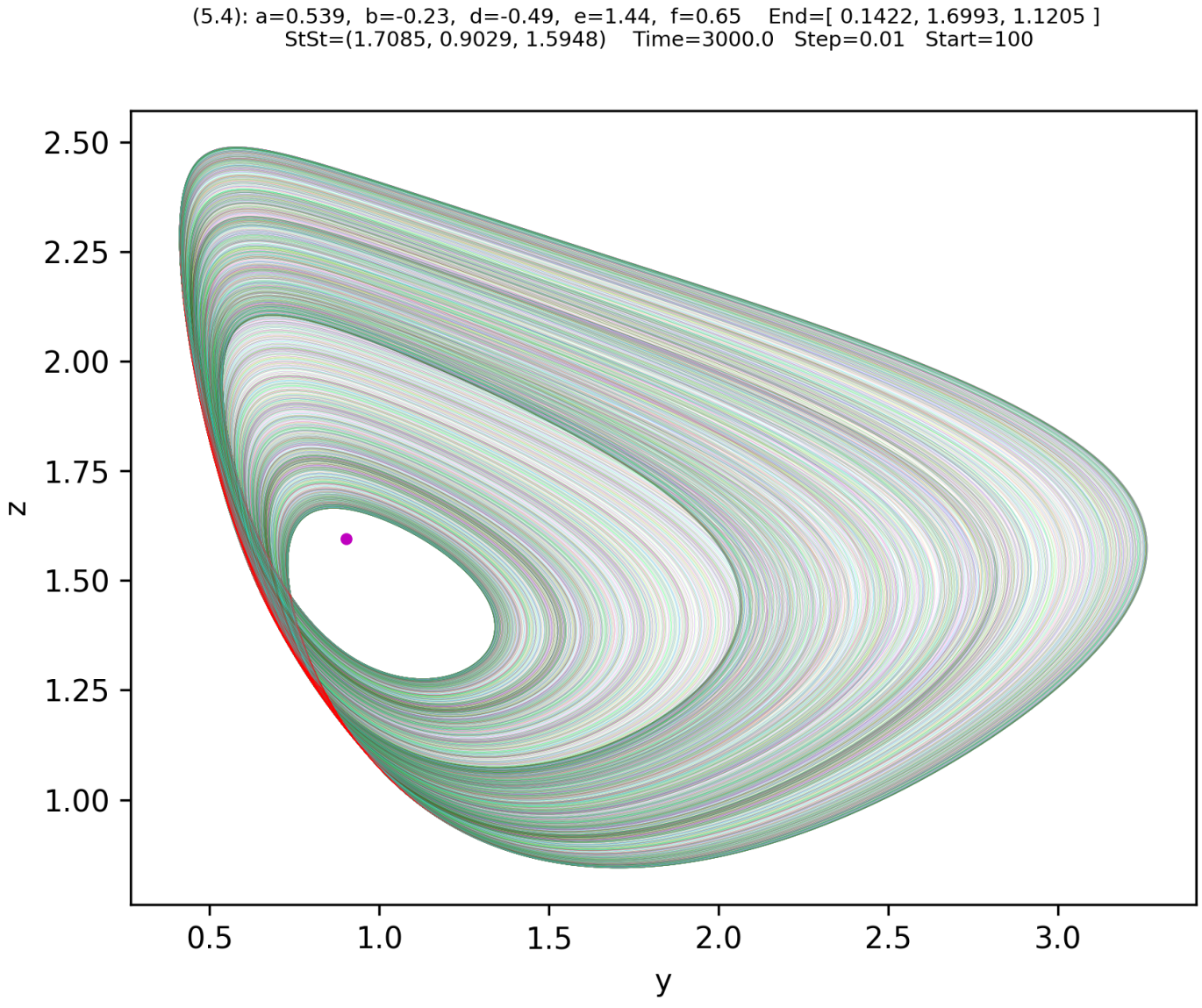
Legende: Chaos im **Beispiel 210**: $\lambda_1 = 0.054$
für: $a = 0.568$, $b = -0.33$, $d = -0.74$, $e = 0.58$ und $f = 0.25$.



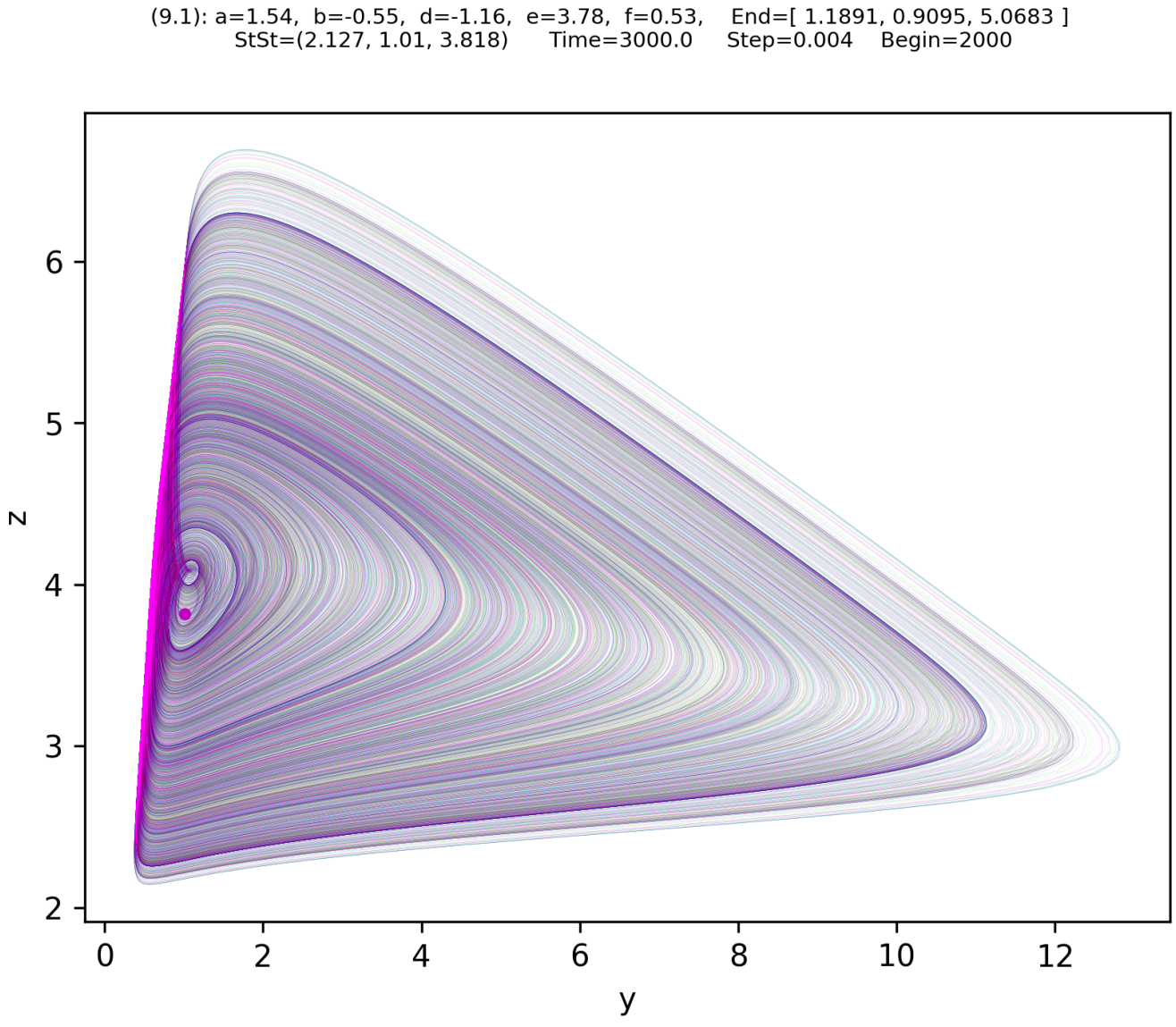
Legende: Chaos im **Beispiel 211**: $\lambda_1 = 0.084$
für: $a = 0.798$, $b = -1.18$, $d = -0.84$, $e = 0.34$ und $f = 1.62$.



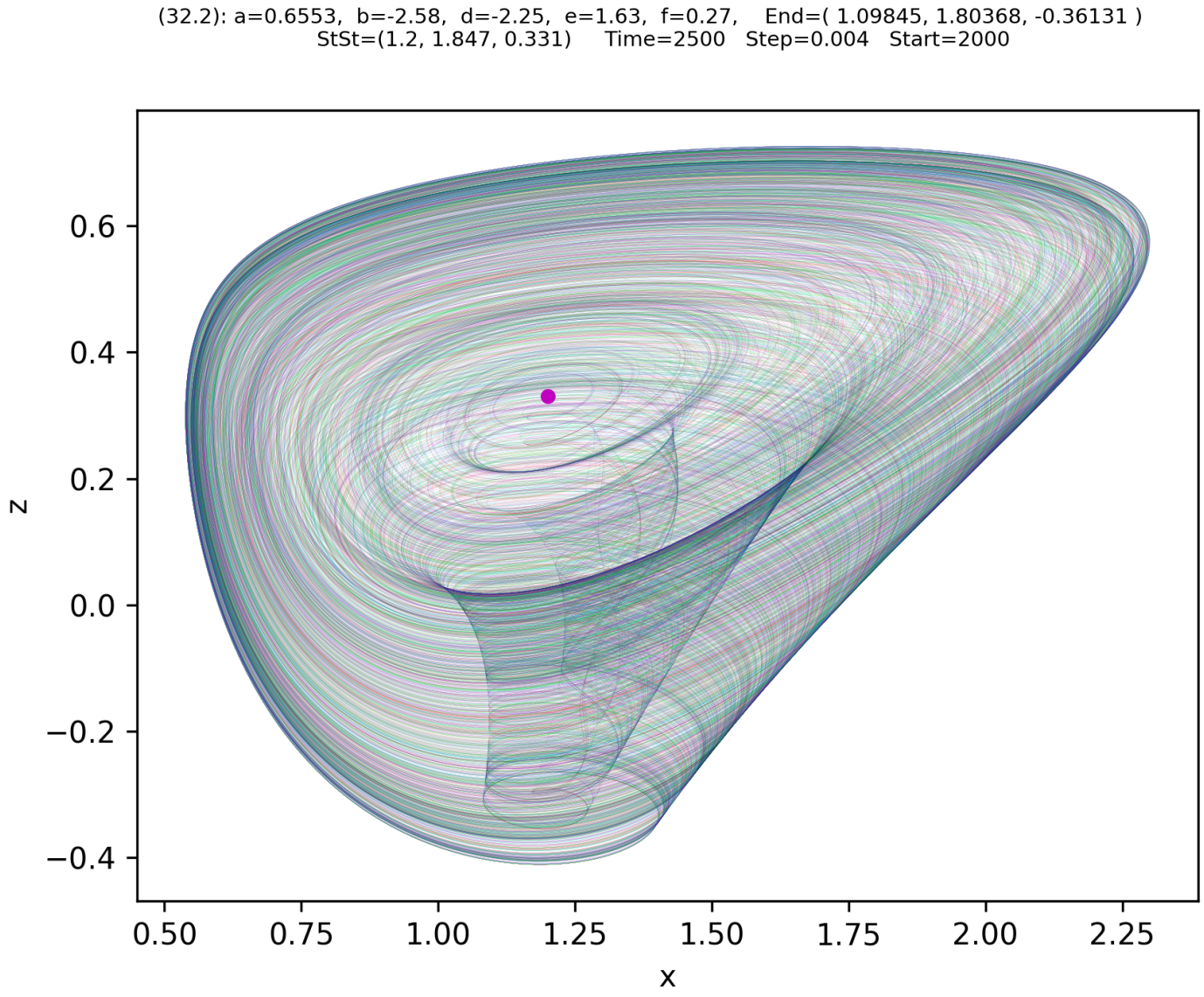
Legende: Chaos im **Beispiel 212**: $\lambda_1 = 0.063$
für: $a = 0.539$, $b = -0.23$, $d = -0.49$, $e = 1.44$ und $f = 0.65$.



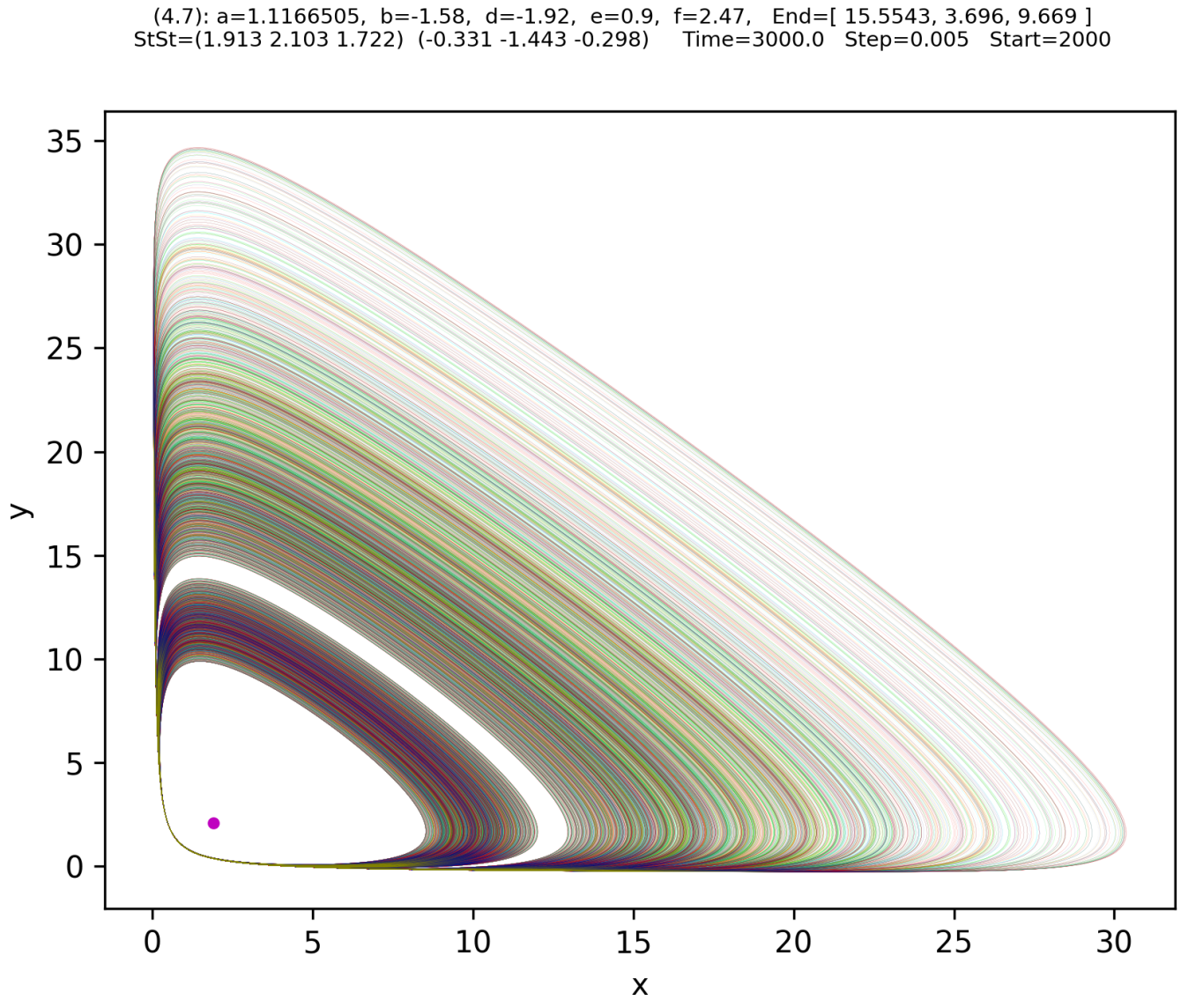
Legende: Chaos im **Beispiel 213**: $\lambda_1 = 0.147$
für: $a = 1.54,\ b = -0.55,\ d = -1.16,\ e = 3.78$ und $f = 0.53$.



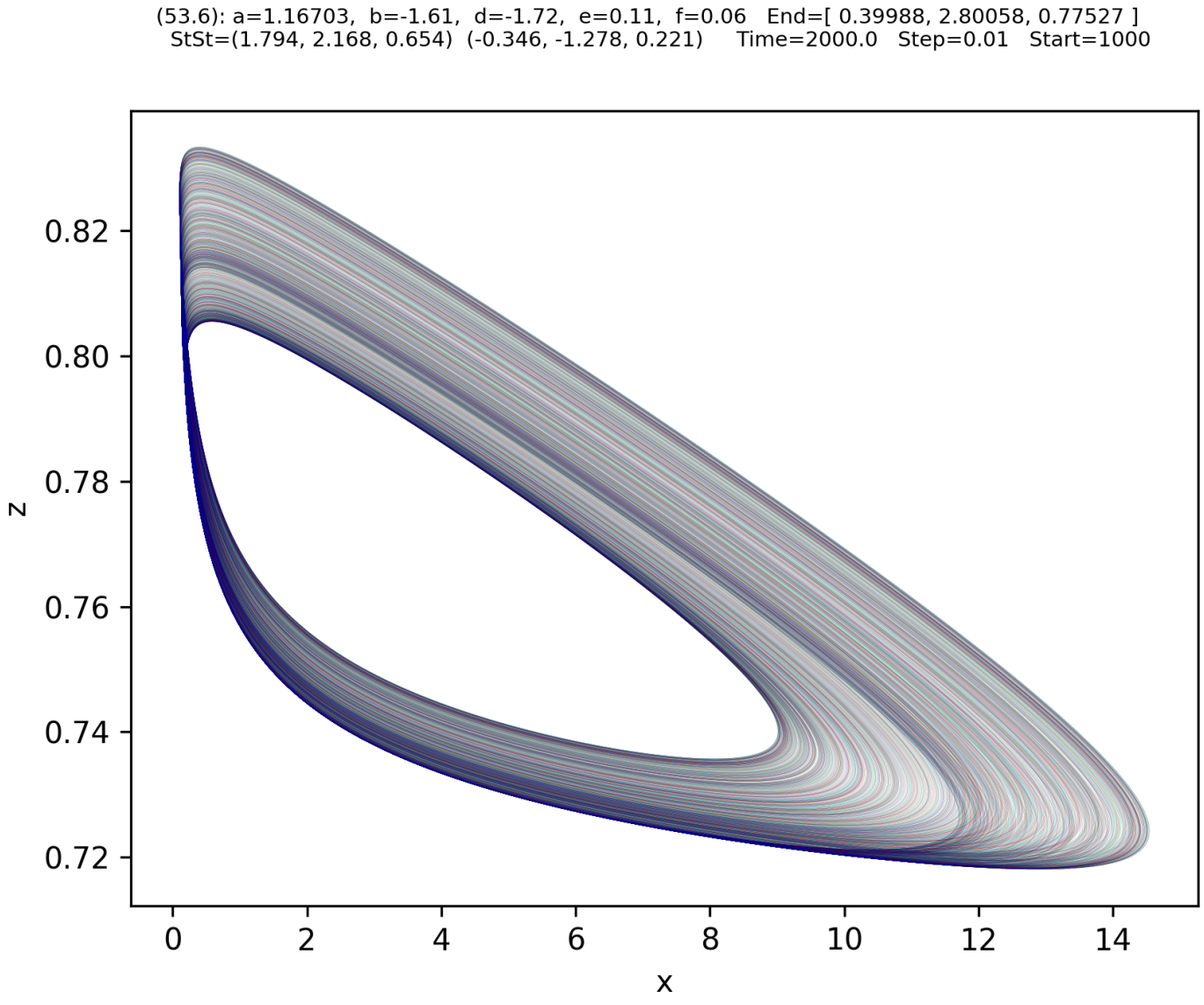
Legende: Chaos im **Beispiel 214**: $\lambda_1 = 0.123$
für: $a = 0.6553$, $b = -2.58$, $d = -2.25$, $e = 1.63$ und $f = 0.27$.



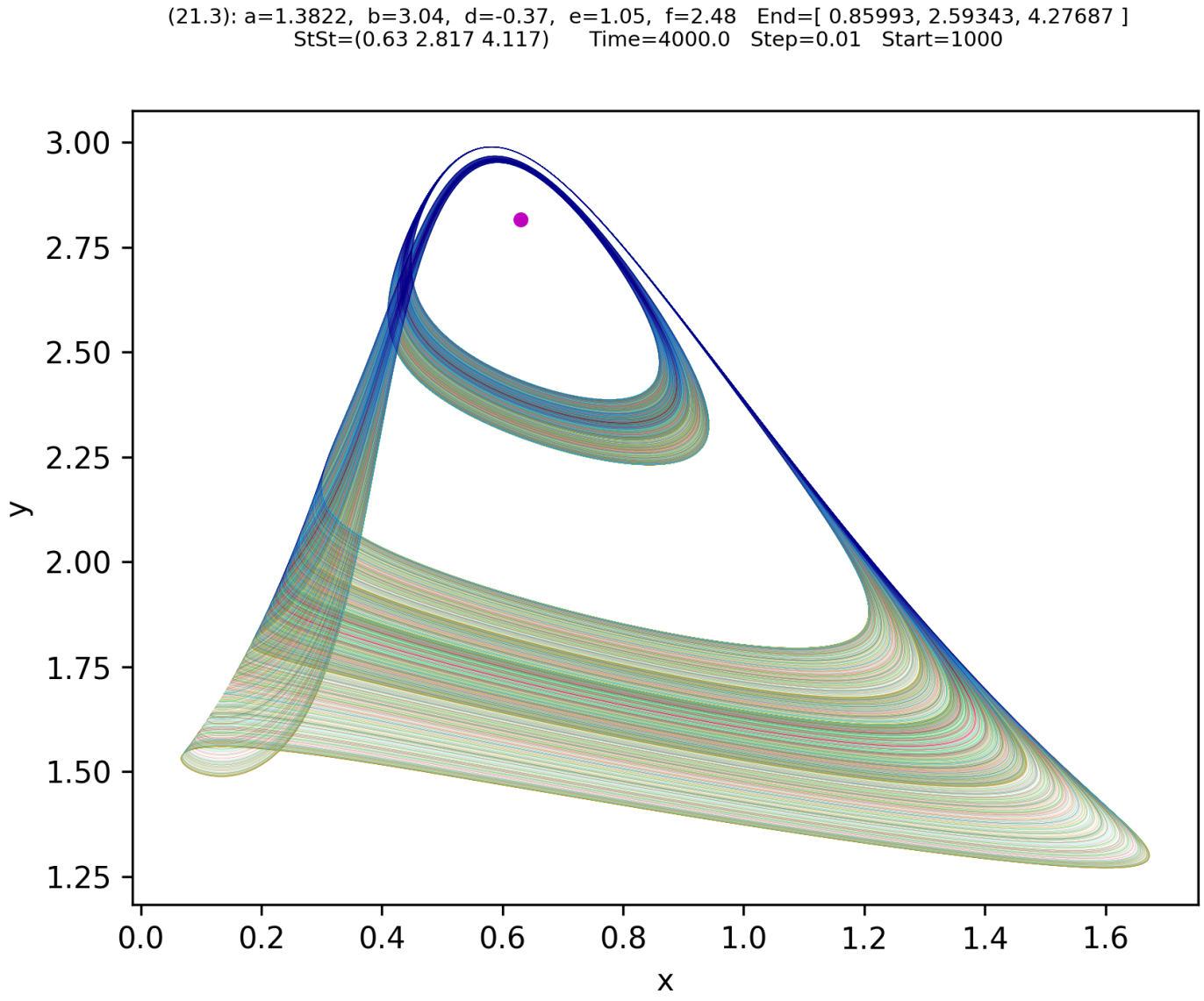
Legende: Chaos im **Beispiel 215**: $\lambda_1 = 0.091$
für: $a = 1.1166505$, $b = -1.58$, $d = -1.92$, $e = 0.9$ und $f = 2.47$.



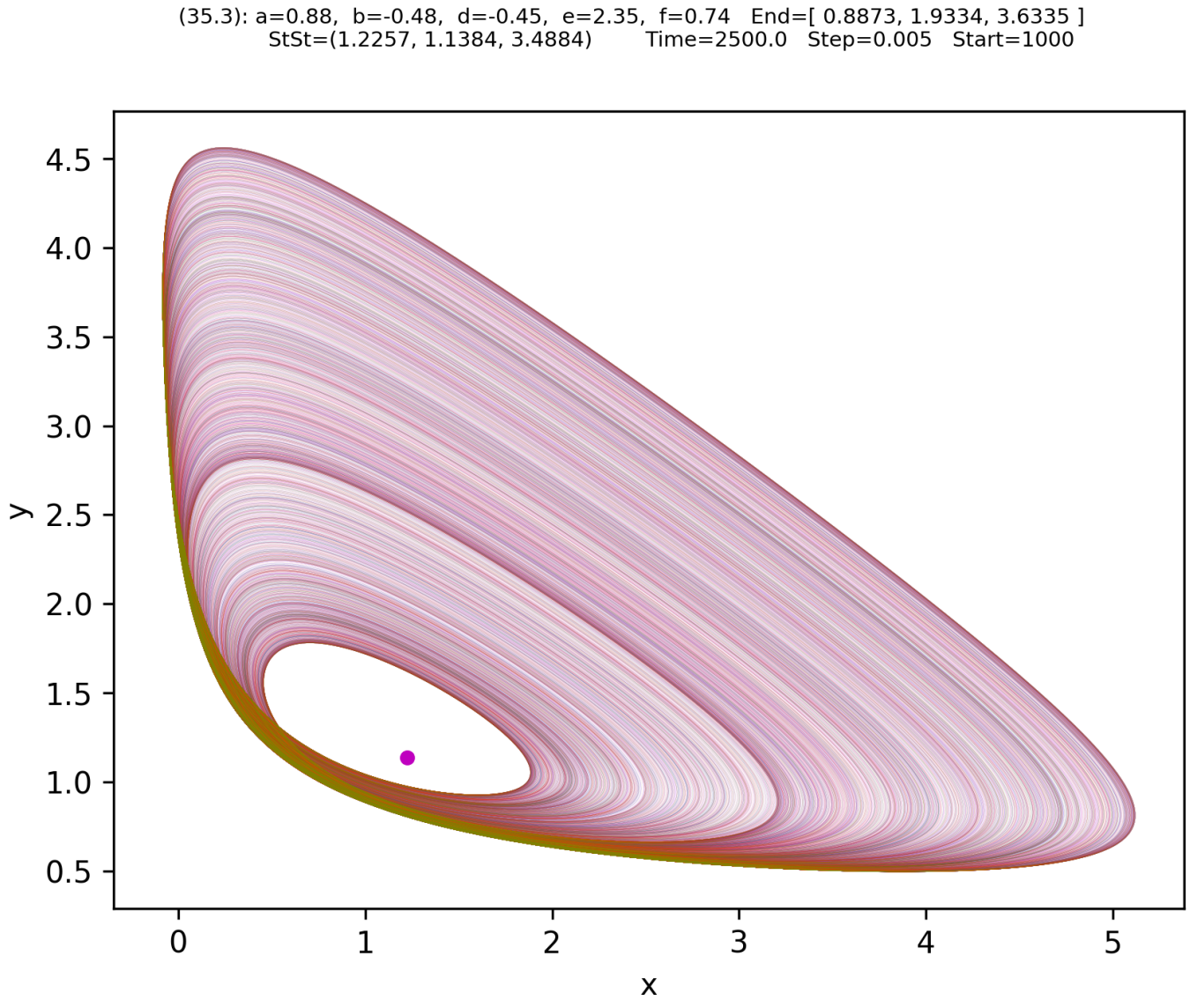
Legende: Chaos im **Beispiel 216**: $\lambda_1 = 0.102$
für: $a = 1.16703$, $b = -1.61$, $d = -1.72$, $e = 0.11$ und $f = 0.06$.



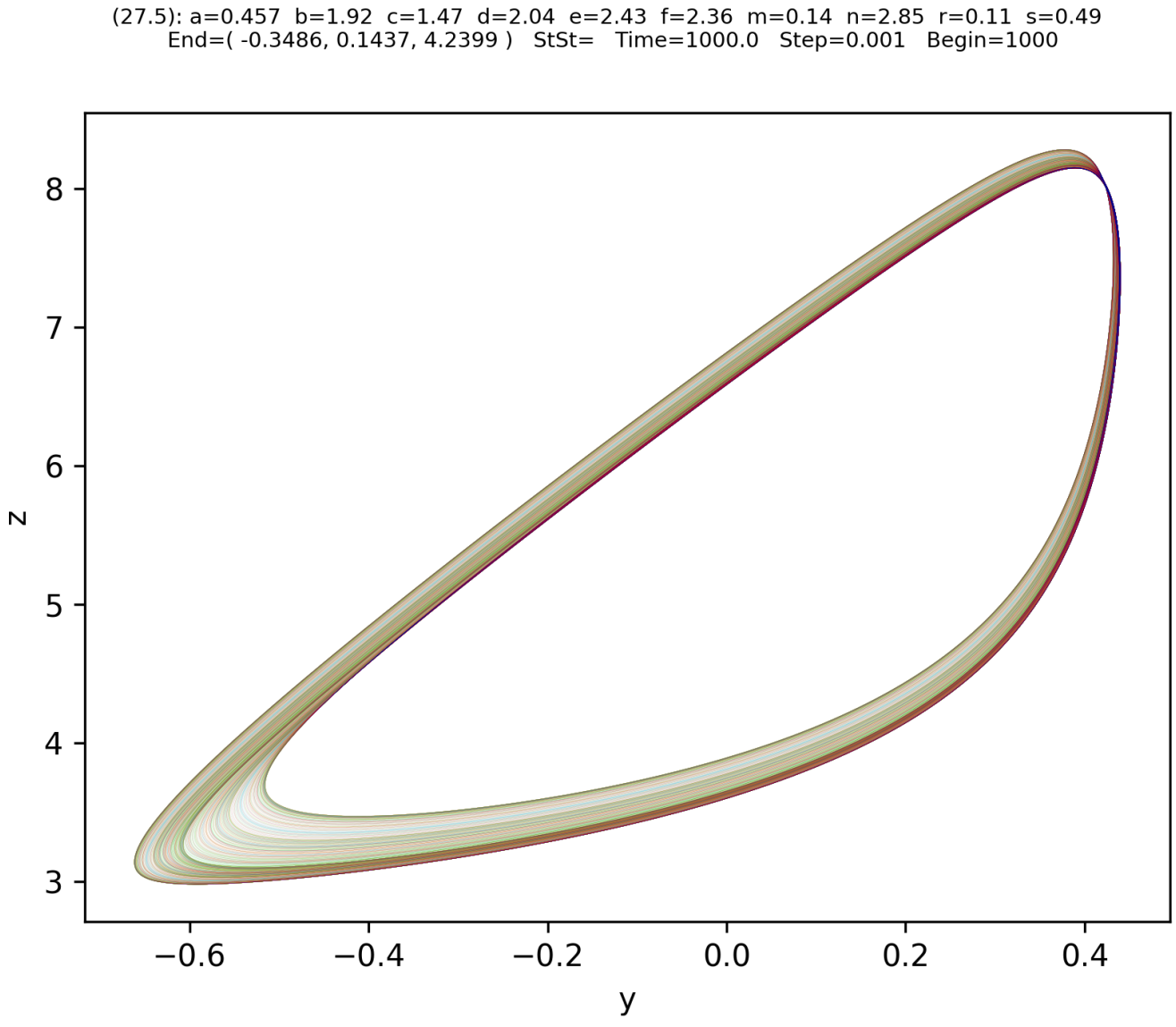
Legende: Chaos im **Beispiel 217**: $\lambda_1 = 0.025$
für: $a = 1.3822$, $b = 3.04$, $d = -0.37$, $e = 1.05$ und $f = 2.48$.



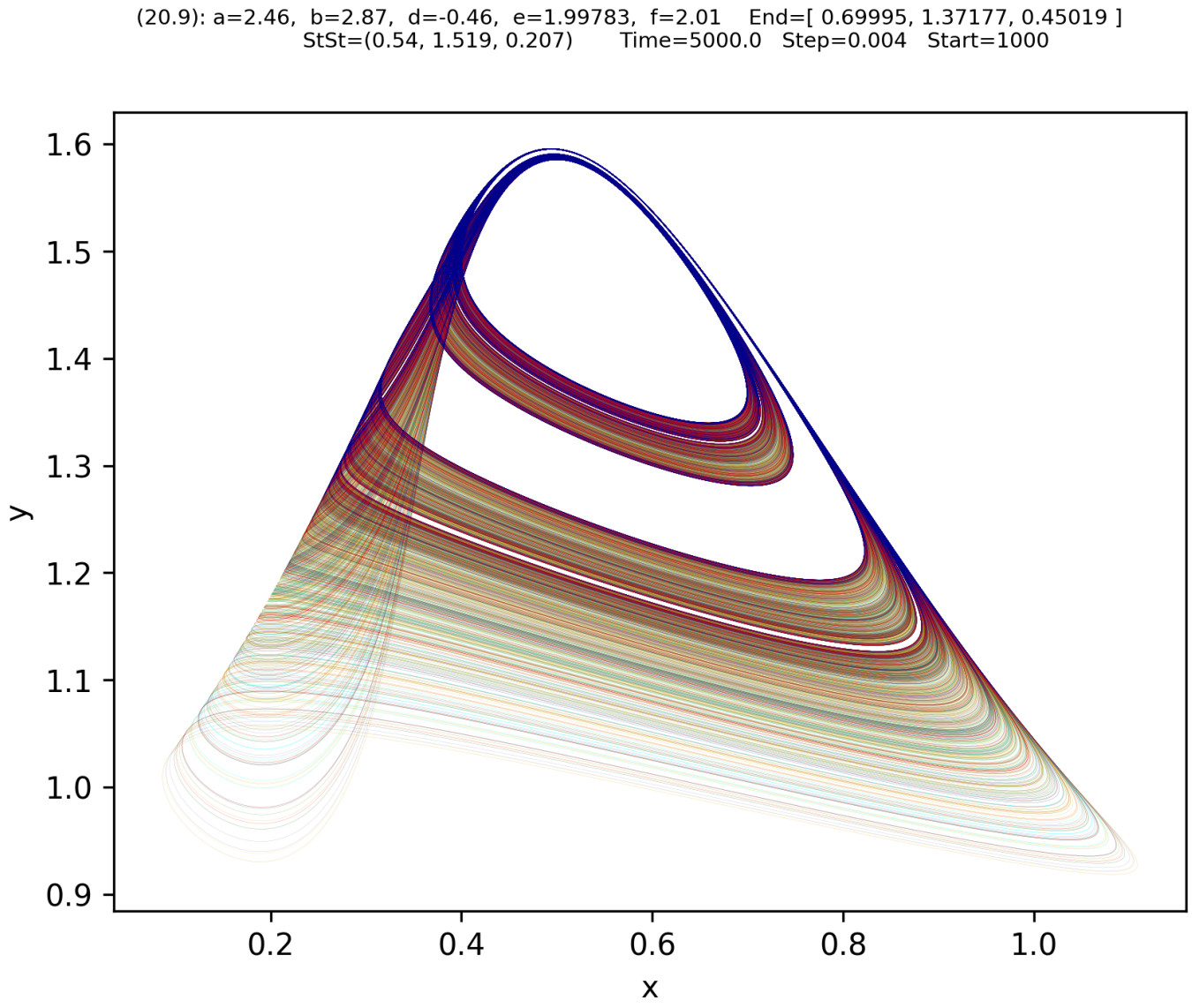
Legende: Chaos im **Beispiel 218**: $\lambda_1 = 0.105$
für: $a = 0.88,\ b = -0.48,\ d = -0.45,\ e = 2.35$ und $f = 0.74$.



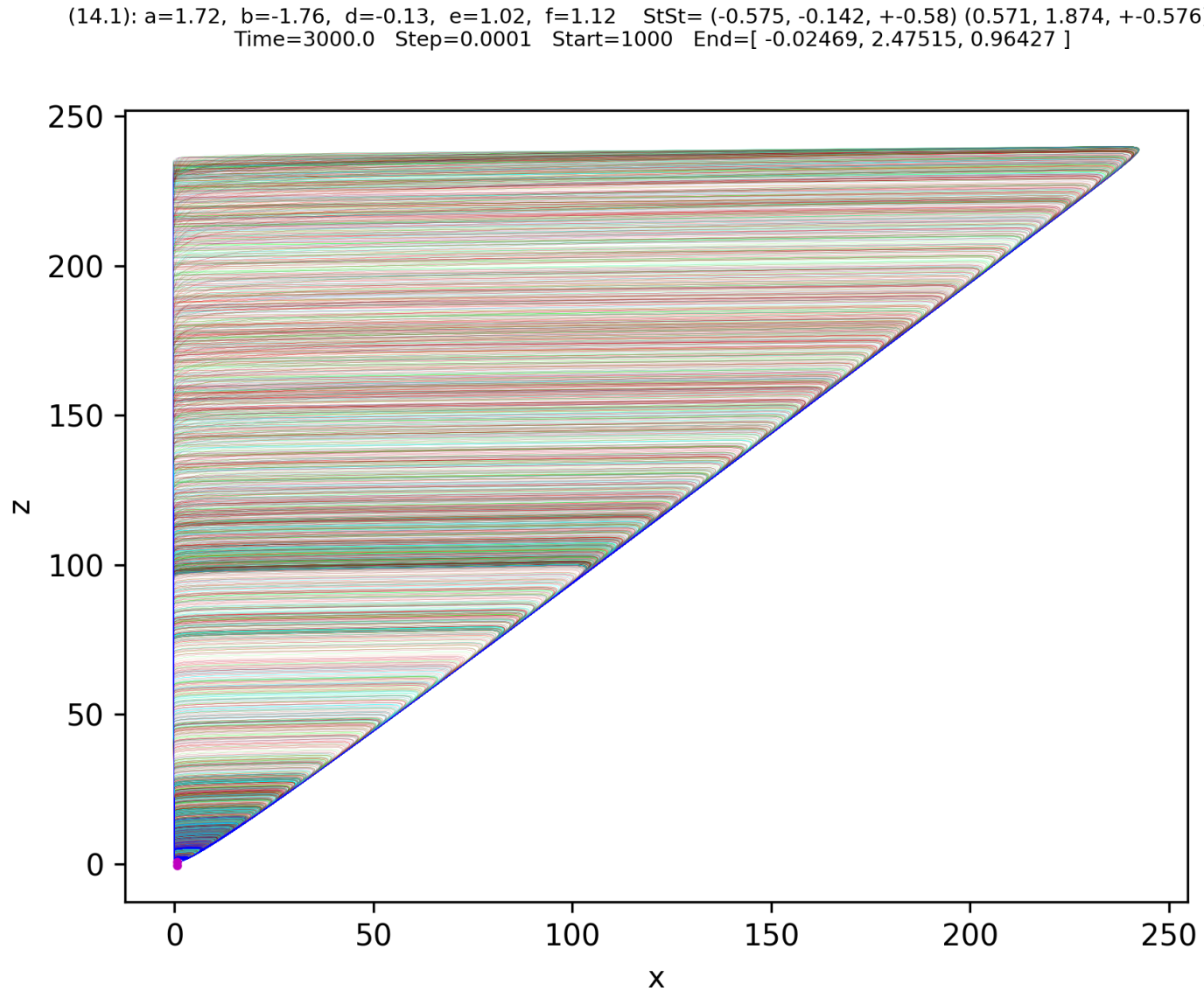
Legende: Chaos im **Beispiel 219**: $\lambda_1 = 0.087$ für: $a = 0.457$, $b = 1.92$, $c = 1.47$, $d = 0.24$, $e = 2.04$, $f = 2.43$, $m = 2.36$, $n = 0.14$, $r = 0.11$, $s = 0.49$.



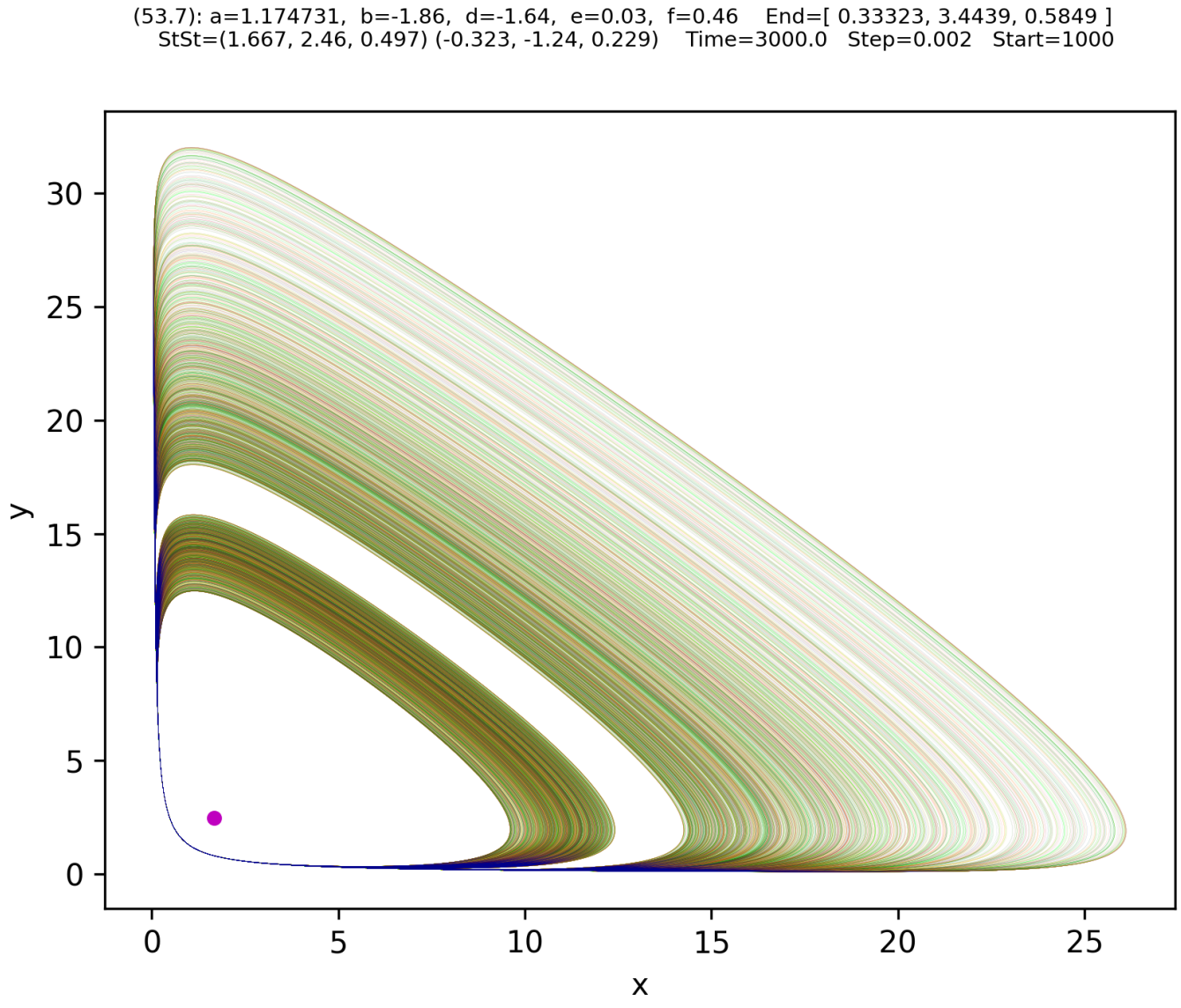
Legende: Chaos im **Beispiel 220**: $\lambda_1 = 0.023$
für: $a = 22.46,\ b = 2.87,\ d = -0.46,\ e = 1.99783$ und $f = 2.01$.



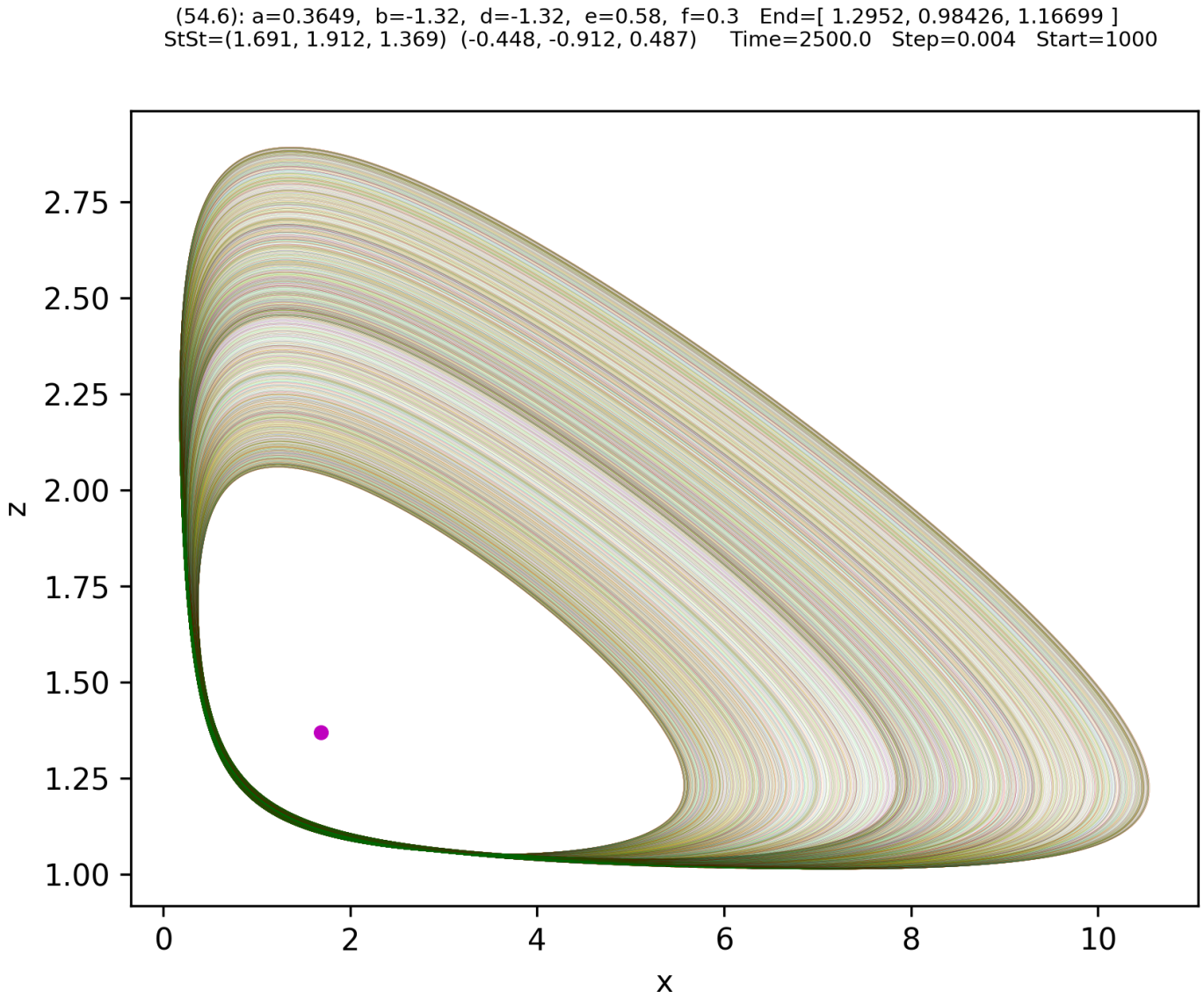
Legende: Chaos im **Beispiel 221**: $\lambda_1 = 0.10 \pm 0.05$
für: $a = 1.72$, $b = -1.76$, $d = -0.13$, $e = 1.02$ und $f = 1.12$.



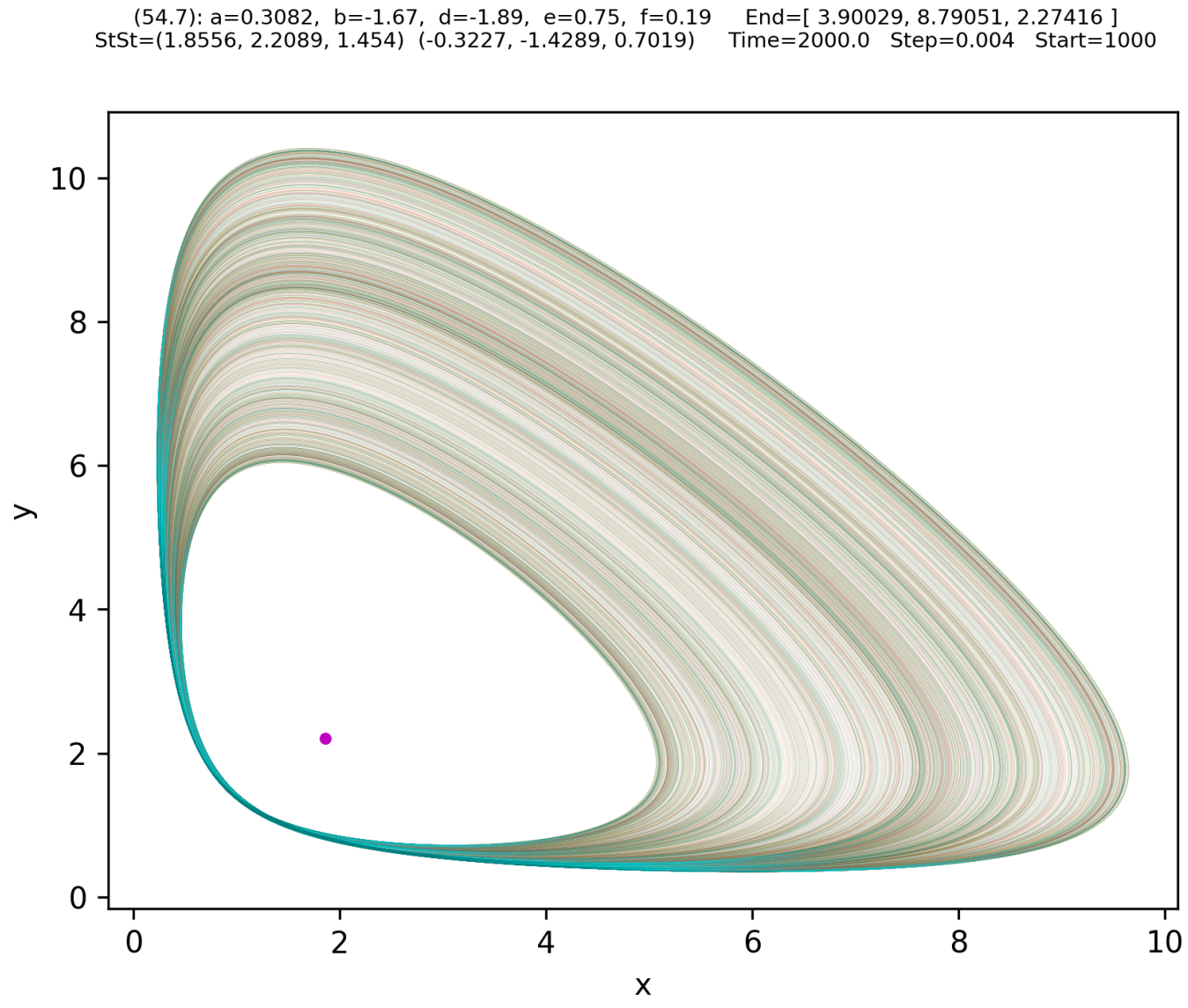
Legende: Chaos im **Beispiel 222**: $\lambda_1 = 0.059$
für: $a = 1.17472$, $b = -1.86$, $d = -1.64$, $e = 0.03$ und $f = 0.46$.



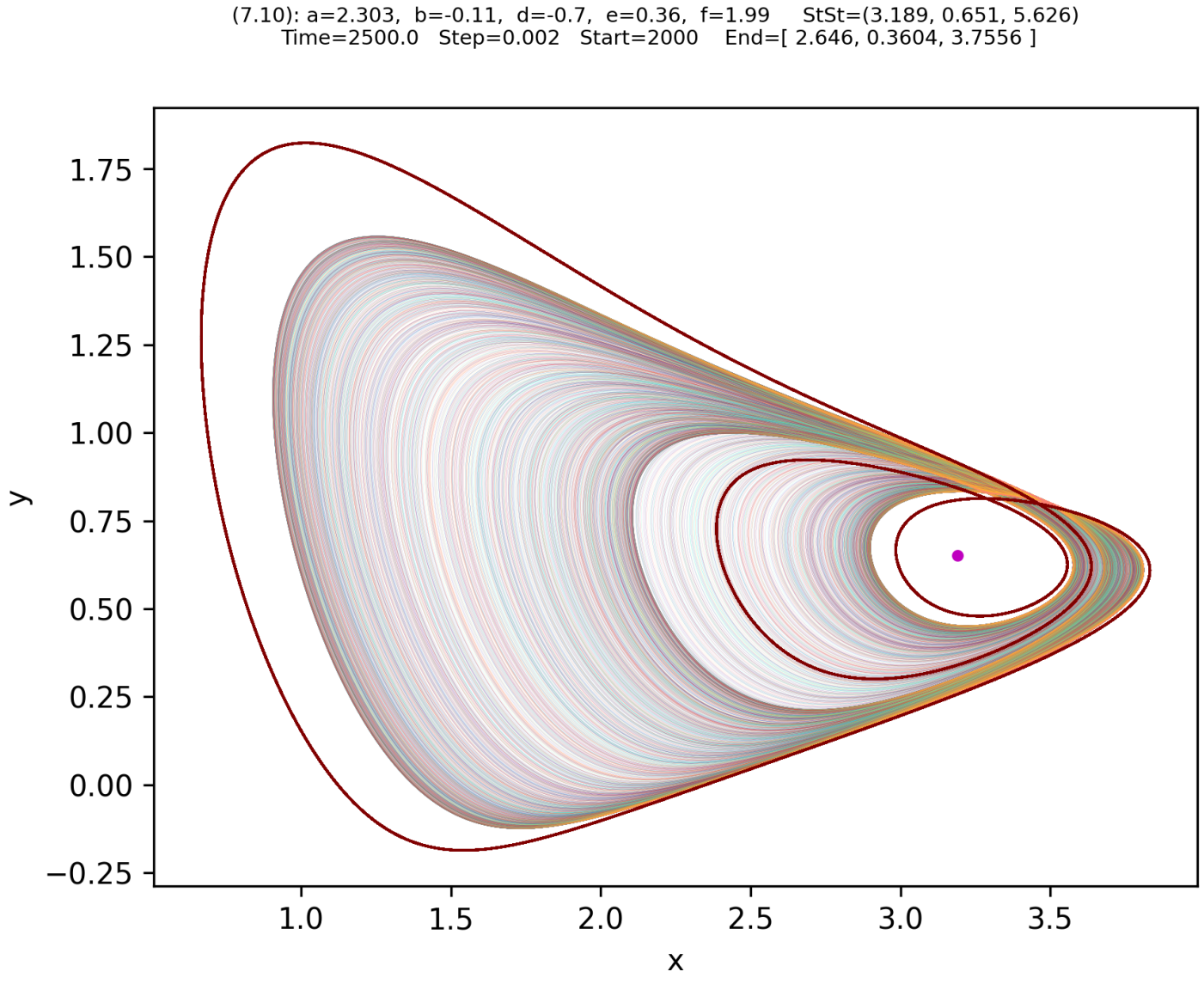
Legende: Chaos im **Beispiel 223**: $\lambda_1 = 0.089$
für: $a = 0.3649$, $b = -1.32$, $d = -1.32$, $e = 0.58$ und $f = 0.3$.



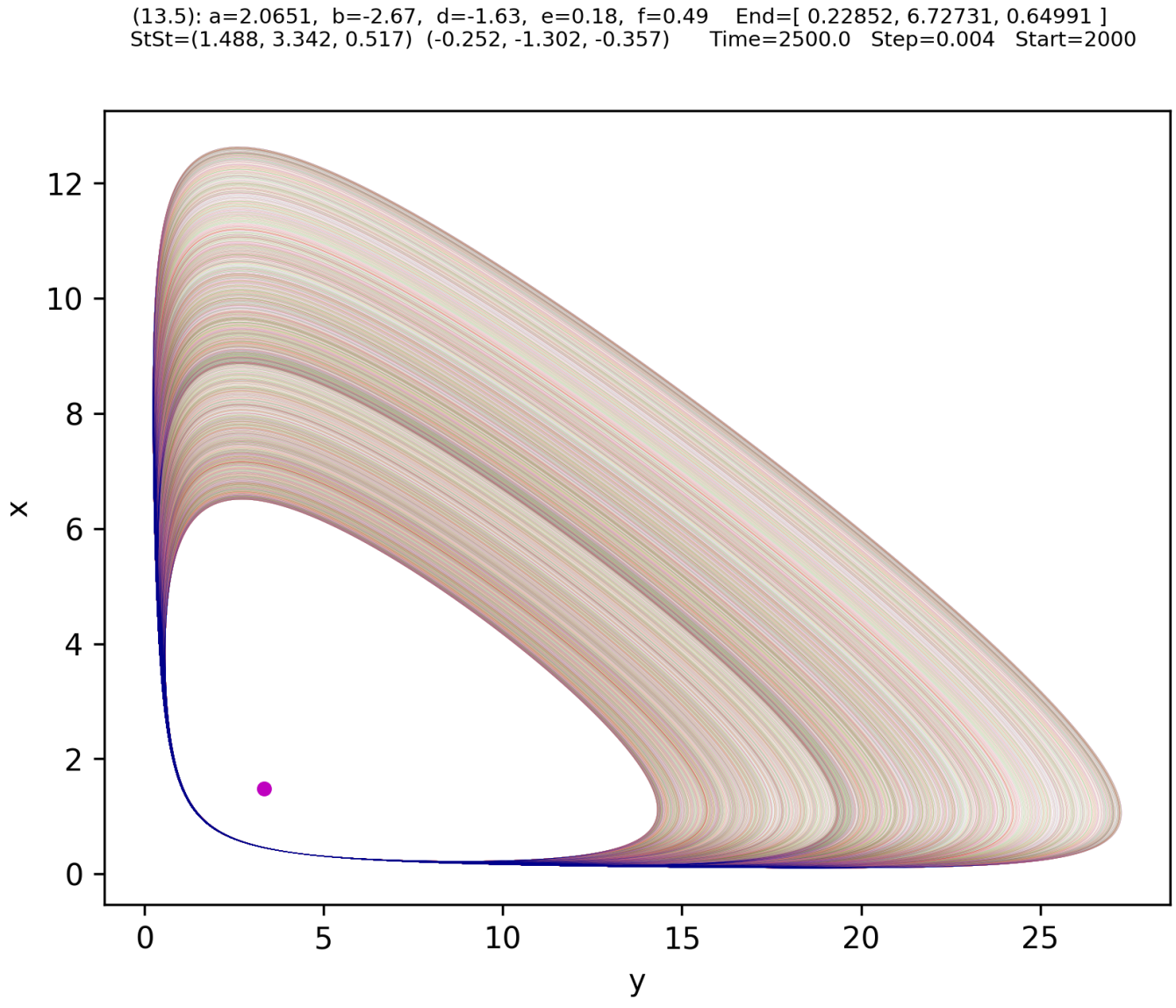
Legende: Chaos im **Beispiel 224**: $\lambda_1 = 0.103$
für: $a = 0.3082$, $b = -1.67$, $d = -1.89$, $e = 0.75$ und $f = 0.19$.



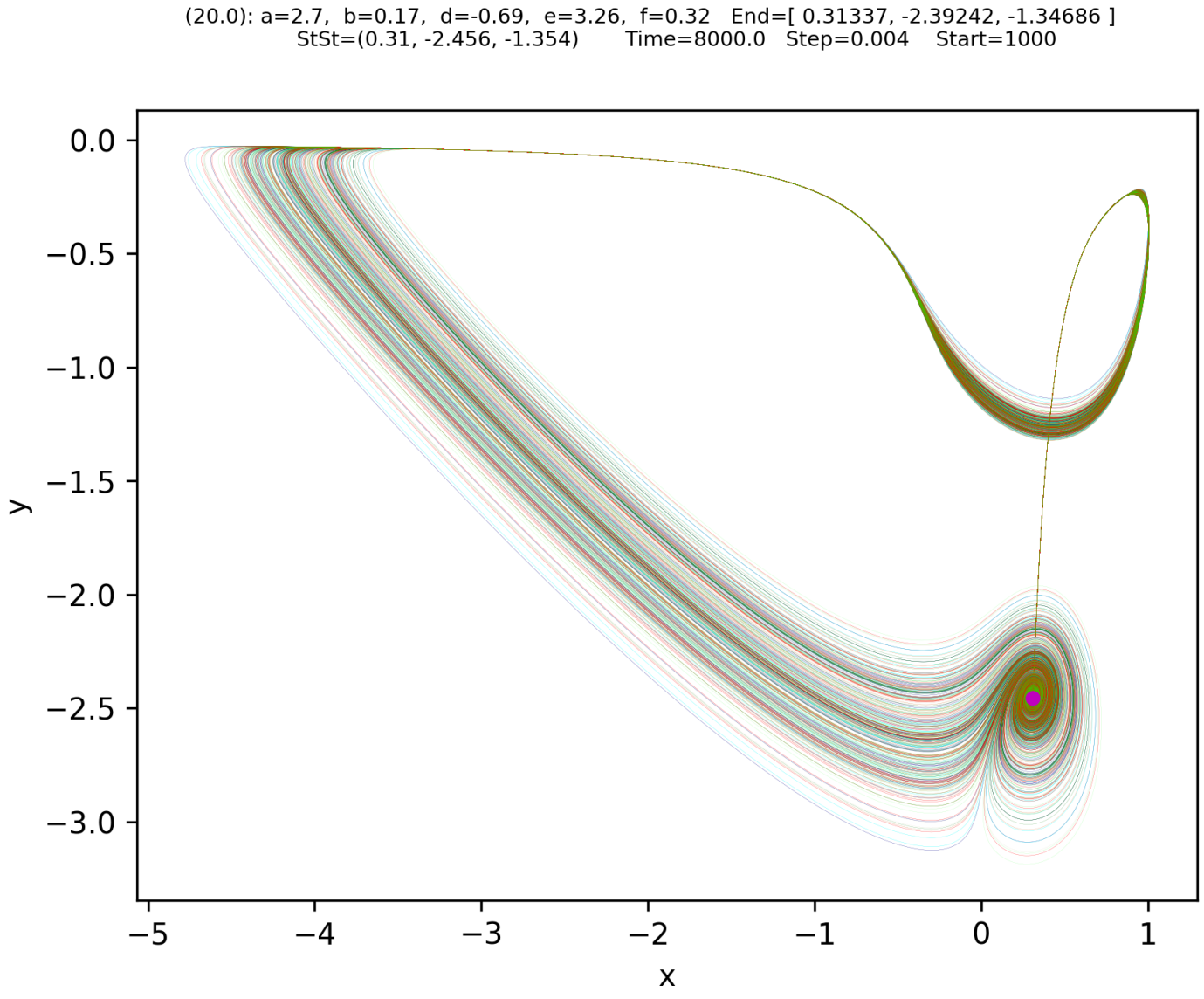
Legende: Chaos im **Beispiel 225**: $\lambda_1 = 0.104$
für: $a = 2.303$, $b = -0.11$, $d = -0.7$, $e = 0.36$ und $f = 1.99$.
Koexistenz mit einem dreifachen Grenzzyklus (braun).



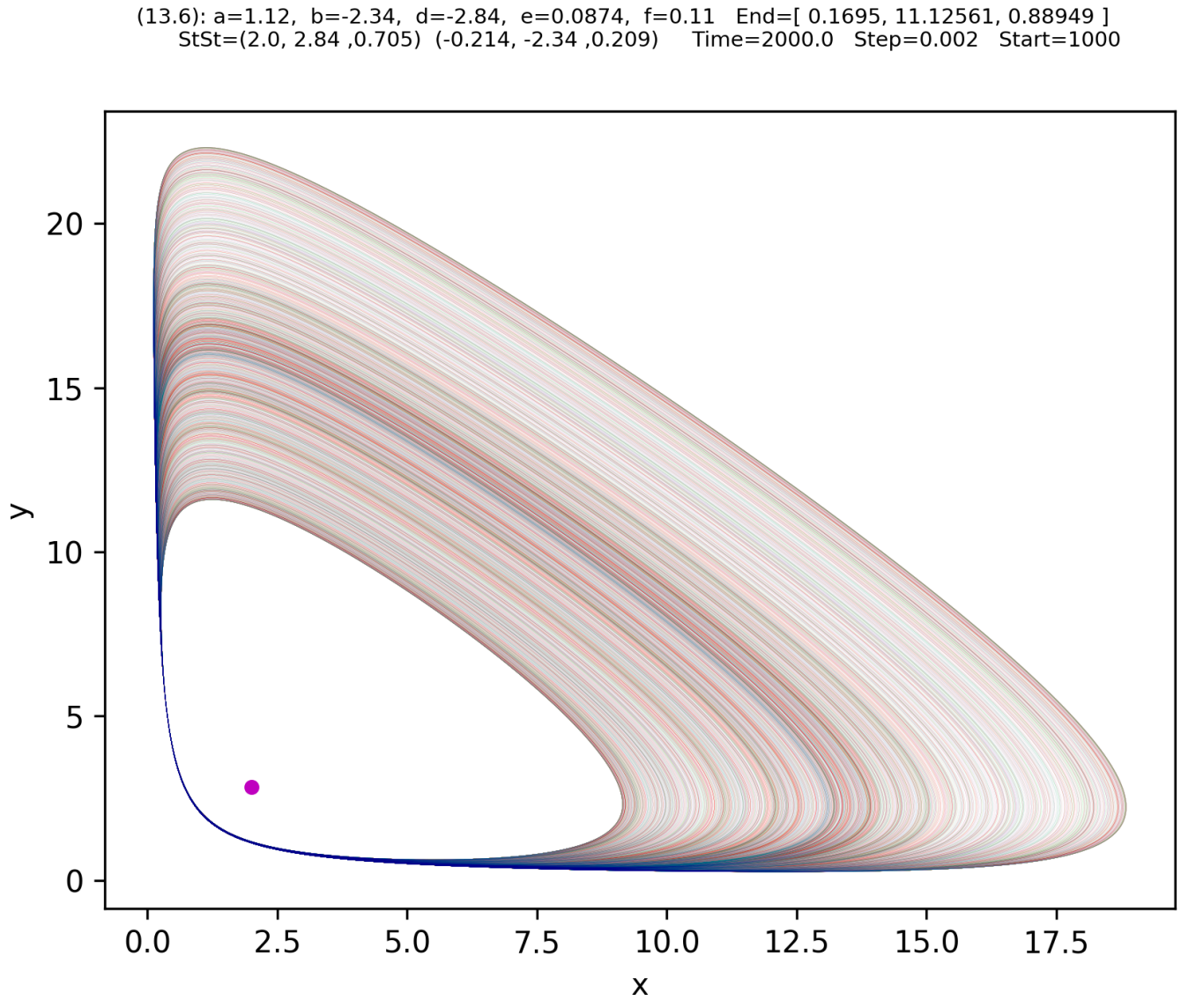
Legende: Chaos im **Beispiel 226**: $\lambda_1 = 0.167$
für: $a = 2.0651,\ b = -2.67,\ d = -1.63,\ e = 0.18$ und $f = 0.49$.



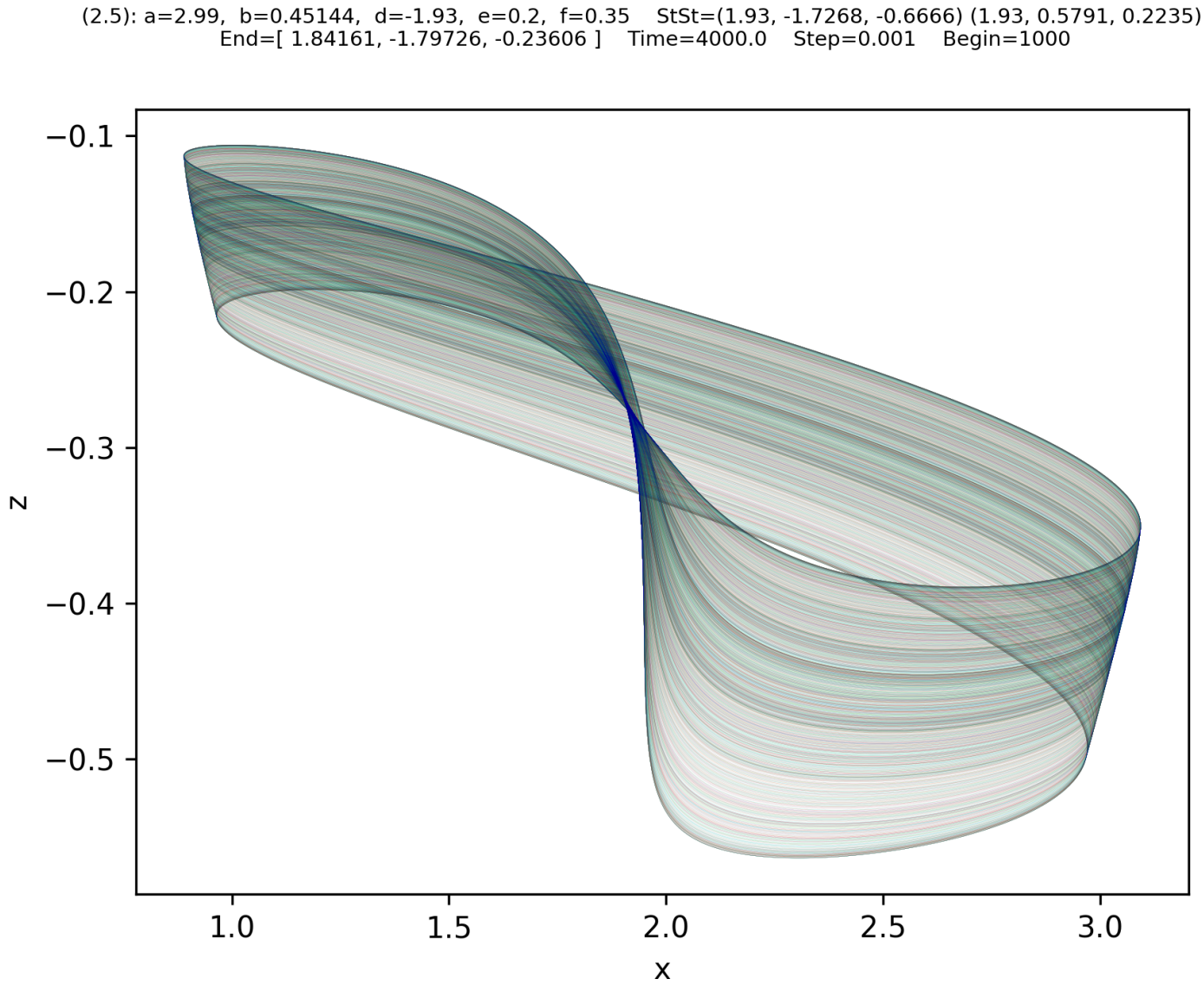
Legende: Chaos im **Beispiel 227**: $\lambda_1 = 0.013 \pm 0.003$
für: $a = 2.7$, $b = 0.17$, $d = -0.69$, $e = 3.26$ und $f = 0.32$.



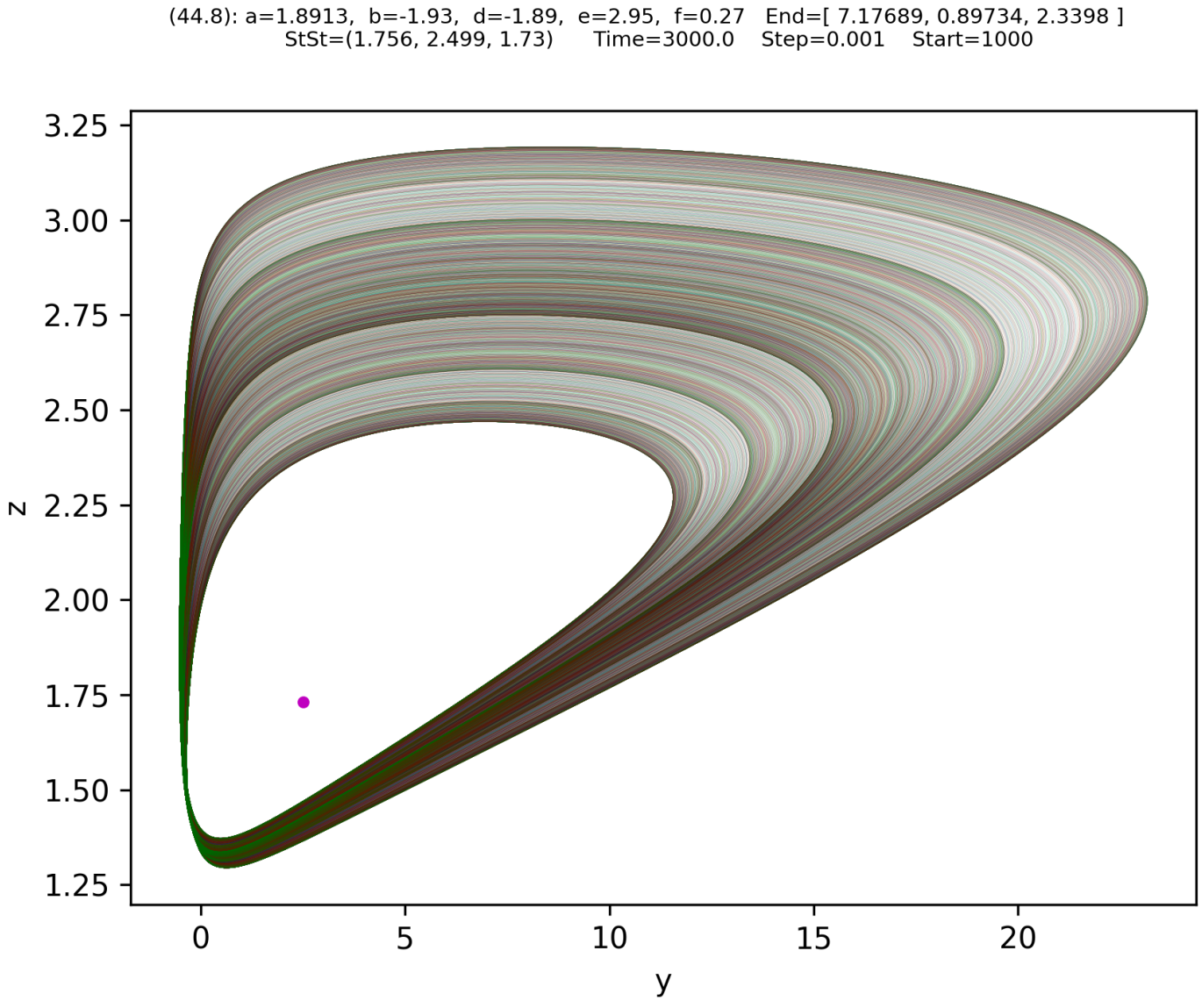
Legende: Chaos im **Beispiel 228**: $\lambda_1 = 0.110$
für: $a = 1.12,\ b = -2.34,\ d = -2.84,\ e = 0.0874$ und $f = 0.11$.



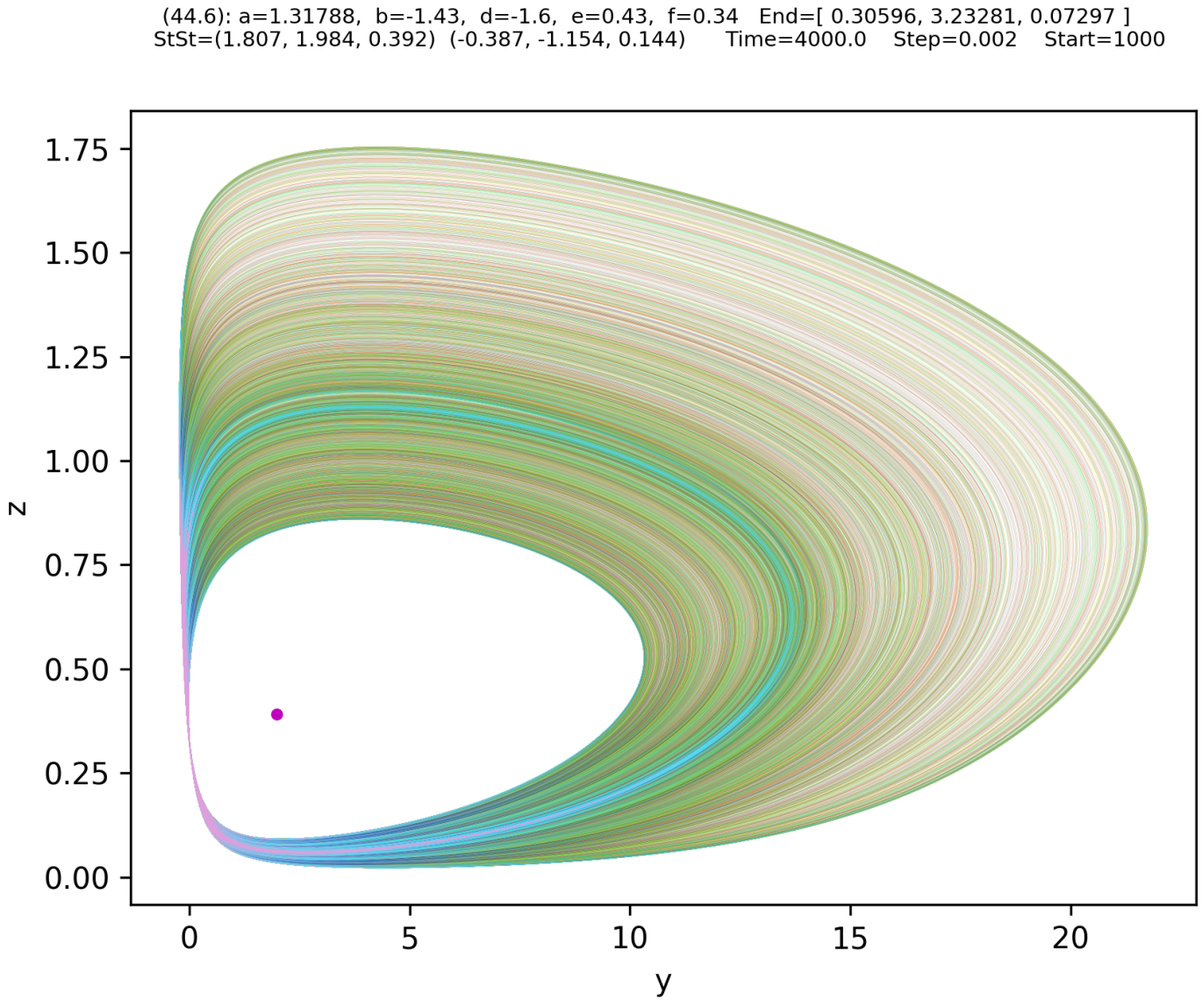
Legende: Chaos im **Beispiel 229**: $\lambda_1 = 0.071$
für: $a = 2.99$, $b = 0.45144$, $d = -1.93$, $e = 0.2$ und $f = 0.35$.



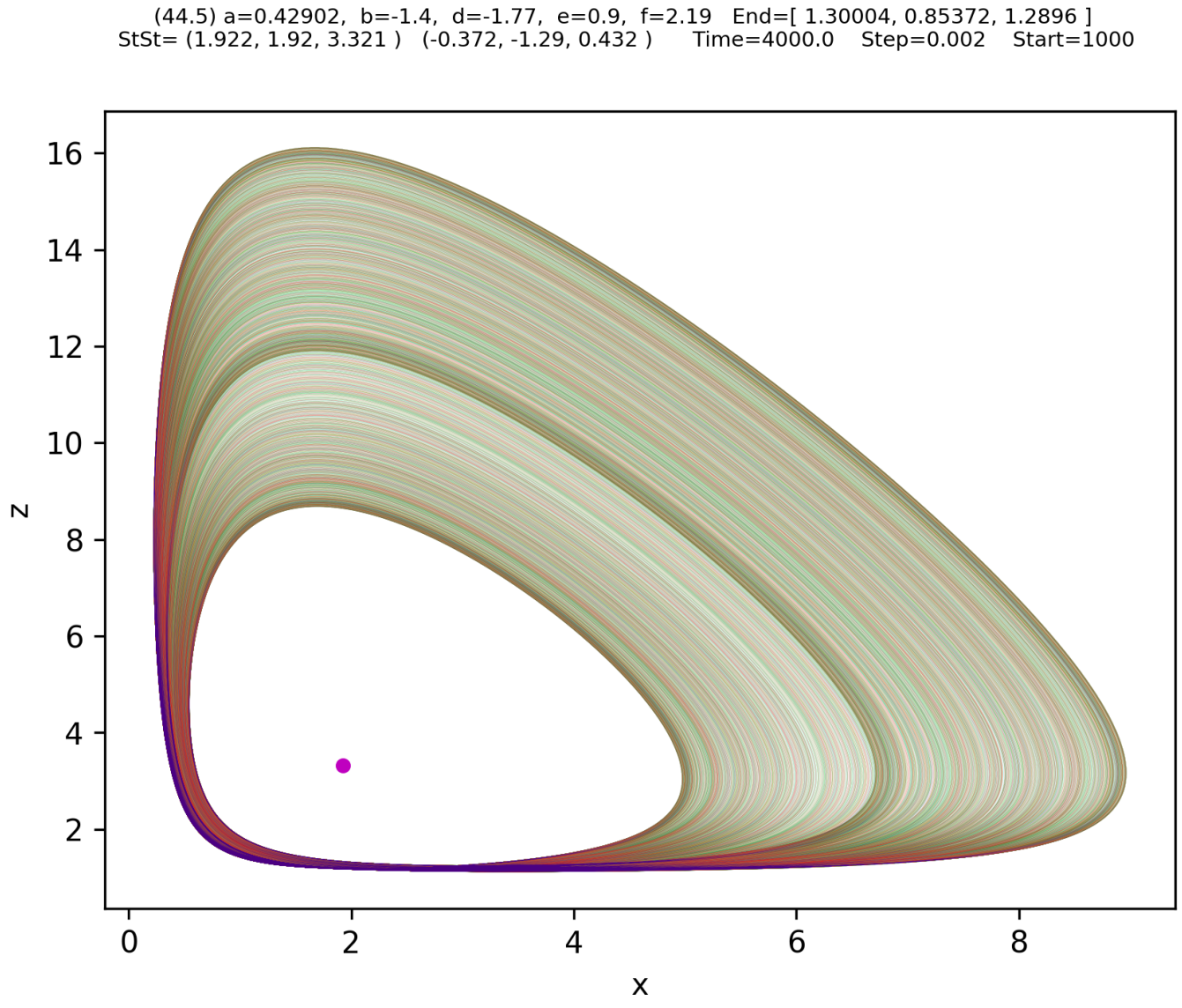
Legende: Chaos im **Beispiel 230**: $\lambda_1 = 0.172$
für: $a = 1.8913$, $b = -1.93$, $d = -1.89$, $e = 2.95$ und $f = 0.27$.



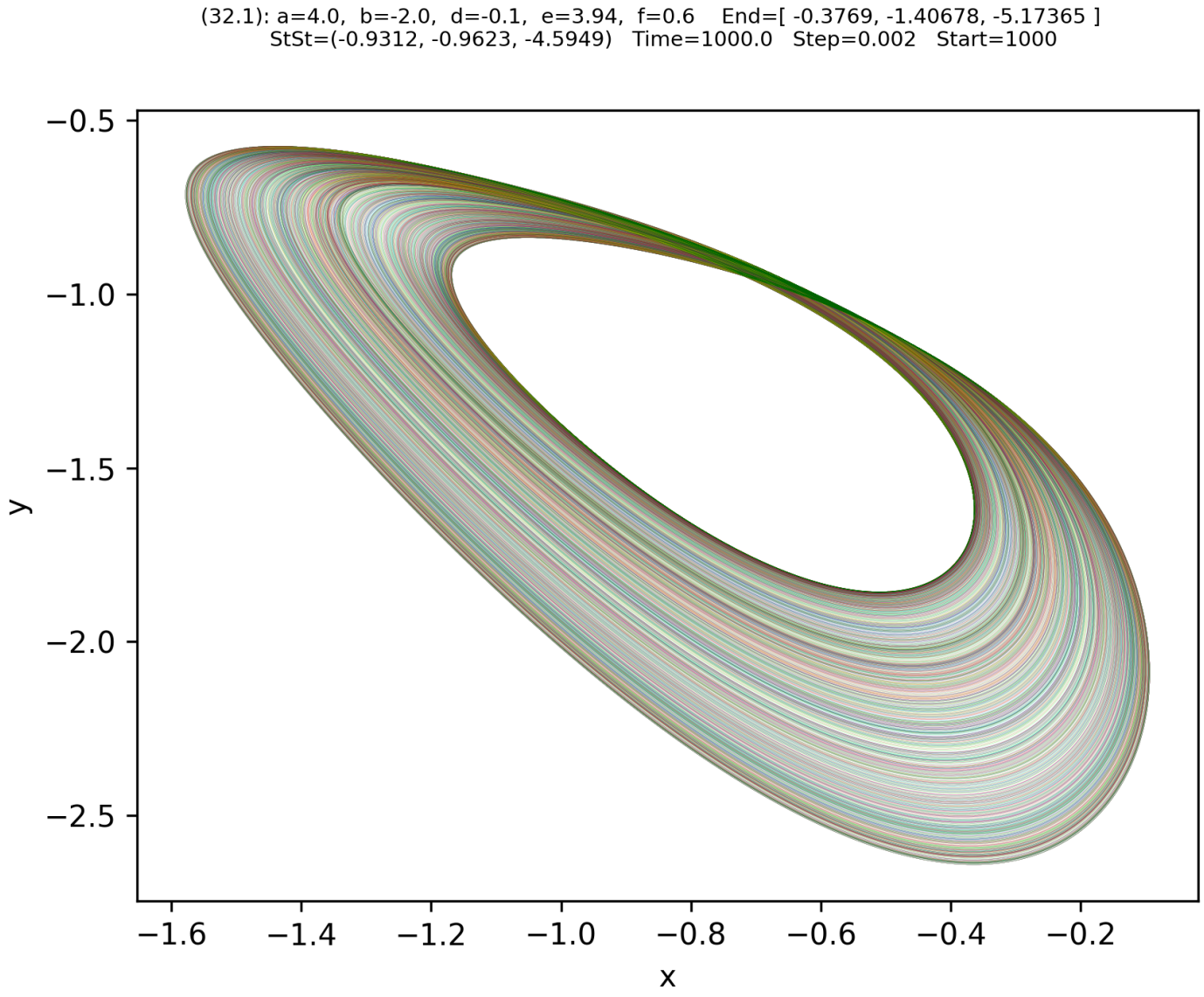
Legende: Chaos im **Beispiel 231**: $\lambda_1 = 0.092$
für: $a = 1.31788$, $b = -1.43$, $d = -1.6$, $e = 0.43$ und $f = 0.34$.



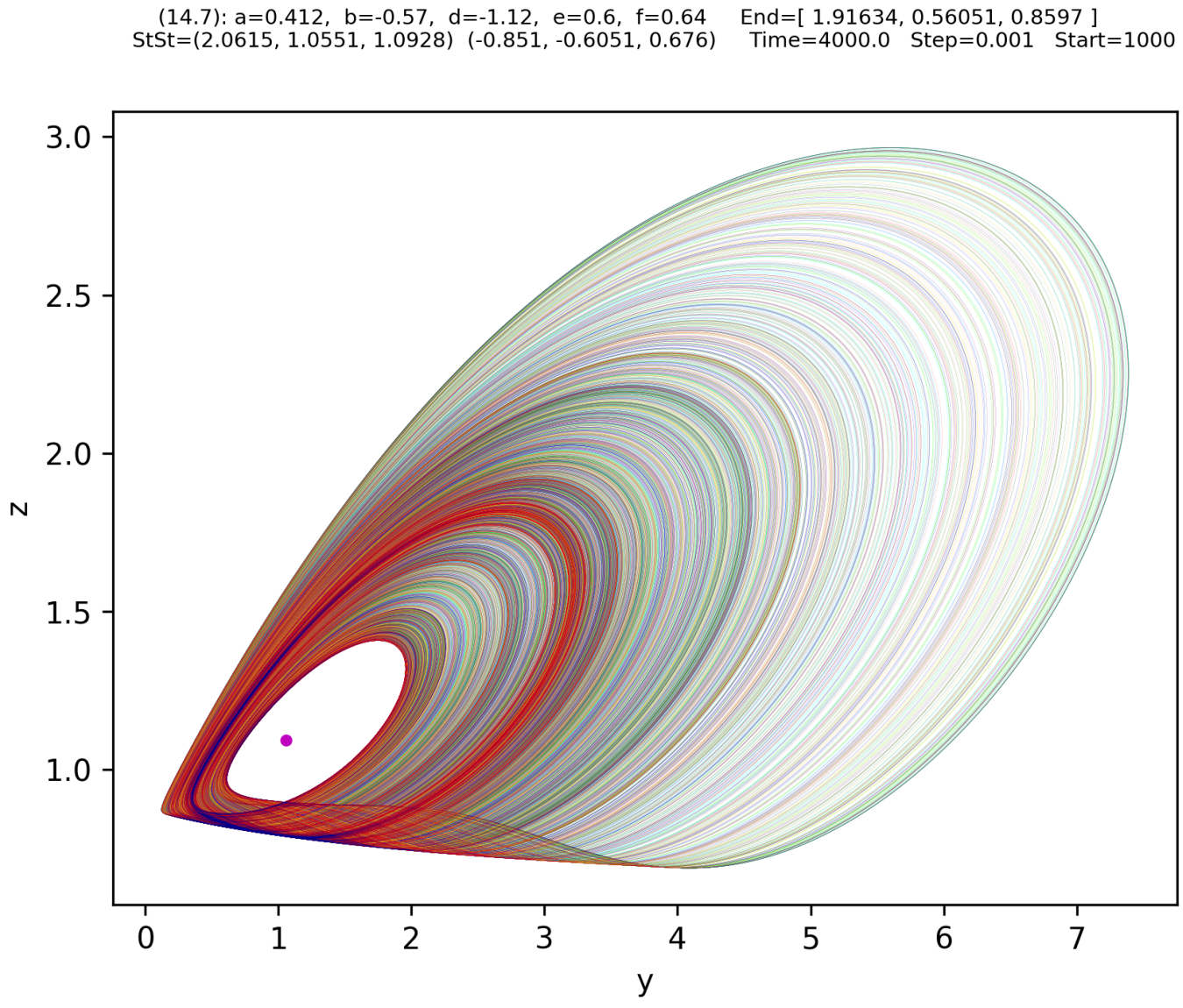
Legende: Chaos im **Beispiel 232**: $\lambda_1 = 0.126$
für: $a = 0.42903$, $b = -1.4$, $d = -1.77$, $e = 0.9$ und $f = 2.19$.



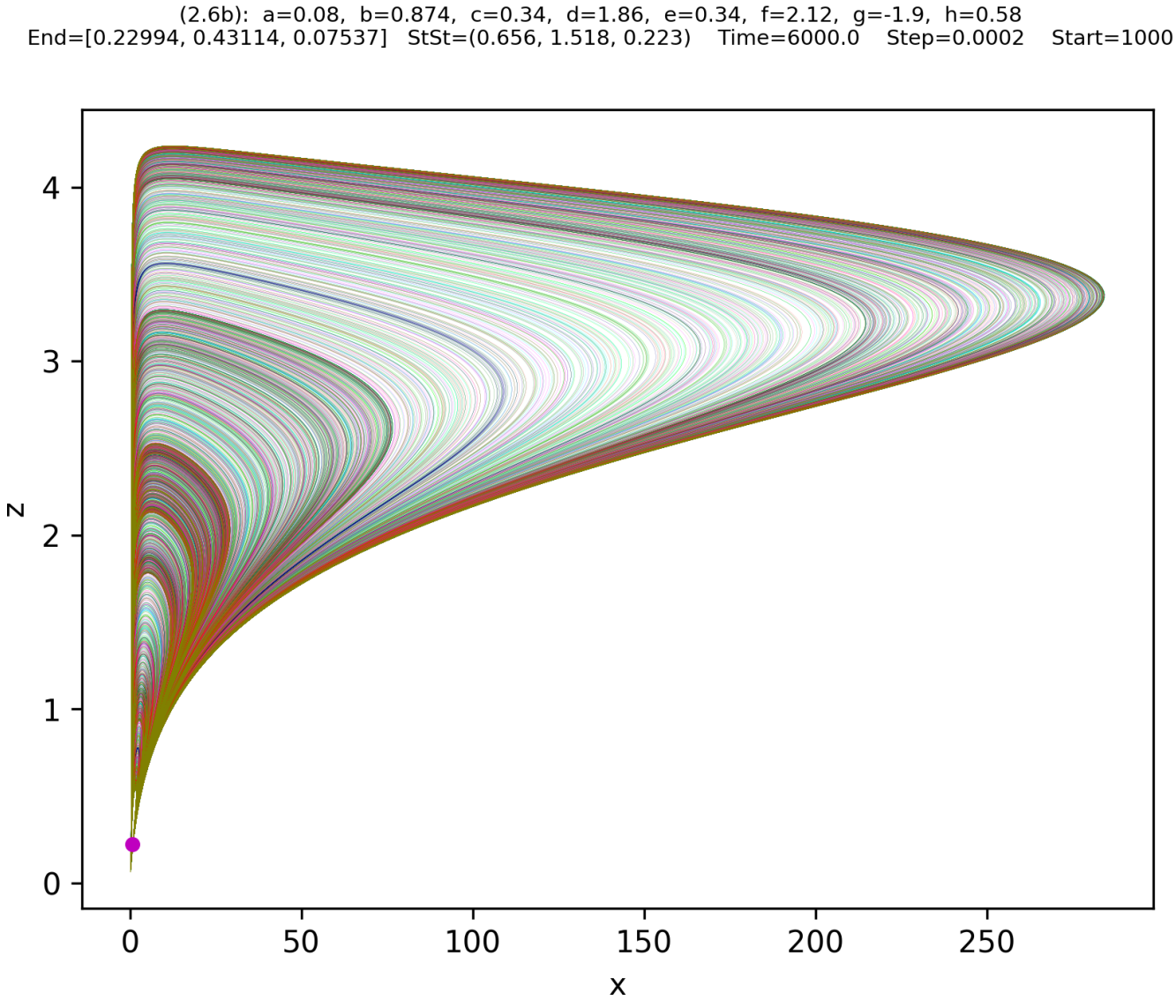
Legende: Chaos im **Beispiel 233**: $\lambda_1 = 0.179$
für: $a = 4.0$, $b = -2.0$, $d = -0.1$, $e = 3.94$ und $f = 0.6$.



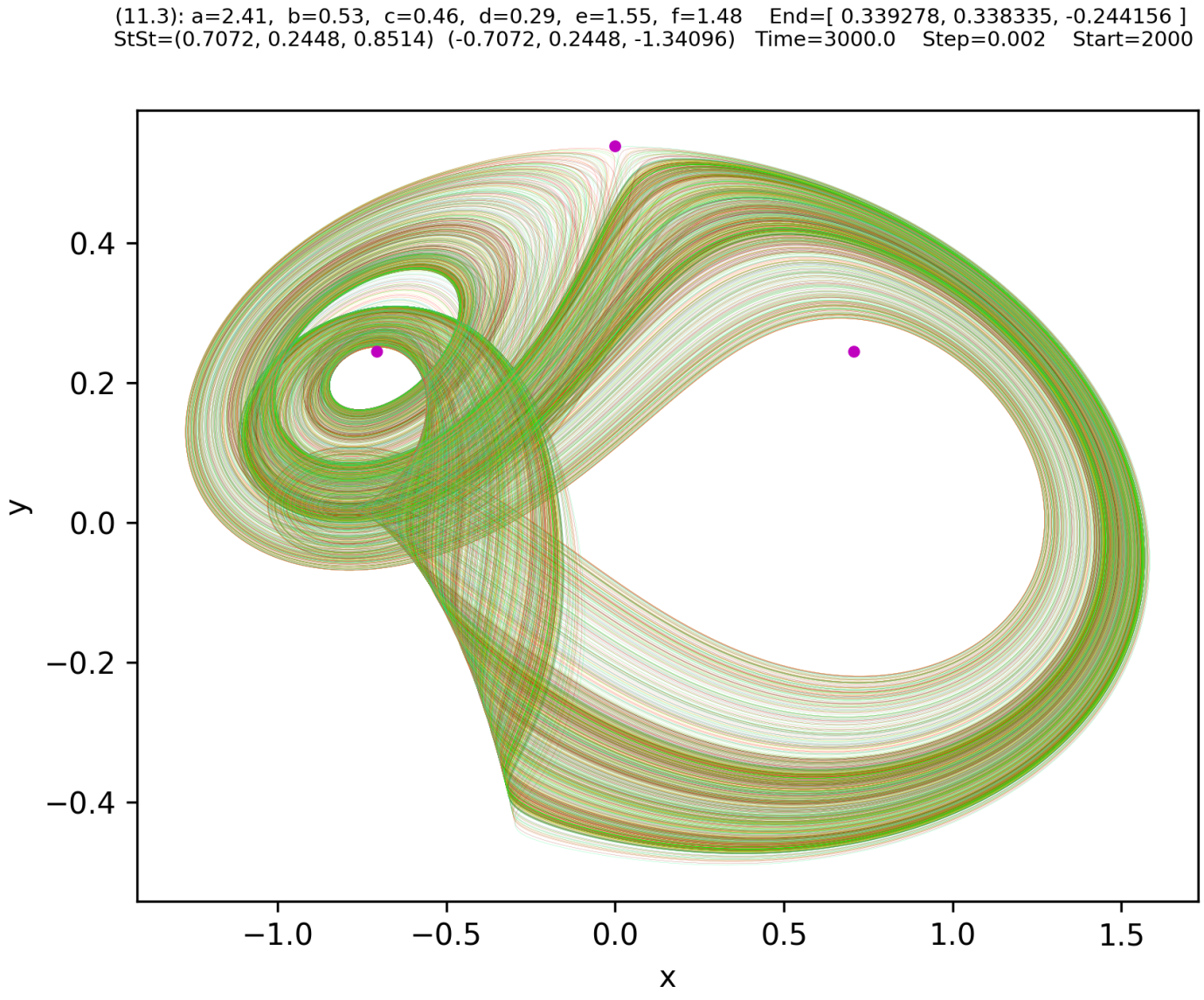
Legende: Chaos im **Beispiel 234**: $\lambda_1 = 0.065$
für: $a = 0.412$, $b = -0.57$, $d = -1.12$, $e = 0.6$ und $f = 0.64$.



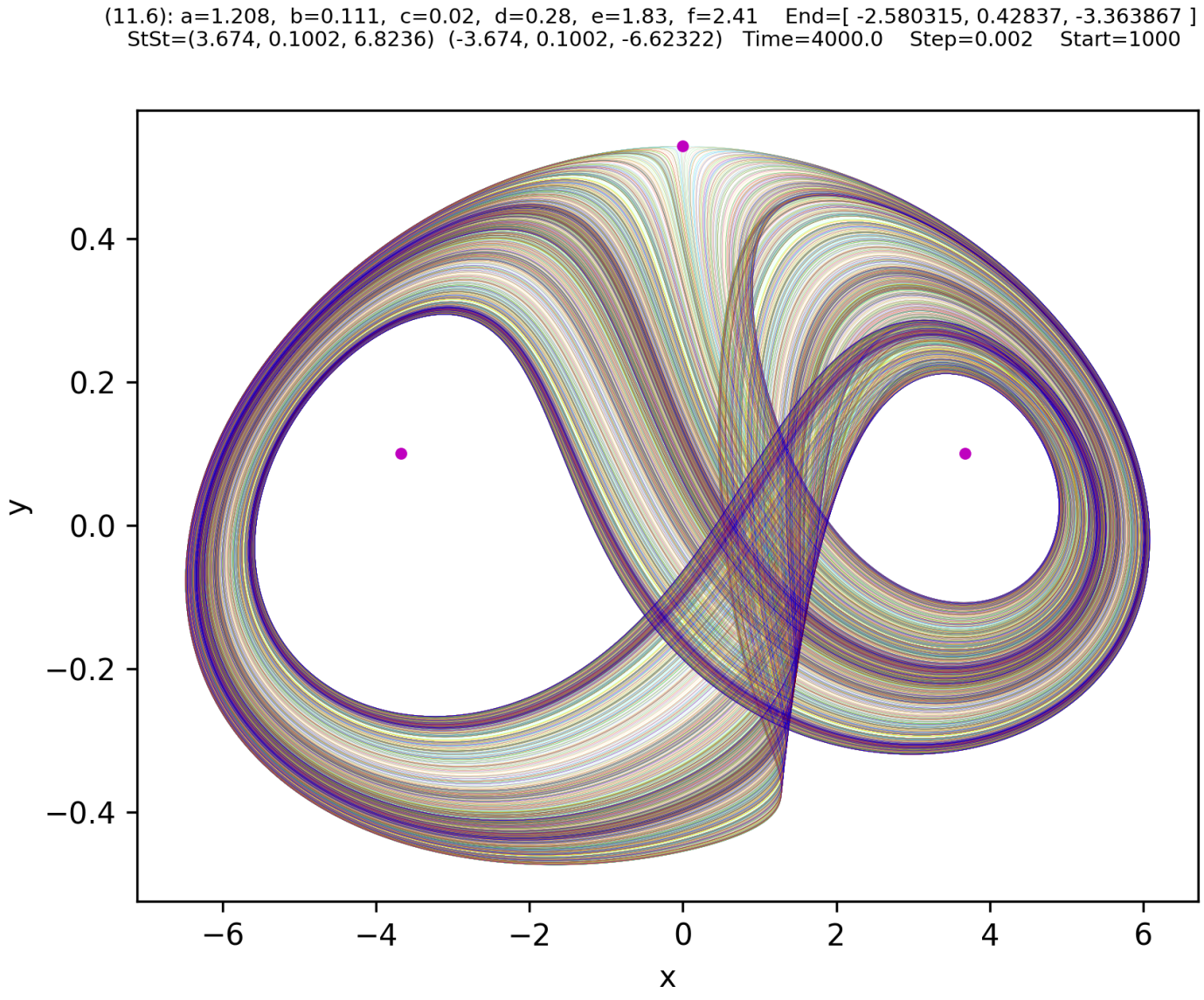
Legende: Chaos im **Beispiel 235**: $\lambda_1 = 0.039$ für:
$a = 0.08$, $b = 0.874$, $c = 0.34$, $d = 1.86$, $e = 0.34$, $f = 2.12$, $g = -1.9$, $h = 0.58$.



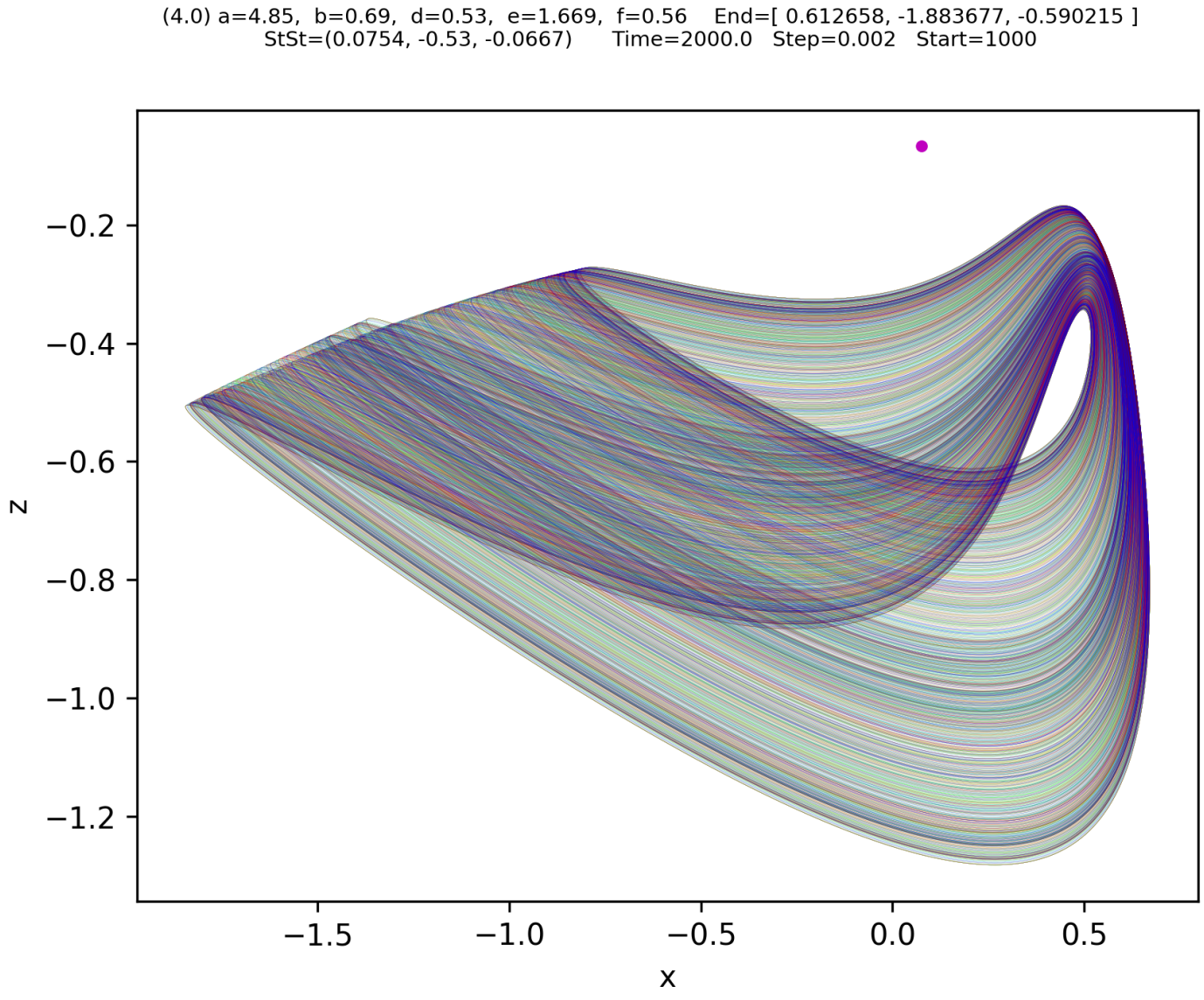
Legende: Chaos im **Beispiel 236**: $\lambda_1 = 0.080$
für: $a = 2.41,\ b = 0.53,\ c = 0.46, d = 0.29,\ e = 1.55$ und $f = 1.48$.



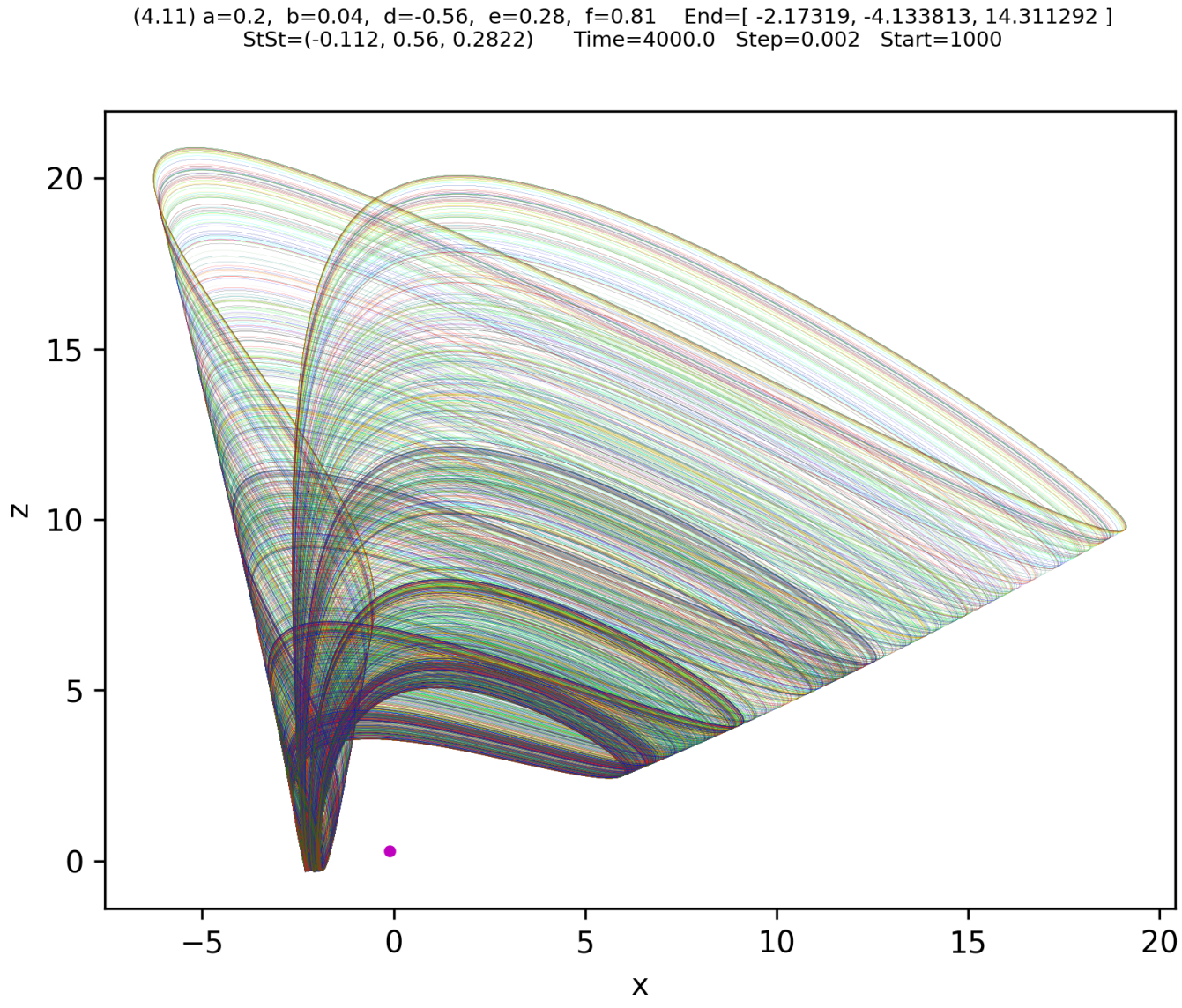
Legende: Chaos im **Beispiel 237**: $\lambda_1 = 0.029$
für: $a = 1.208,\ b = 0.111,\ c = 0.02, d = 0.28,\ e = 1.83$ und $f = 2.41$.



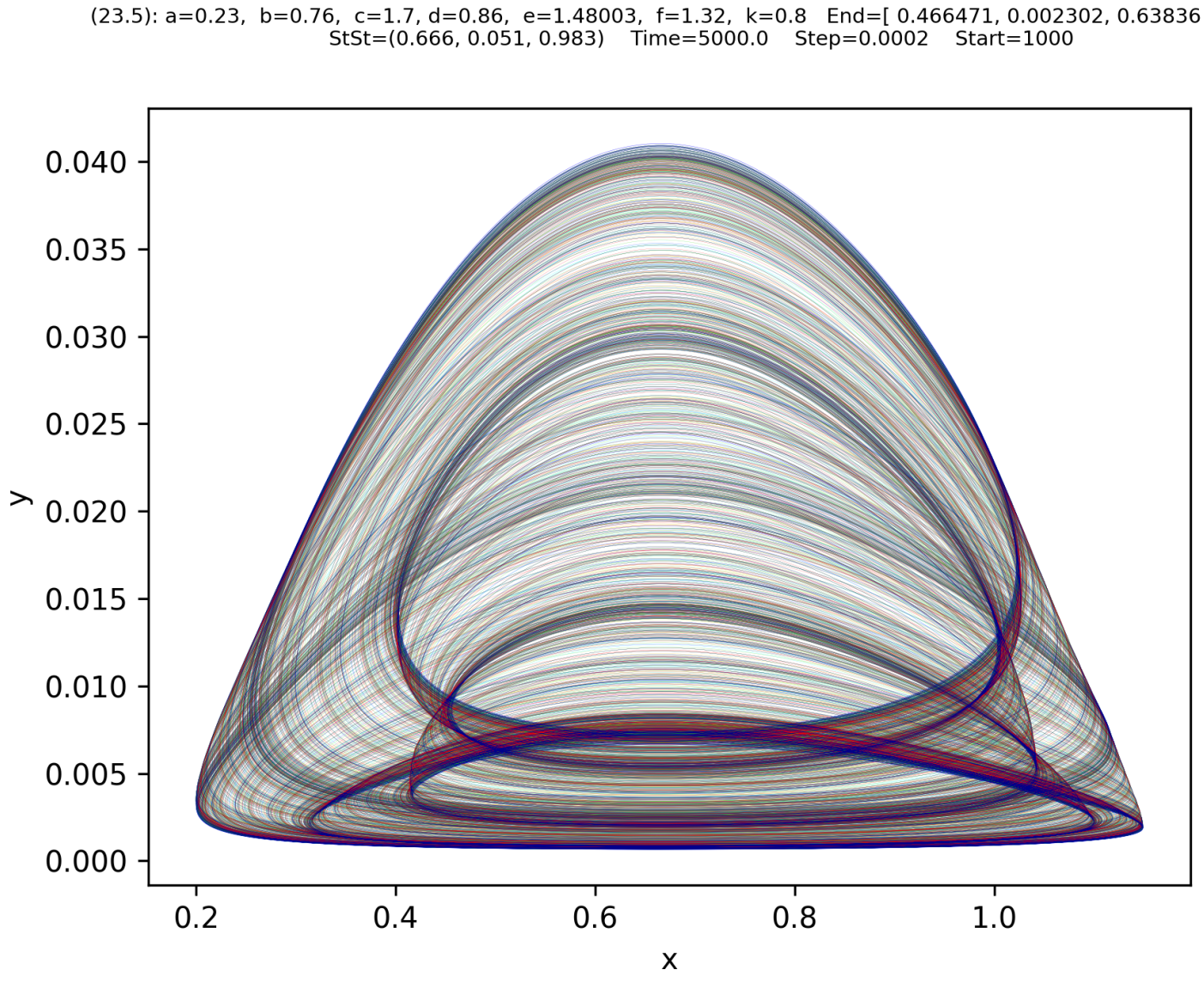
Legende: Chaos im **Beispiel 238**: $\lambda_1 = 0.115$
für: $a = 4.85,\ b = 0.69, d = 0.53,\ e = 1.669$ und $f = 2.56$.



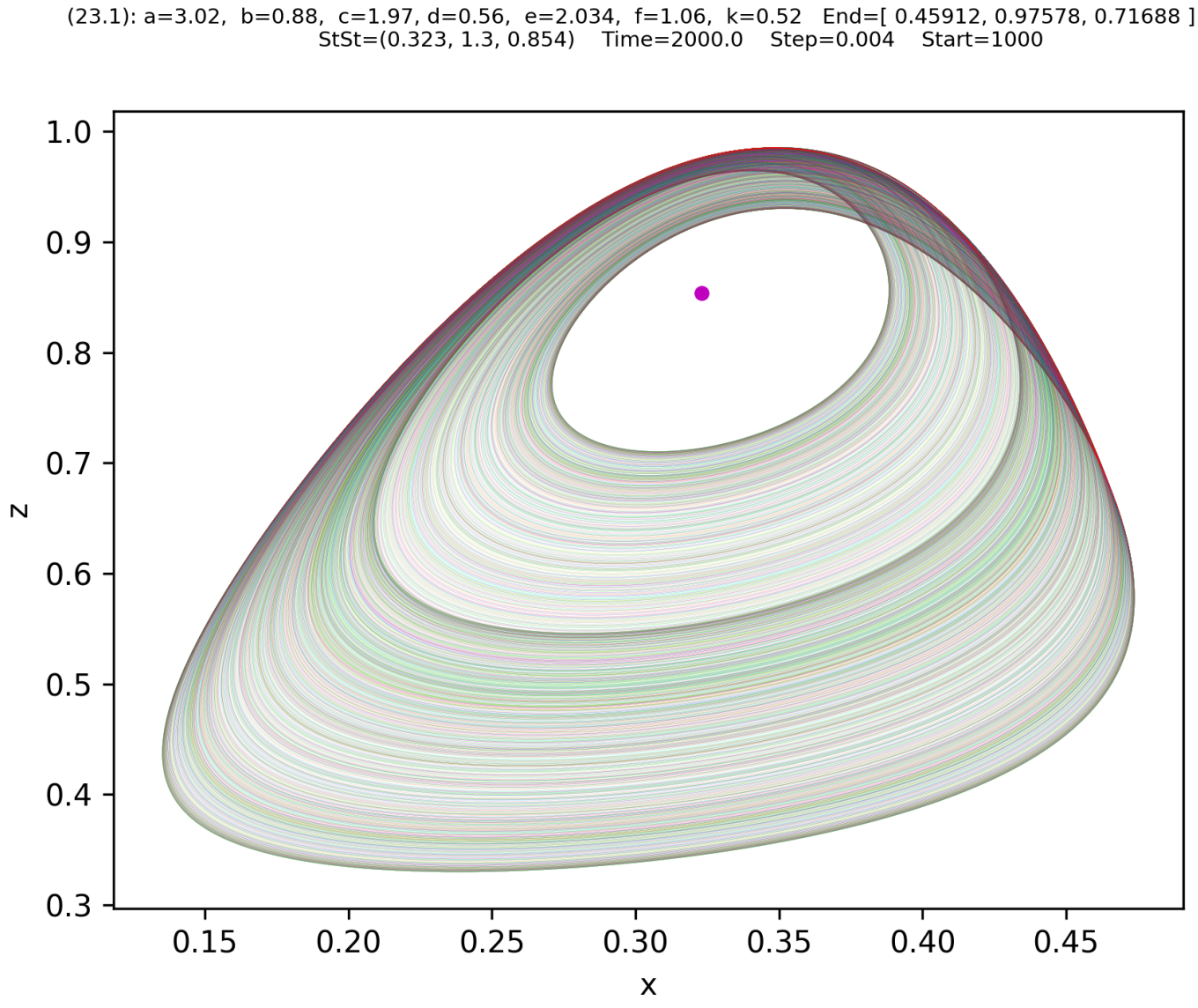
Legende: Chaos im **Beispiel 239**: $\lambda_1 = 0.020$
für: $a = 0.2,\ b = 0.04, d = -0.56,\ e = 0.28$ und $f = 0.81$.



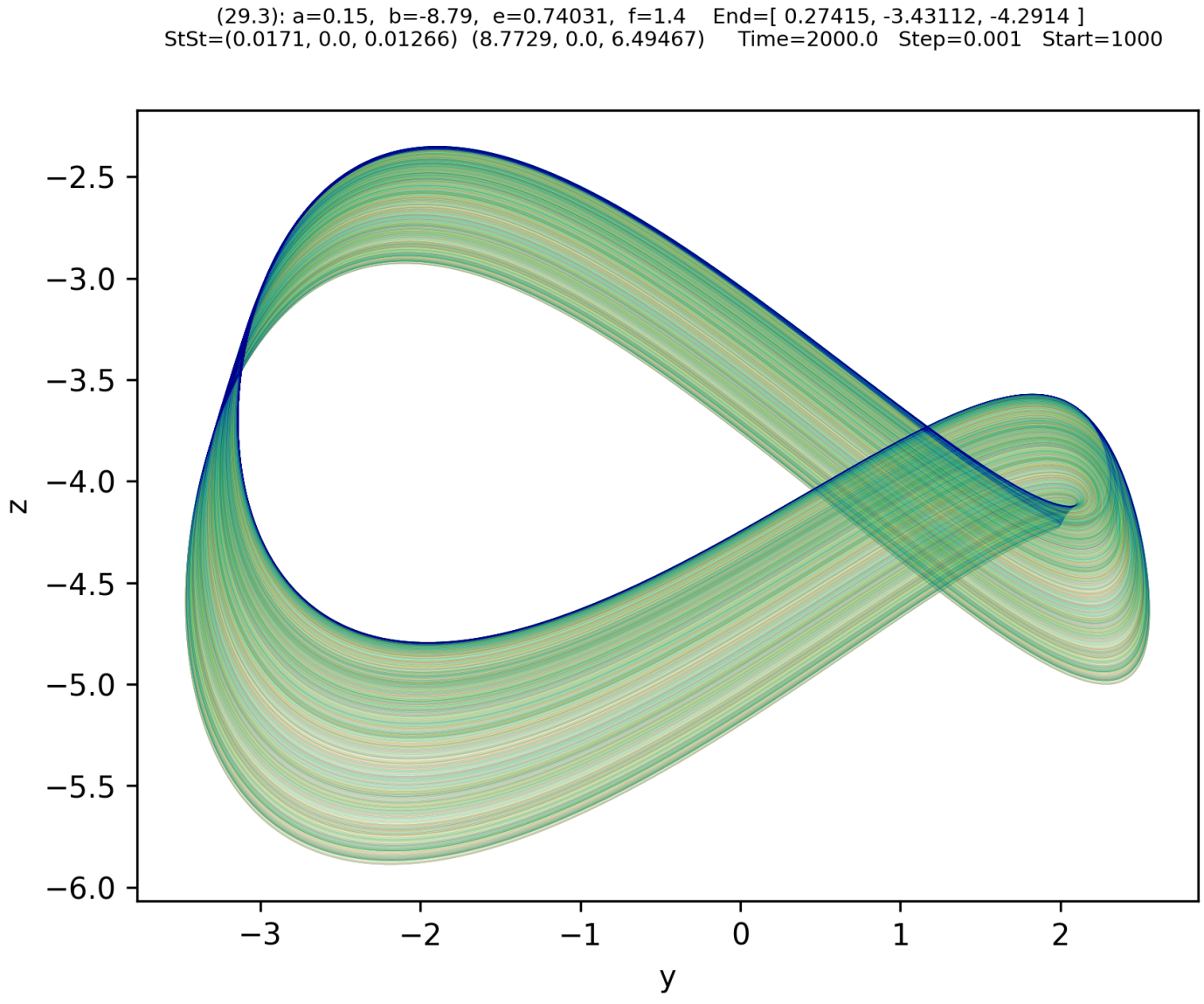
Legende: Chaos im **Beispiel 240**: $\lambda_1 = 0.011$ für
$a = 0.23,\ b = 0.76, c = 1.7,\ d = 0.86,\ e = 1.48003,\ f = 1.32,\ k = 0.8$.



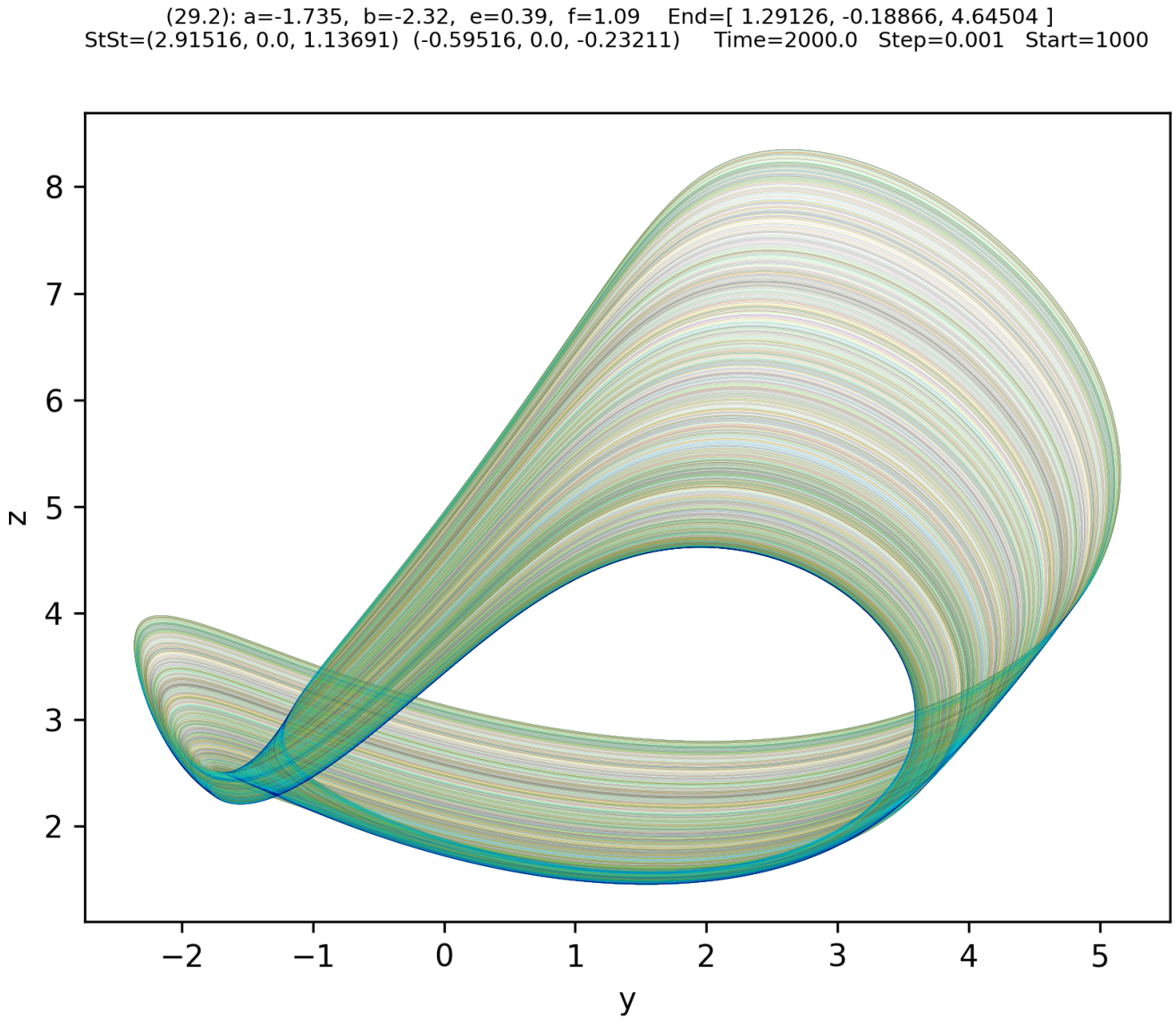
Legende: Chaos im **Beispiel 241**: $\lambda_1 = 0.066$ für
$a = 3.02,\ b = 0.88, c = 1.97,\ d = 0.56,\ e = 2.034,\ f = 1.06,\ k = 0.52$.



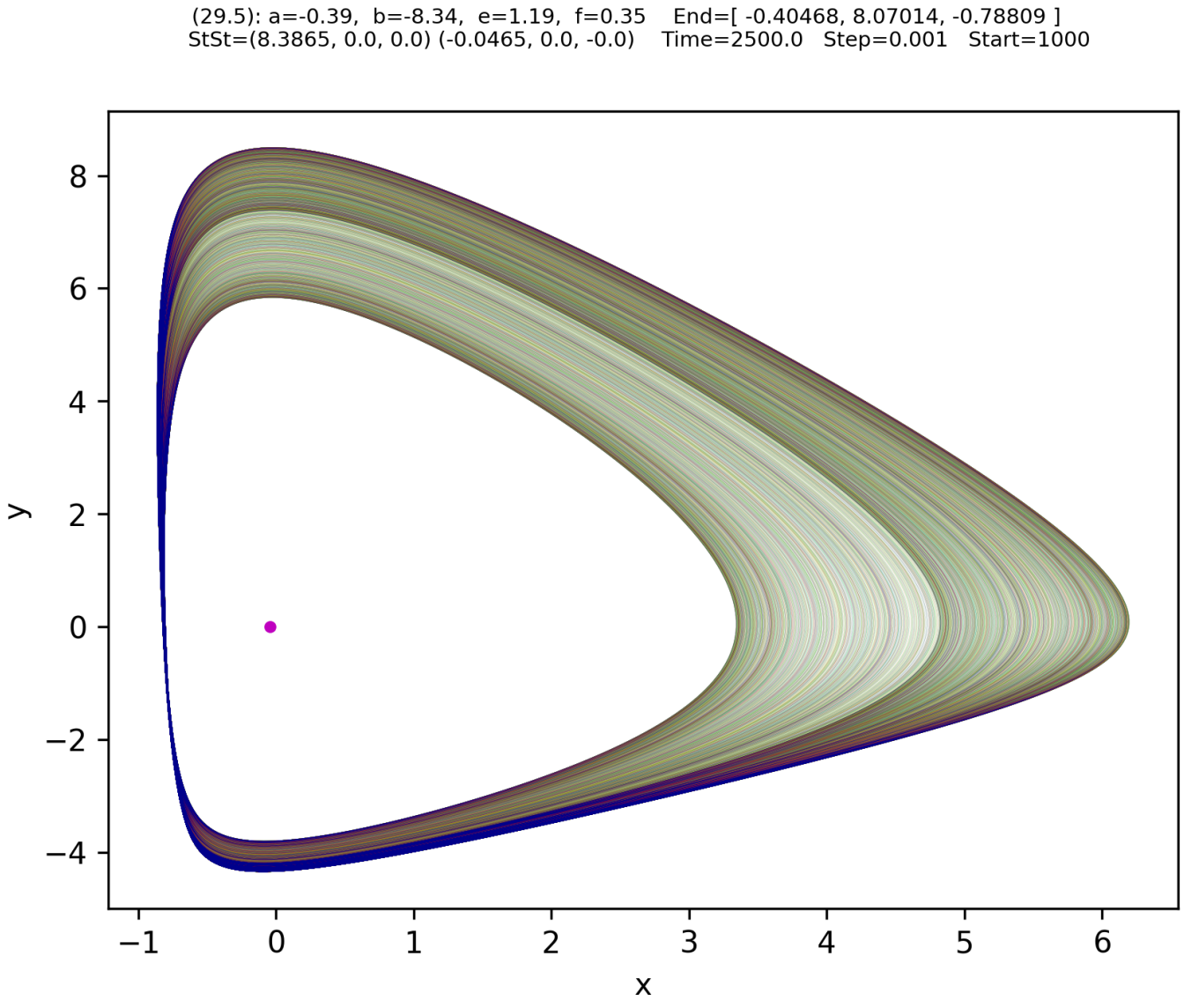
Legende: Chaos im **Beispiel 242**: $\lambda_1 = 0.226$ für $a = 0.15,\ b = -8.79,\ e = 0.74031,\ f = 1.4.$



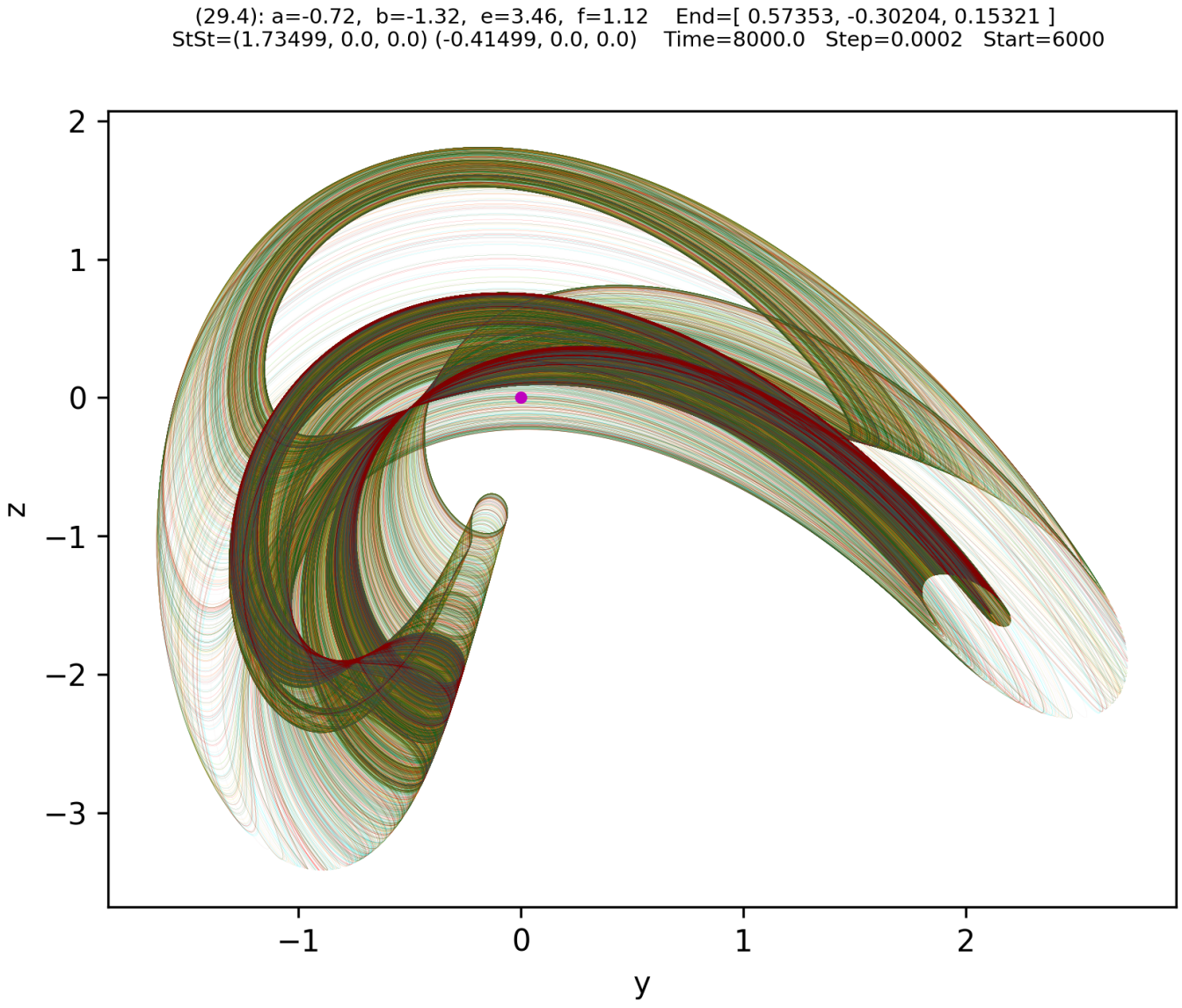
Legende: Chaos im **Beispiel 243**: $\lambda_1 = 0.137$ für $a = -1.735$, $b = -2.32$, $e = 0.39$, $f = 1.09$.



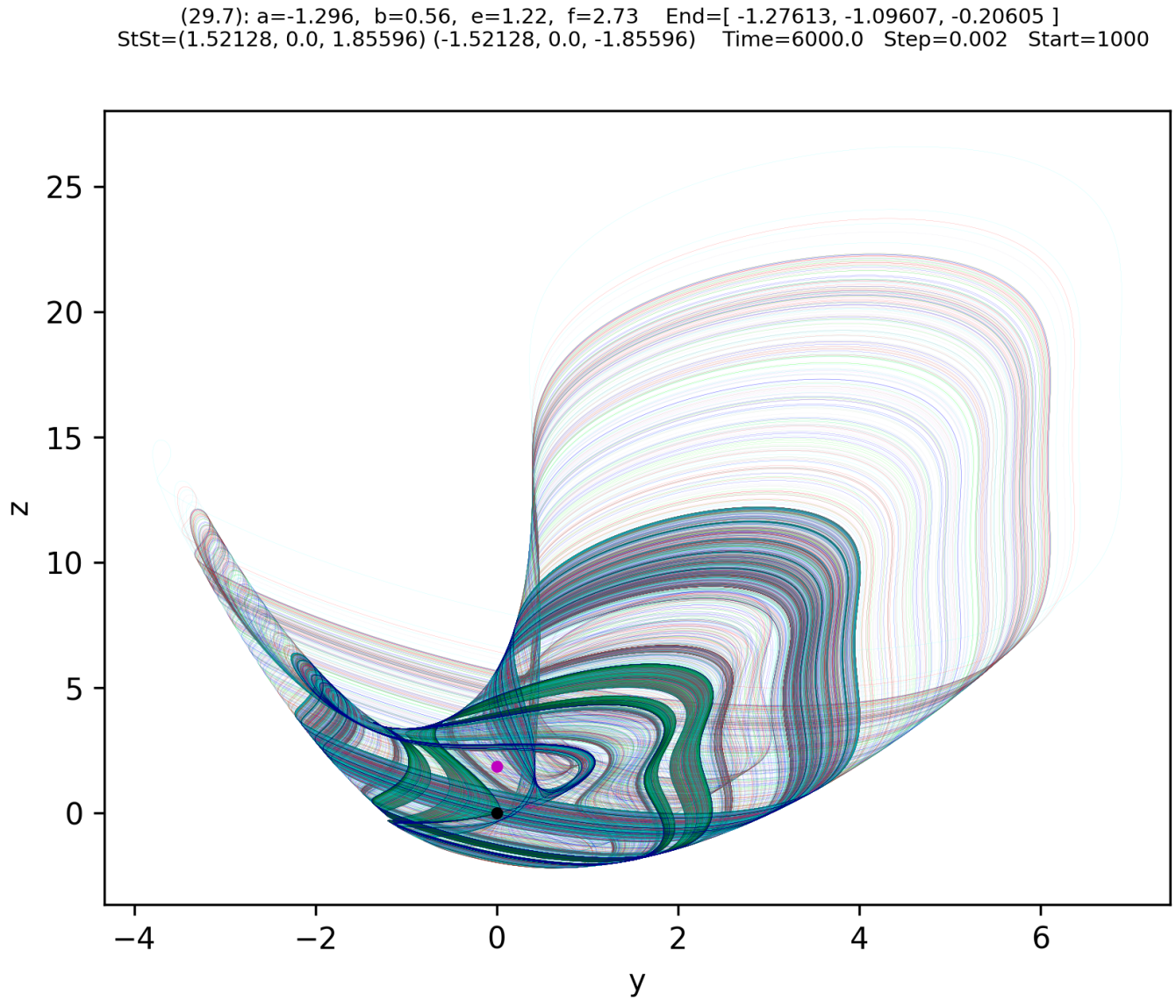
Legende: Chaos im **Beispiel 244**: $\lambda_1 = 0.152$ für $a = -0.395$, $b = -8.34$, $e = 1.19$, $f = 0.35$.



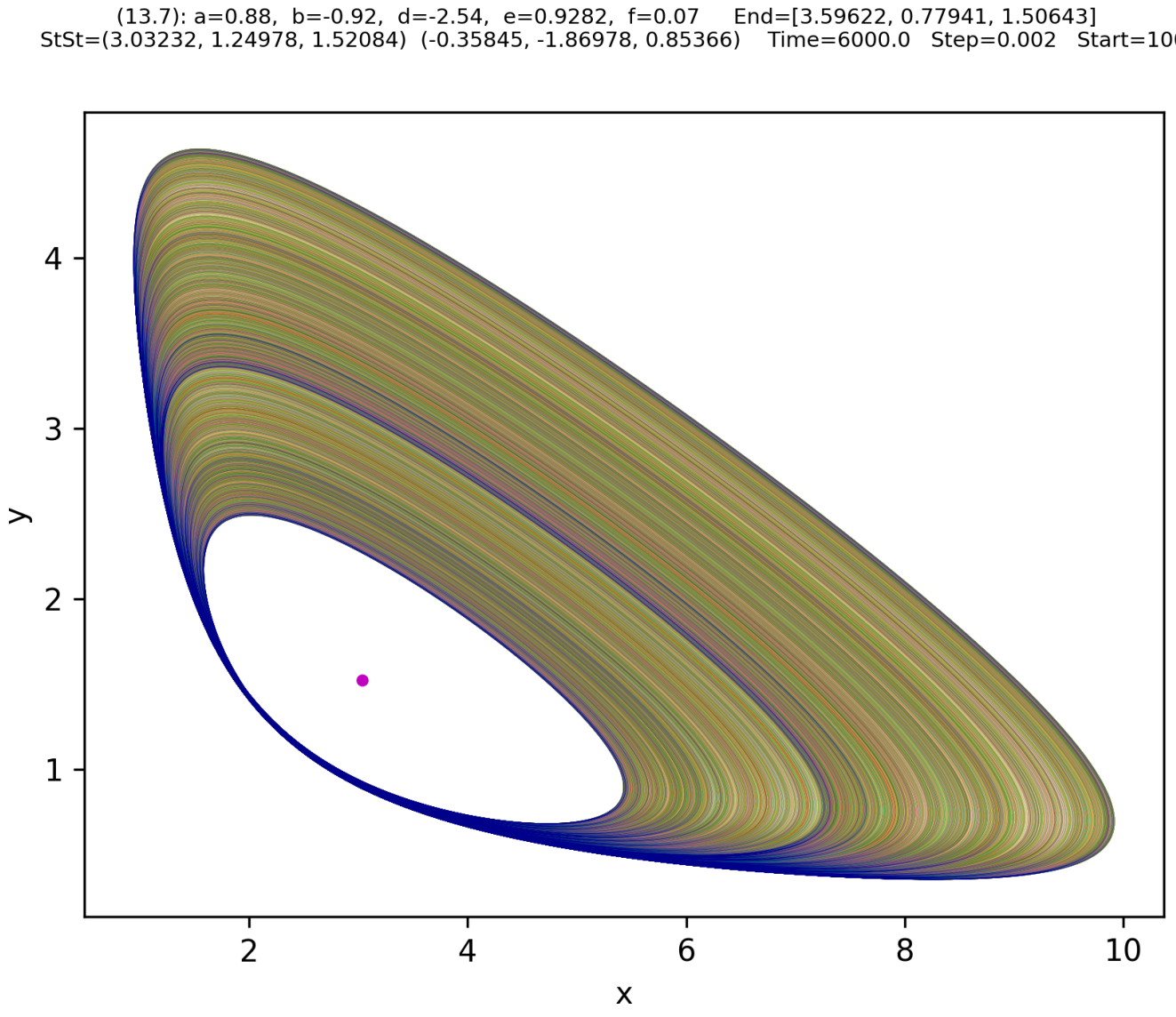
Legende: Chaos im **Beispiel 245**: $\lambda_1 = 0.079 \pm 0.03$ für $a = -0.72$, $b = -1.32$, $e = 3.46$, $f = 1.12$.



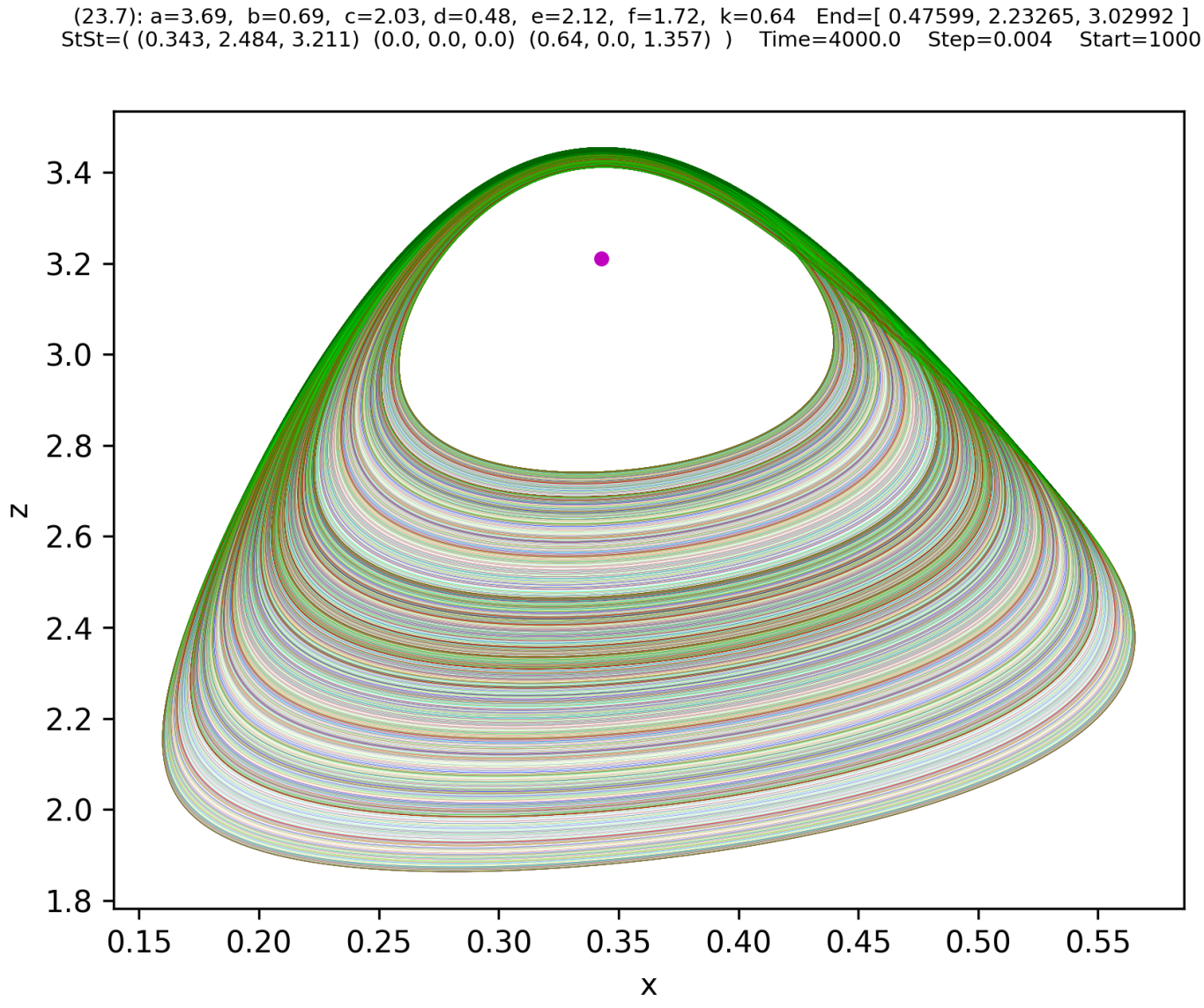
Legende: Chaos im **Beispiel 246**: $\lambda_1 = 0.071$ für $a = -1.296,\ b = 0.56,\ e = 1.22,\ f = 2.73.$



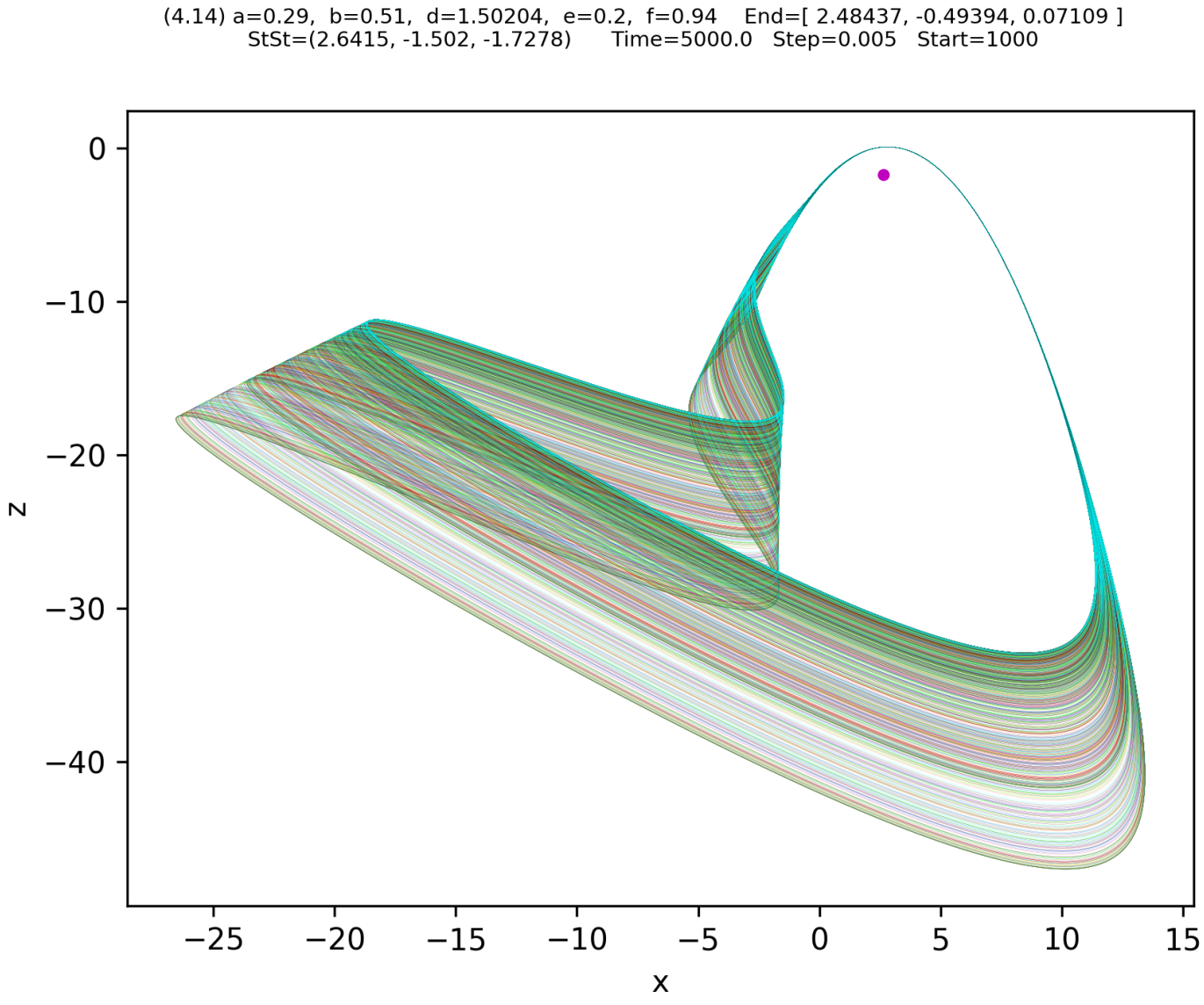
Legende: Chaos im **Beispiel 247**: $\lambda_1 = 0.099$ für
$a = 0.88,\ b = -0.92,\ d = -2.54,\ e = 0.9282,\ f = 0.07.$



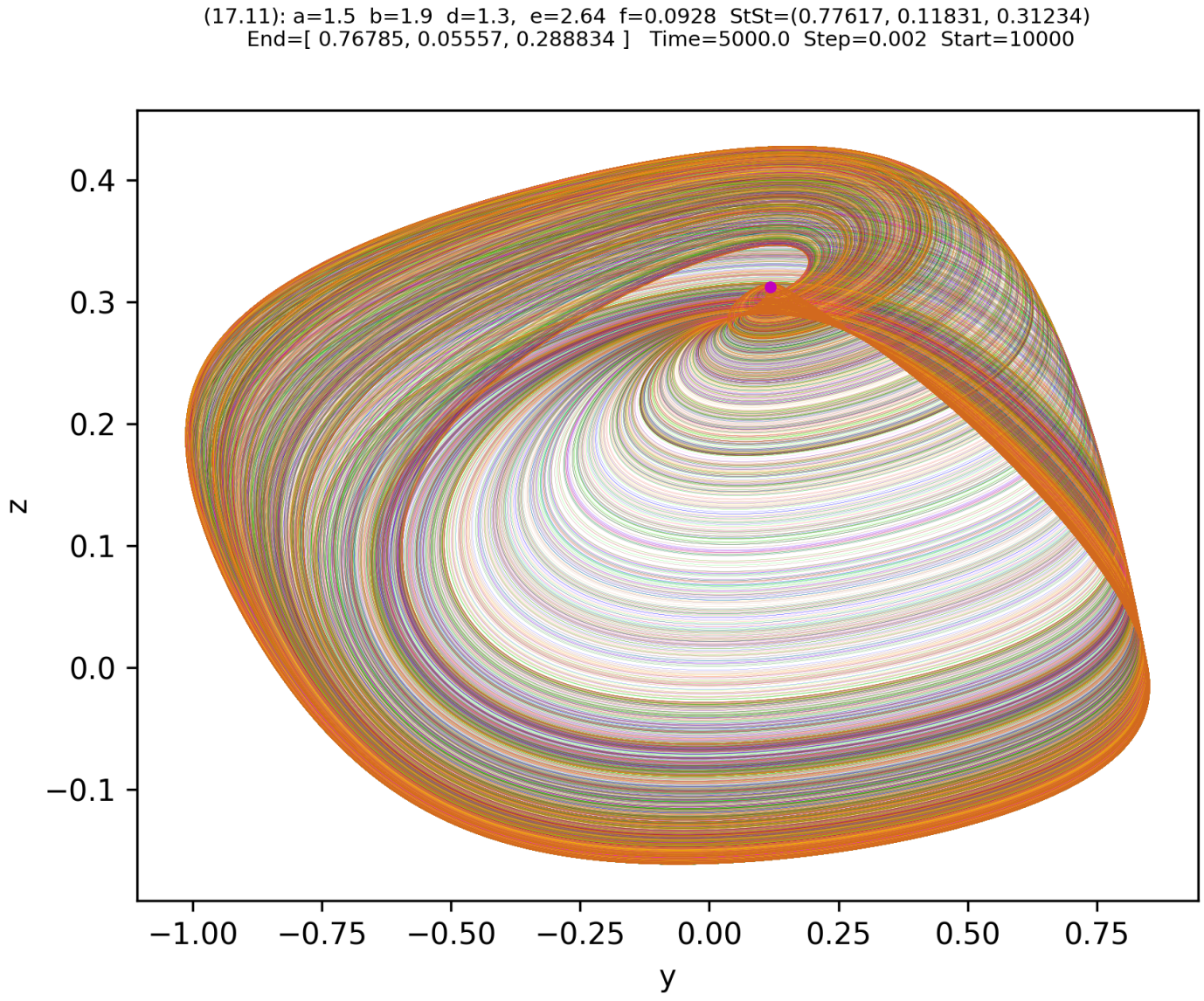
Legende: Chaos im **Beispiel 248**: $\lambda_1 = 0.053$ für
$a = 3.69,\ b = 0.69,\ c = 2.03,\ d = 0.48,\ e = 2.12,\ f = 1.72,\ k = 0.64$.



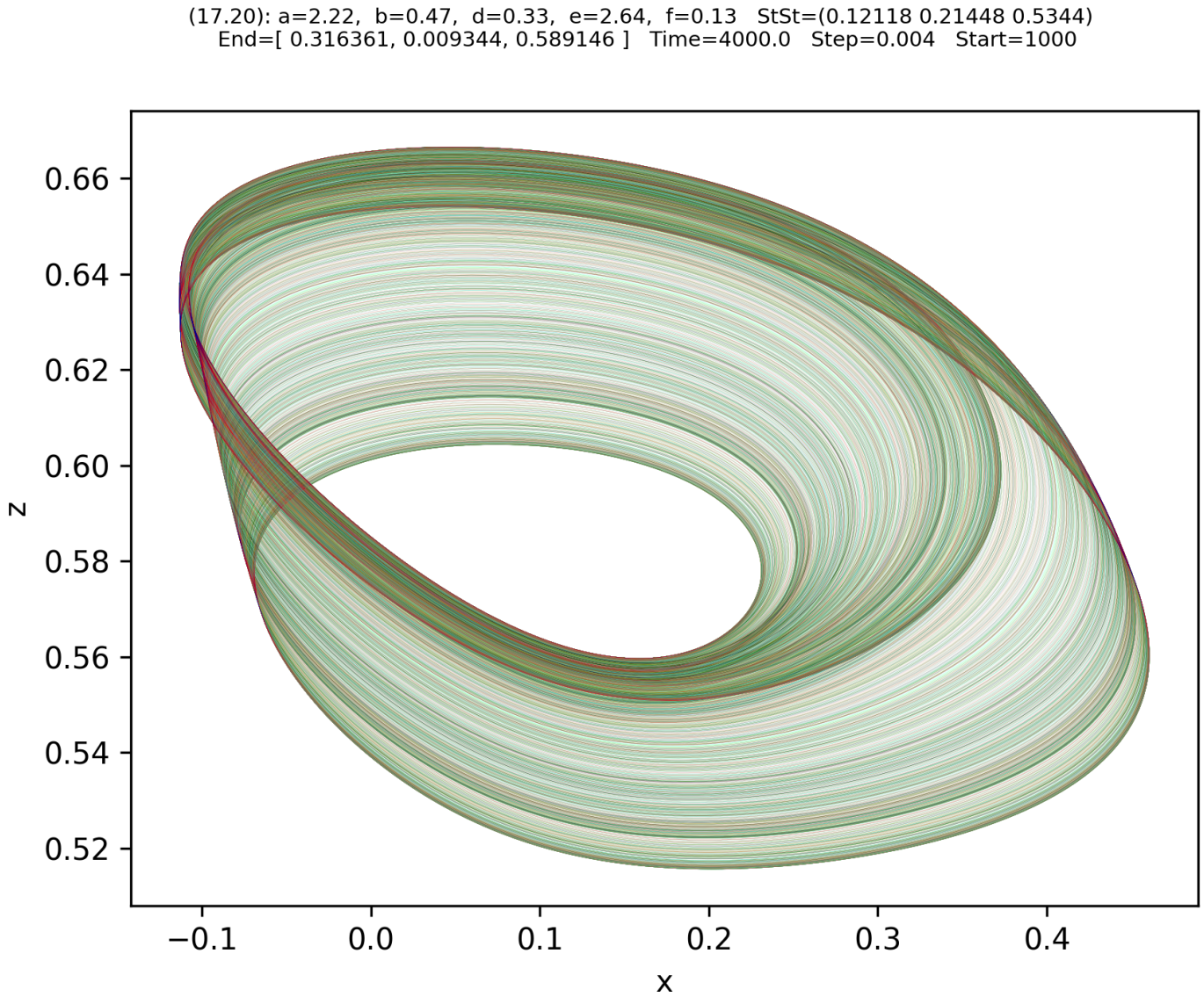
Legende: Chaos im **Beispiel 249**: $\lambda_1 = 0.020$
für: $a = 0.29,\ b = 0.51, d = 1.50204,\ e = 0.2$ und $f = 0.94$.



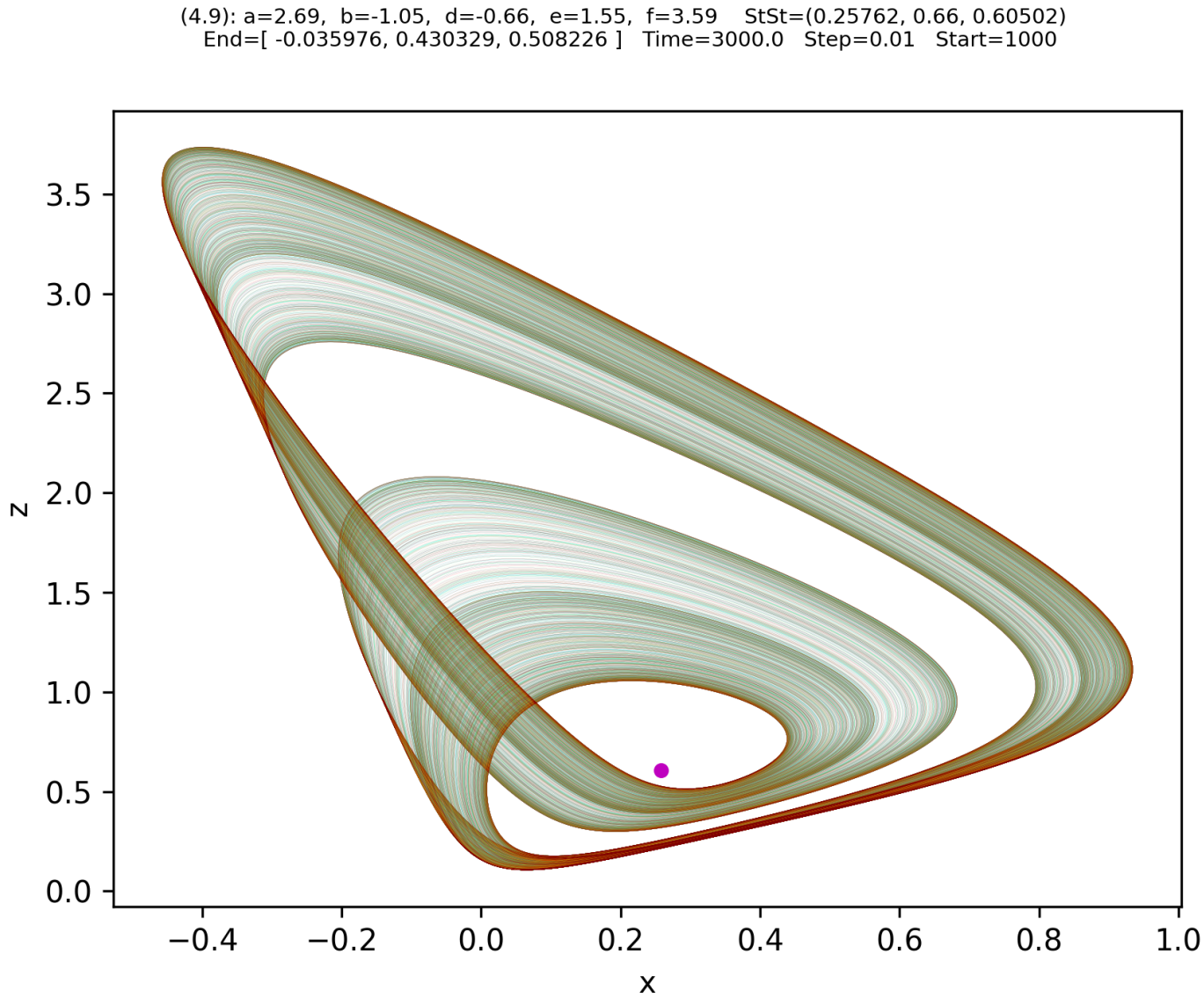
Legende: Chaos im **Beispiel 250**: $\lambda_1 = 0.051$
für: $a = 1.5,\ b = 1.9, d = 1.3,\ e = 2.64$ und $f = 0.0928$.



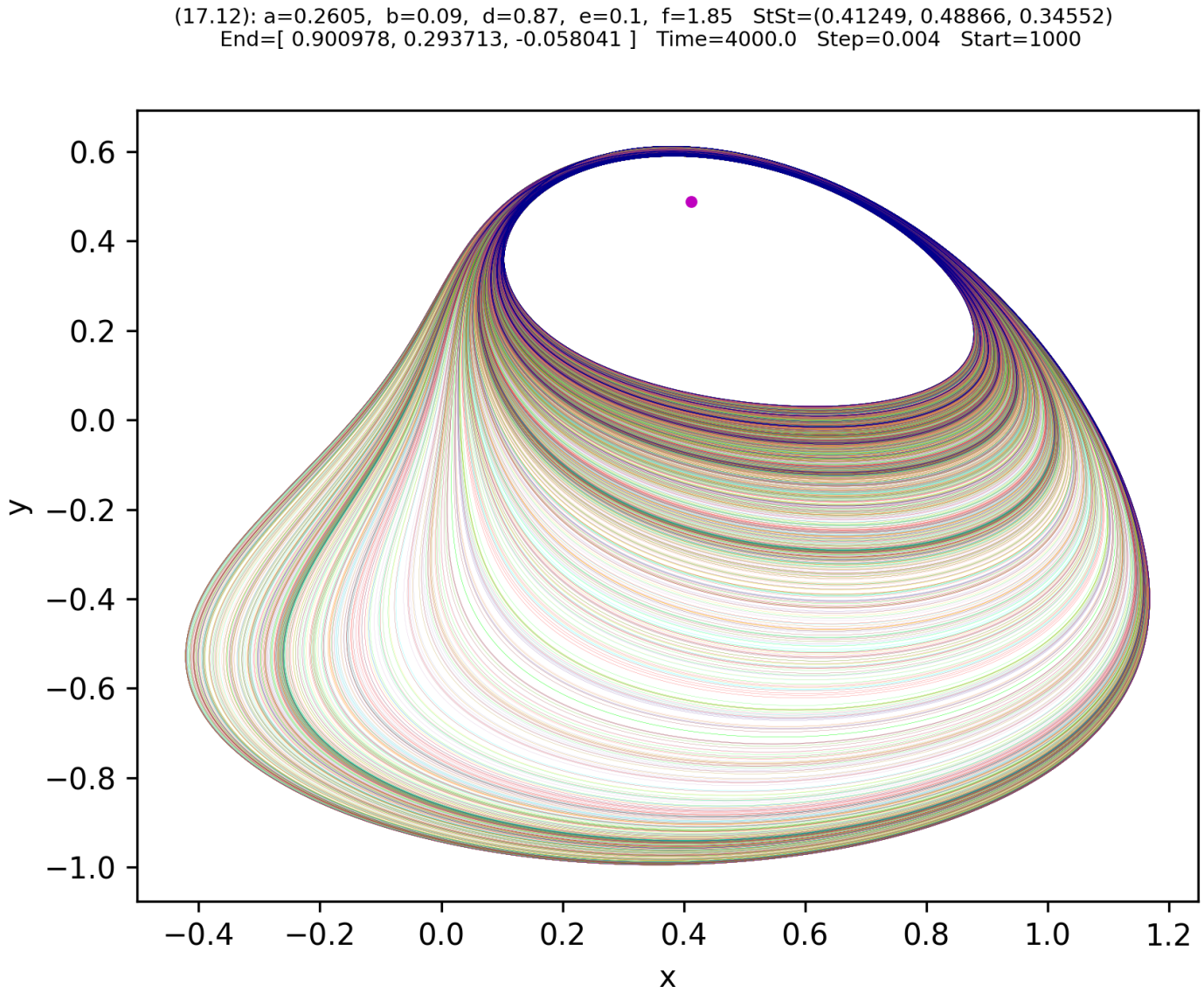
Legende: Chaos im **Beispiel 251**: $\lambda_1 = 0.057$
für: $a = 2.22,\ b = 0.47, d = 0.33,\ e = 2.64$ und $f = 0.13$.



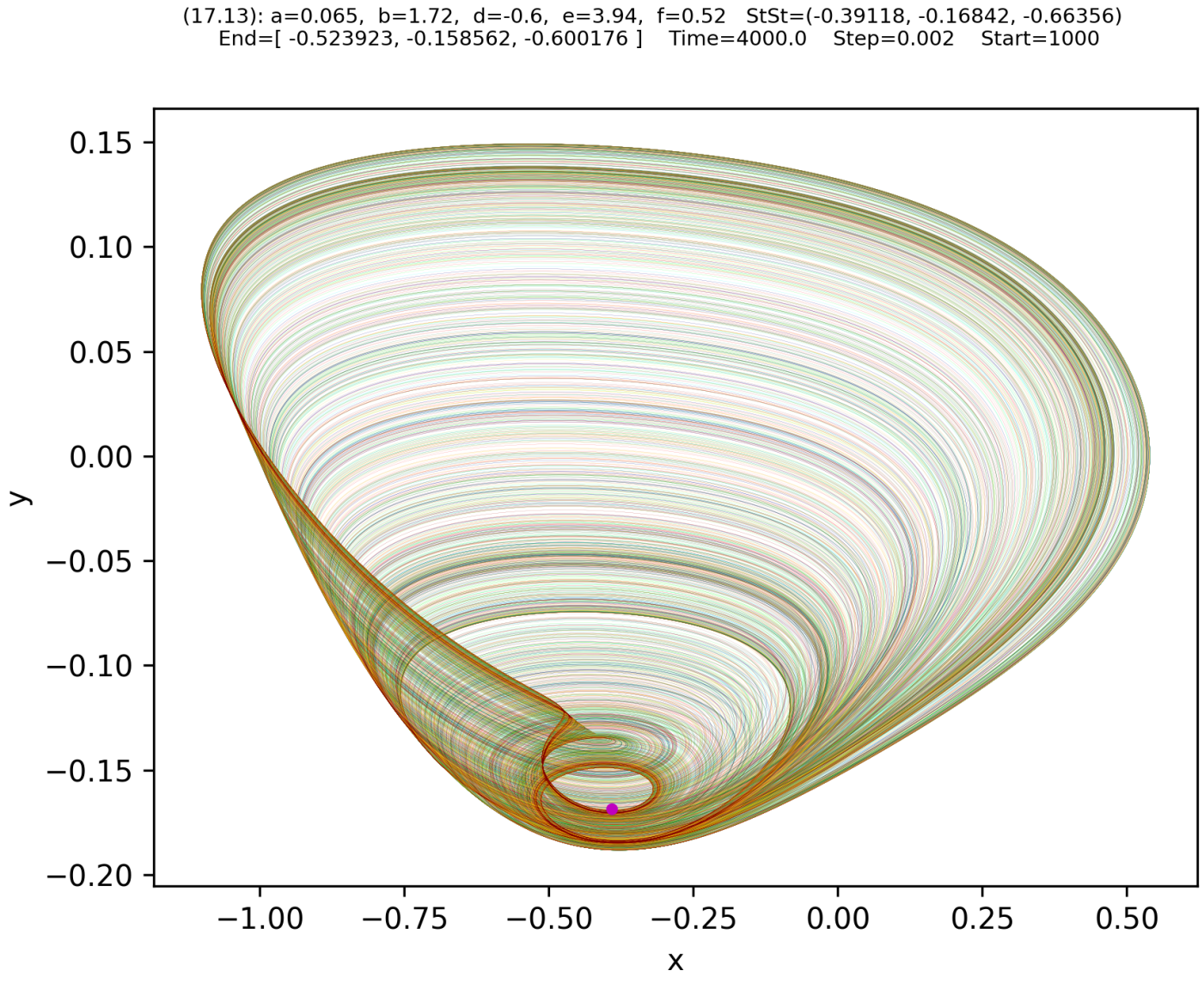
Legende: Chaos im **Beispiel 252**: $\lambda_1 = 0.049$
für: $a = 2.69,\ b = -1.05, d = -0.66,\ e = 1.55$ und $f = 3.59$.



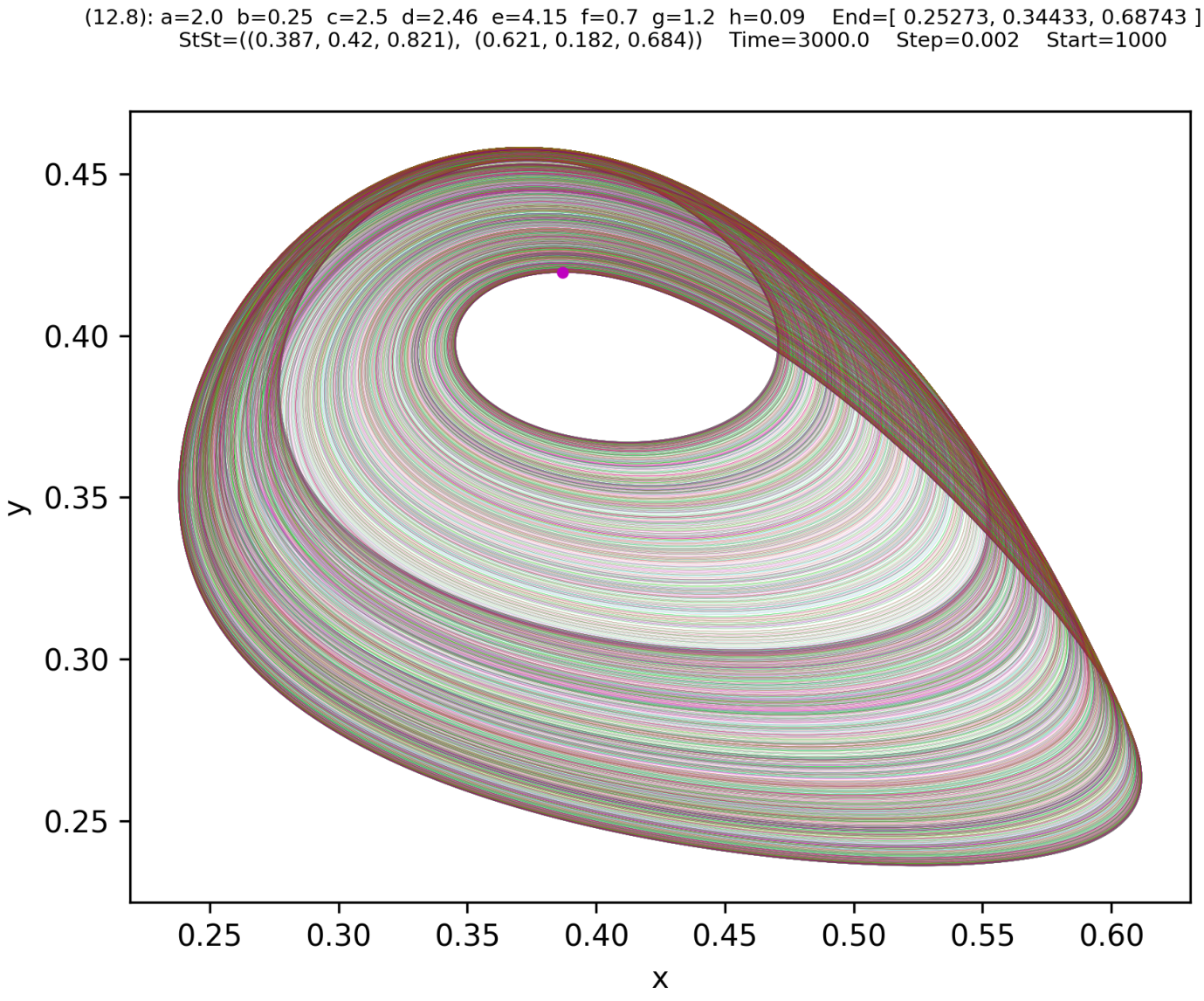
Legende: Chaos im **Beispiel 253**: $\lambda_1 = 0.020$
für: $a = 0.2605,\ b = 0.09, d = 0.87,\ e = 0.1$ und $f = 1.85$.



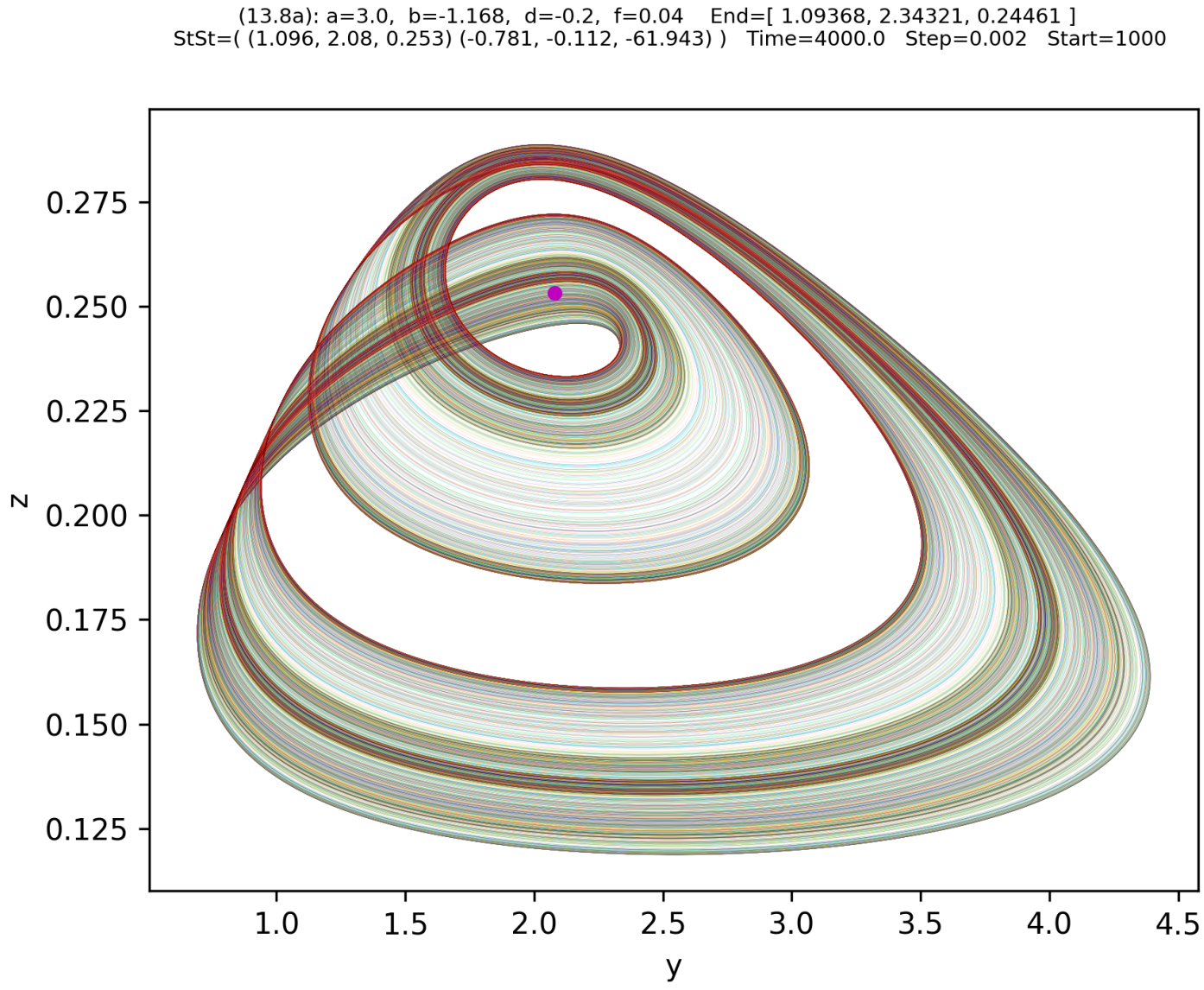
Legende: Chaos im **Beispiel 254**: $\lambda_1 = 0.038$
für: $a = 0.065,\ b = 1.72, d = -0.6,\ e = 3.94$ und $f = 0.52$.



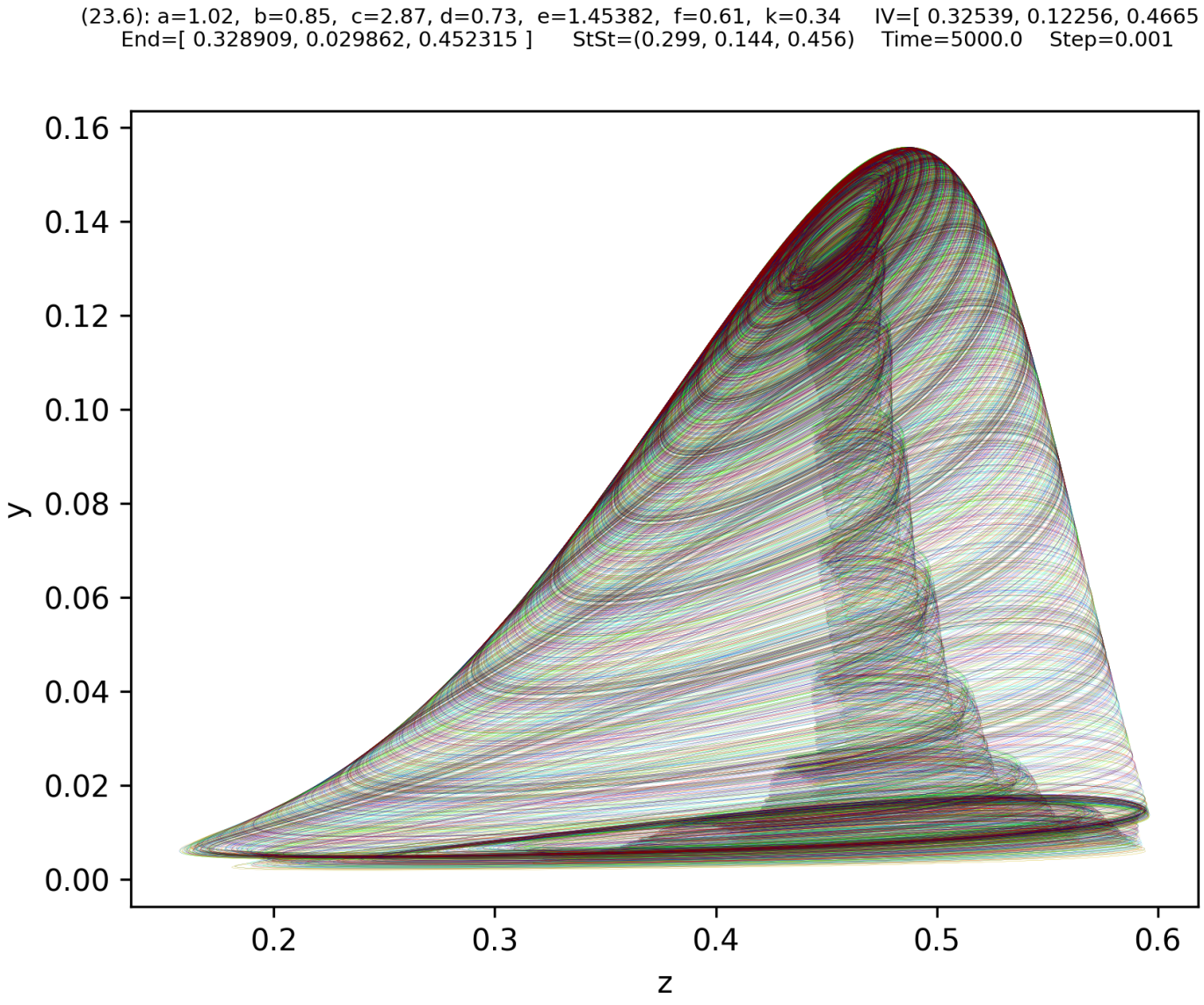
Legende: Chaos im **Beispiel 255**: $\lambda_1 = 0.038$ für:
$a = 2.0,\ b = 0.25, c = 2.5,\ d = 2.46,\ e = 4.15,\ f = 0.7,\ g = 1.2$ und $h = 0.09$.



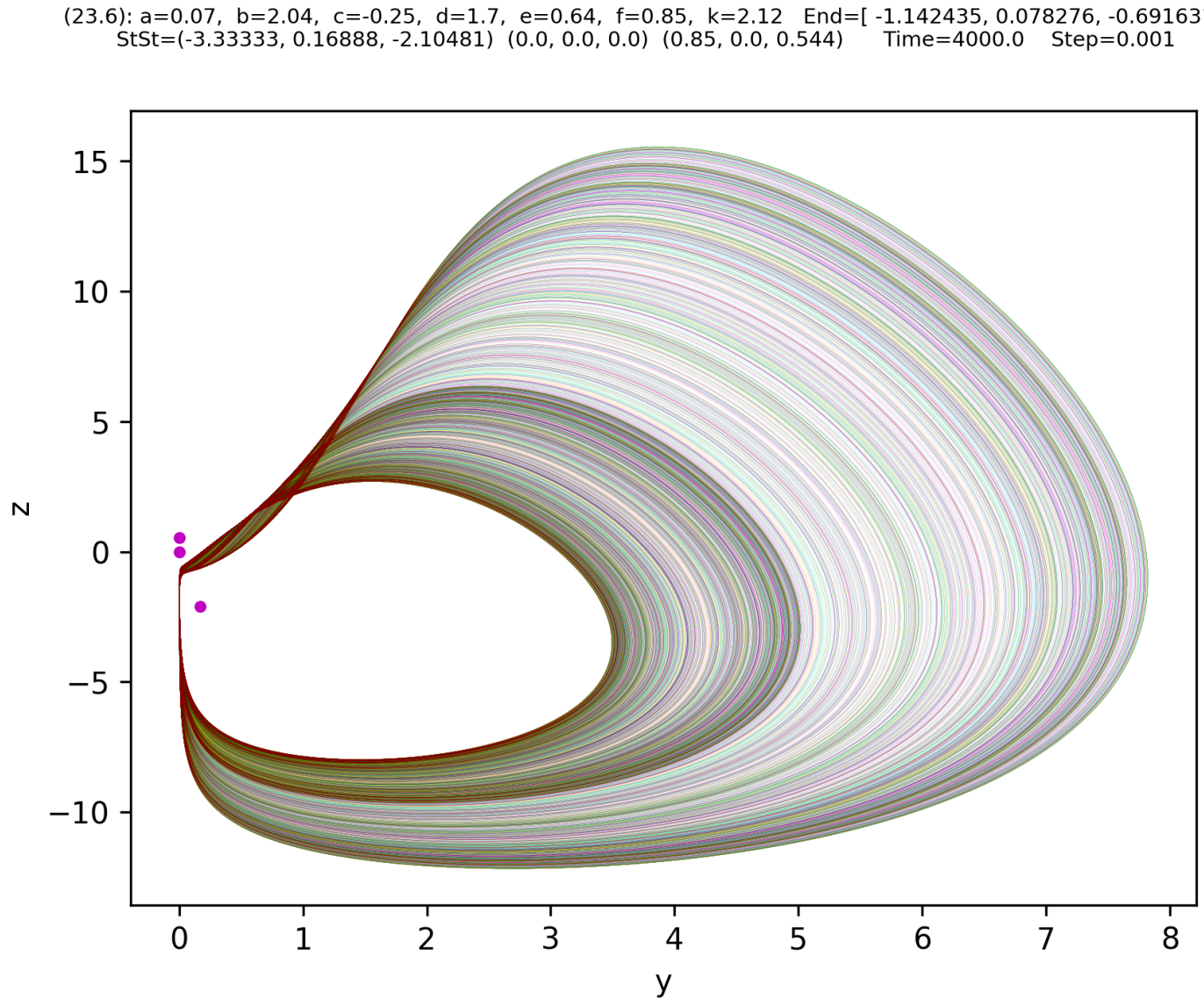
Legende: Chaos im **Beispiel 256**: $\lambda_1 = 0.028$
für: $a = 3.0$, $b = -1.168$, $d = -0.2$ und $f = 0.04$.



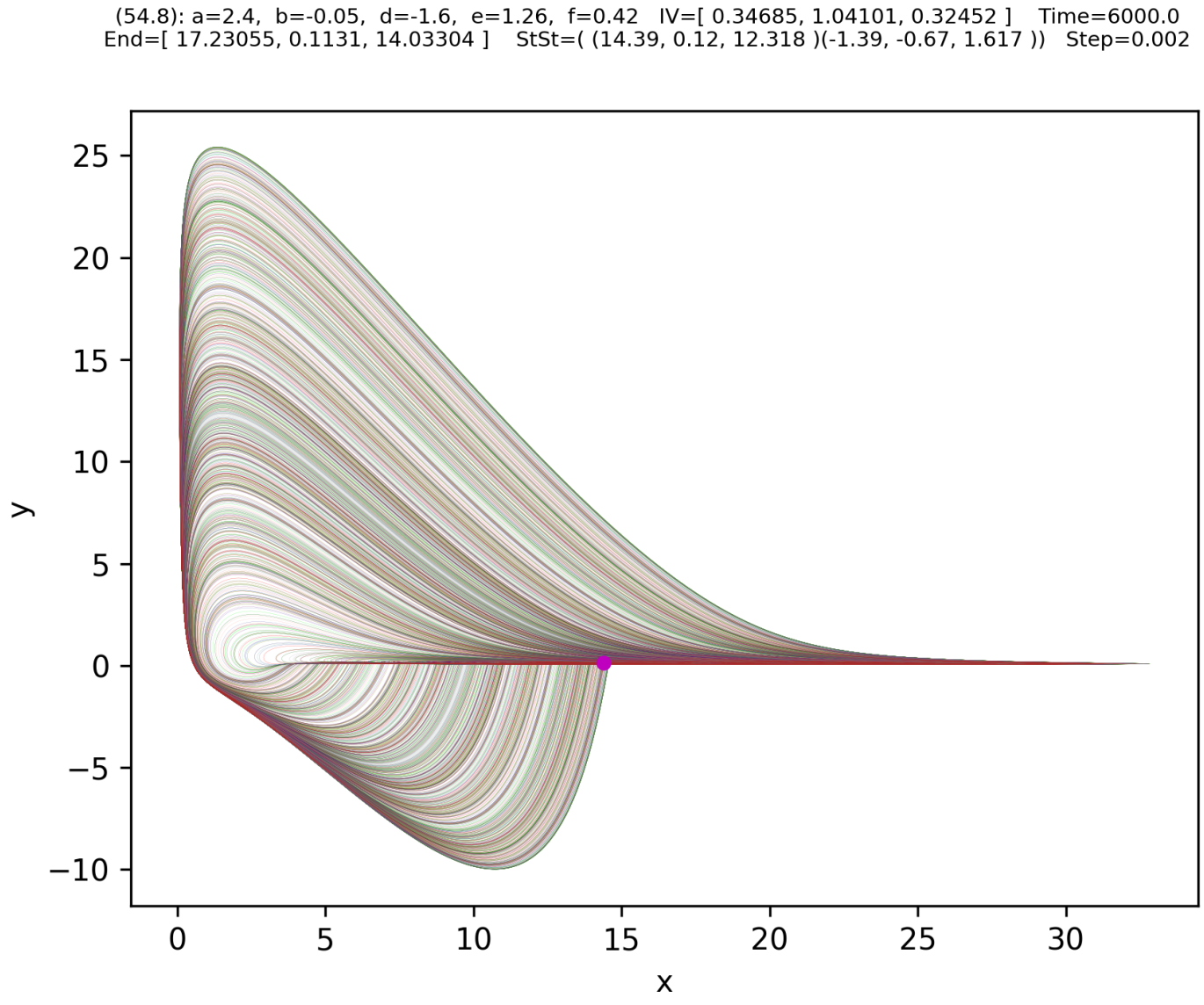
Legende: Chaos im **Beispiel 257a**: $\lambda_1 = 0.011$ für
$a = 1.02,\ b = 0.85,\ c = 2.87,\ d = 0.73,\ e = 1.45382,\ f = 0.61,\ k = 0.34$.



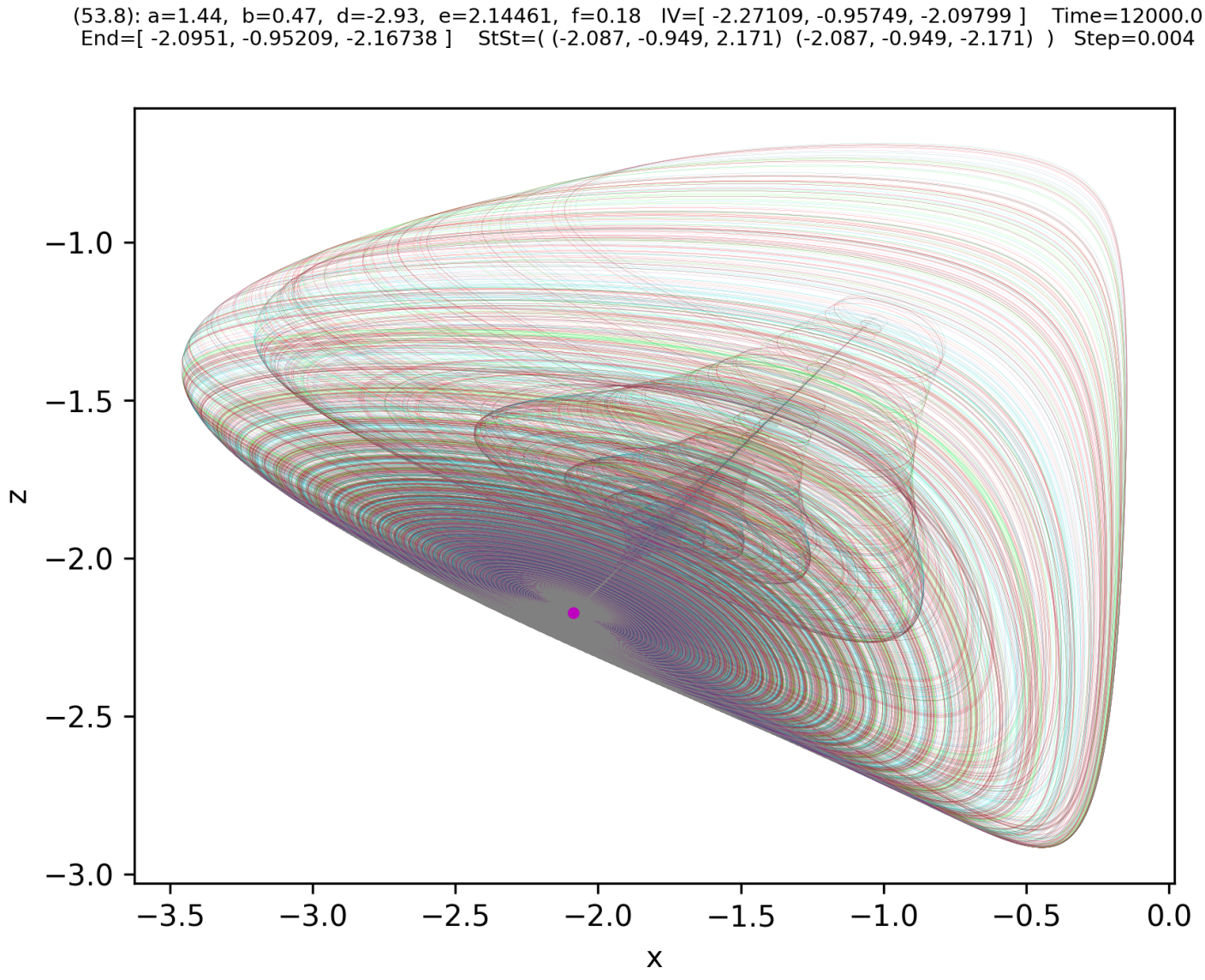
Legende: Chaos im **Beispiel 257b**: $\lambda_1 = 0.039$ für
$a = 0.07,\ b = 2.04,\ c = -0.25,\ d = 1.7,\ e = 0.64,\ f = 2.12,\ k = 0.85$.



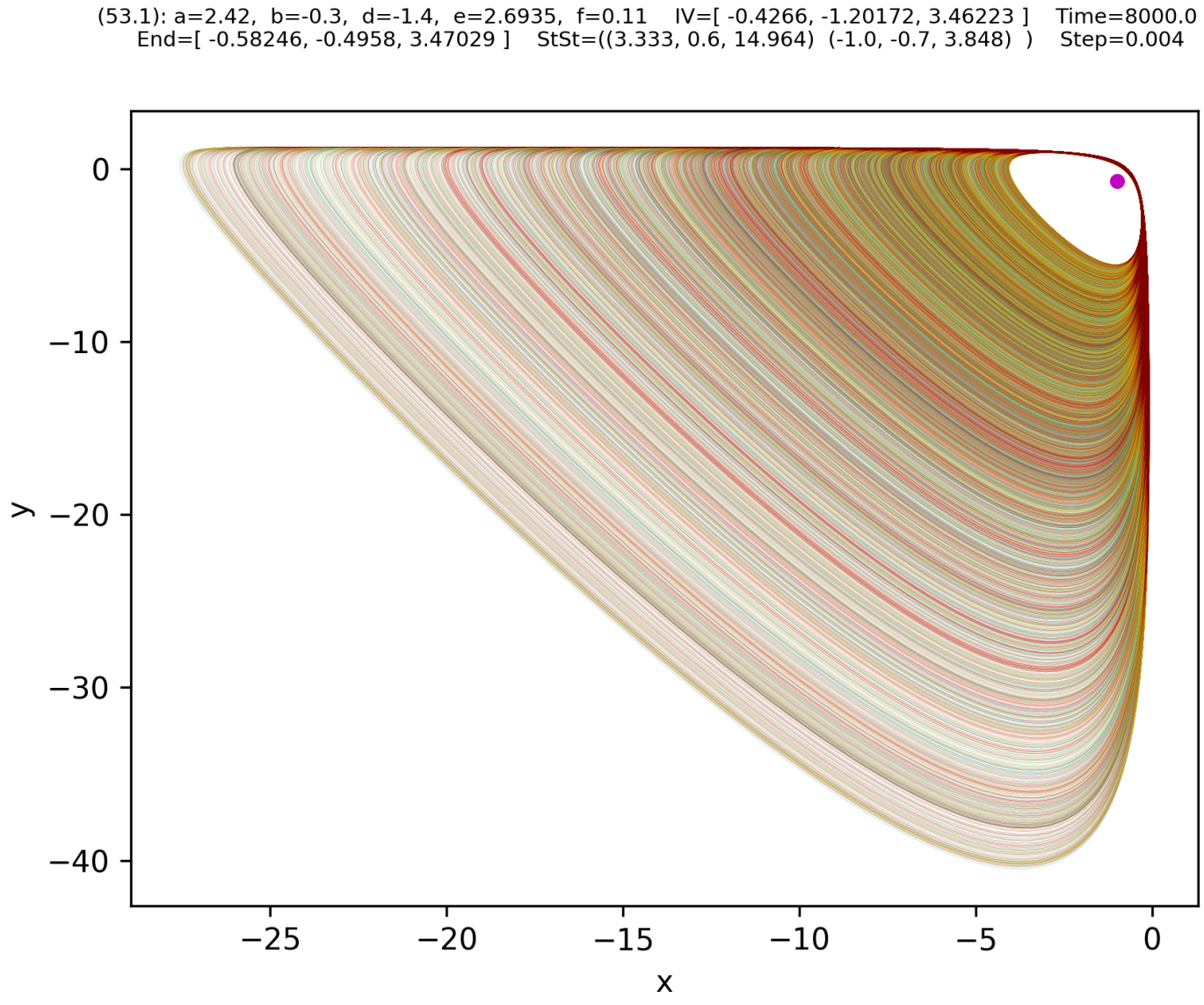
Legende: Chaos im **Beispiel 258**: $\lambda_1 = 0.012$ für
$a = 2.4$, $b = -0.05$, $d = -1.6$, $e = 1.26$, $f = 0.42$.



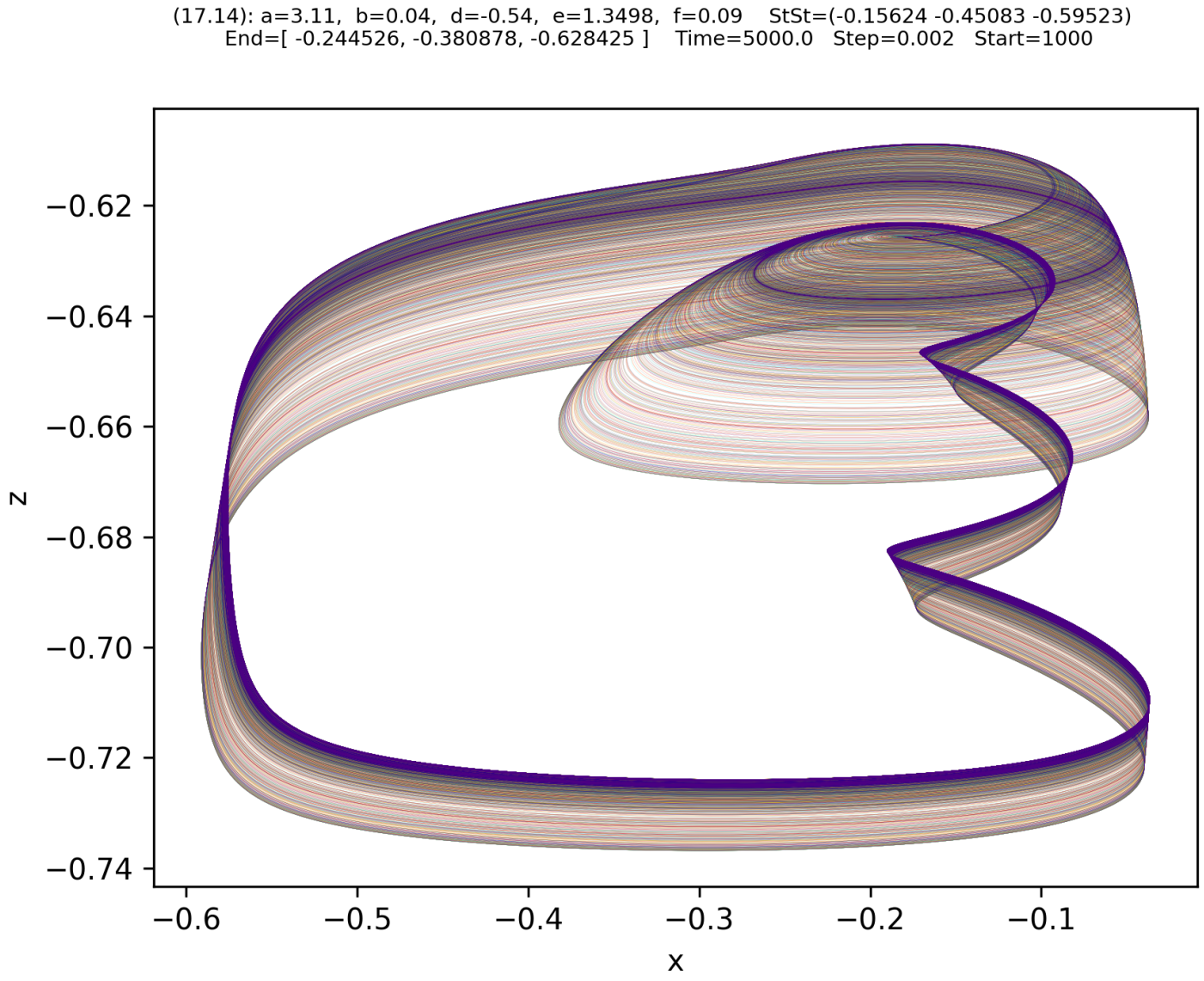
Legende: Chaos im **Beispiel 259**: $\lambda_1 = 0.016$ für
$a = 1.44,\ b = 0.47,\ d = -2.93,\ e = 2.14461,\ f = 0.18$.



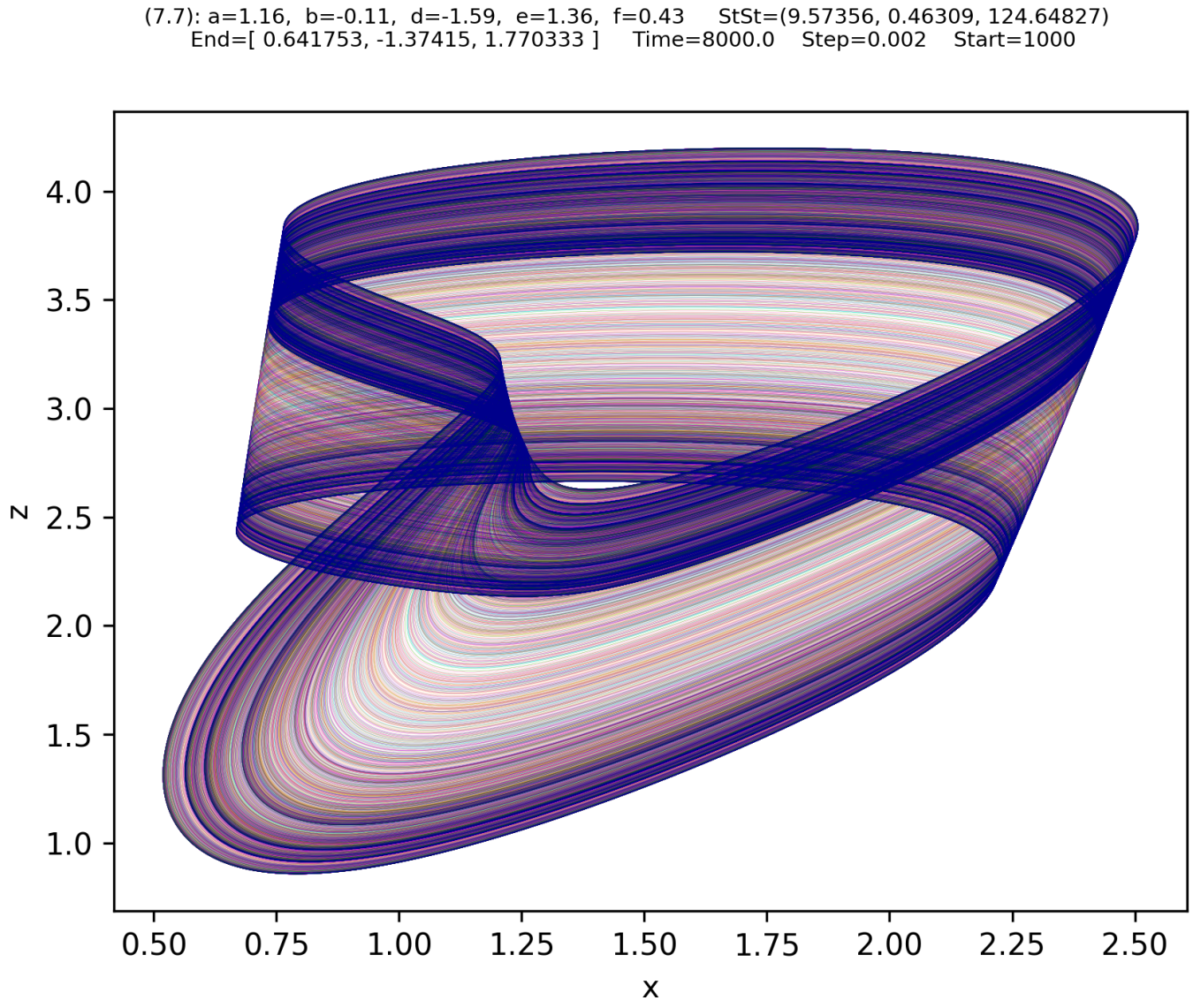
Legende: Chaos im **Beispiel 260**: $\lambda_1 = 0.136$ für
$a = 2.42$, $b = -0.3$, $d = -1.4$, $e = 2.6935$, $f = 0.11$.



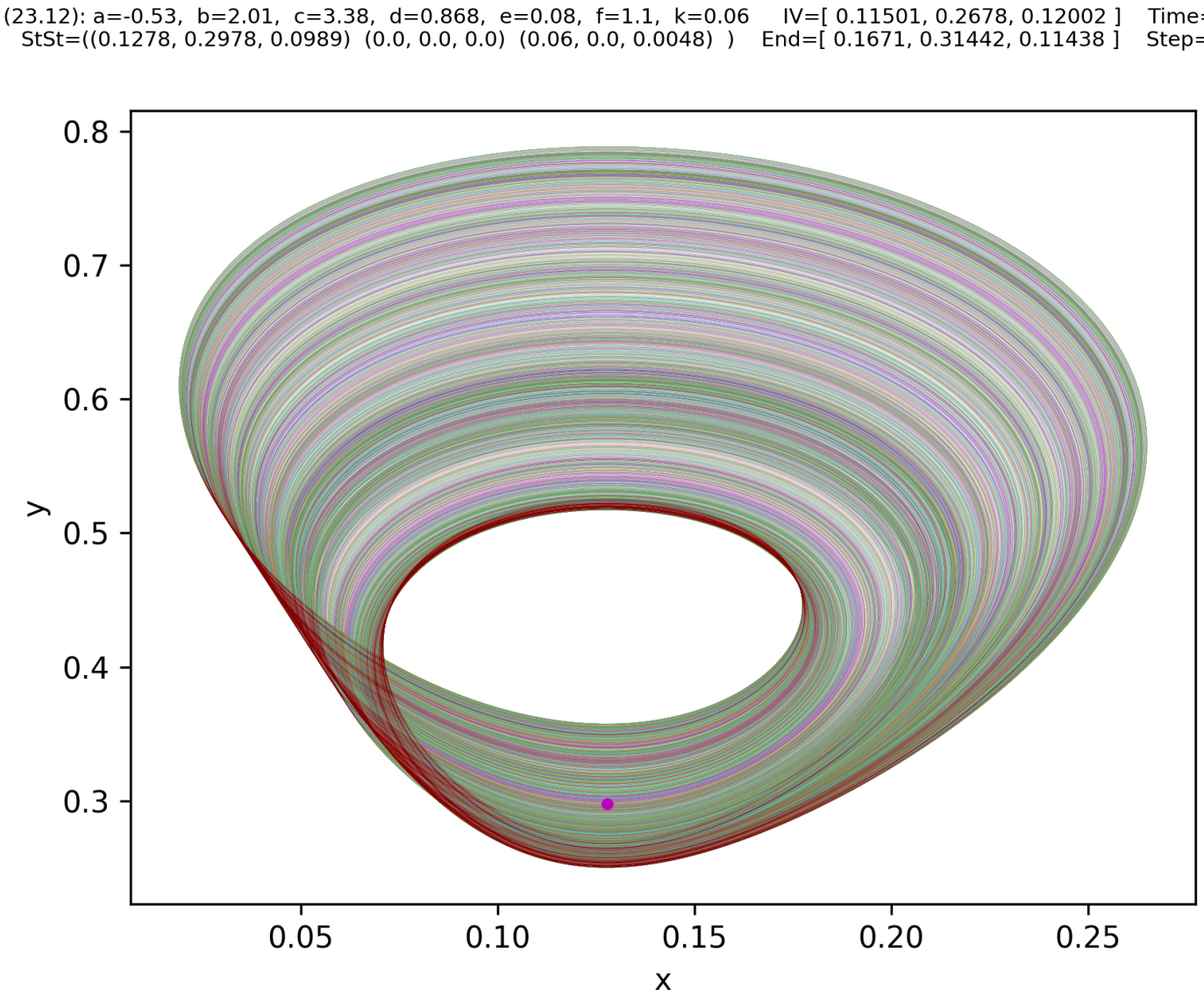
Legende: Chaos im **Beispiel 261**: $\lambda_1 = 0.022$ für
$a = 3.11,\ b = 0.04,\ d = -0.54,\ e = 1.3498,\ f = 0.09$.



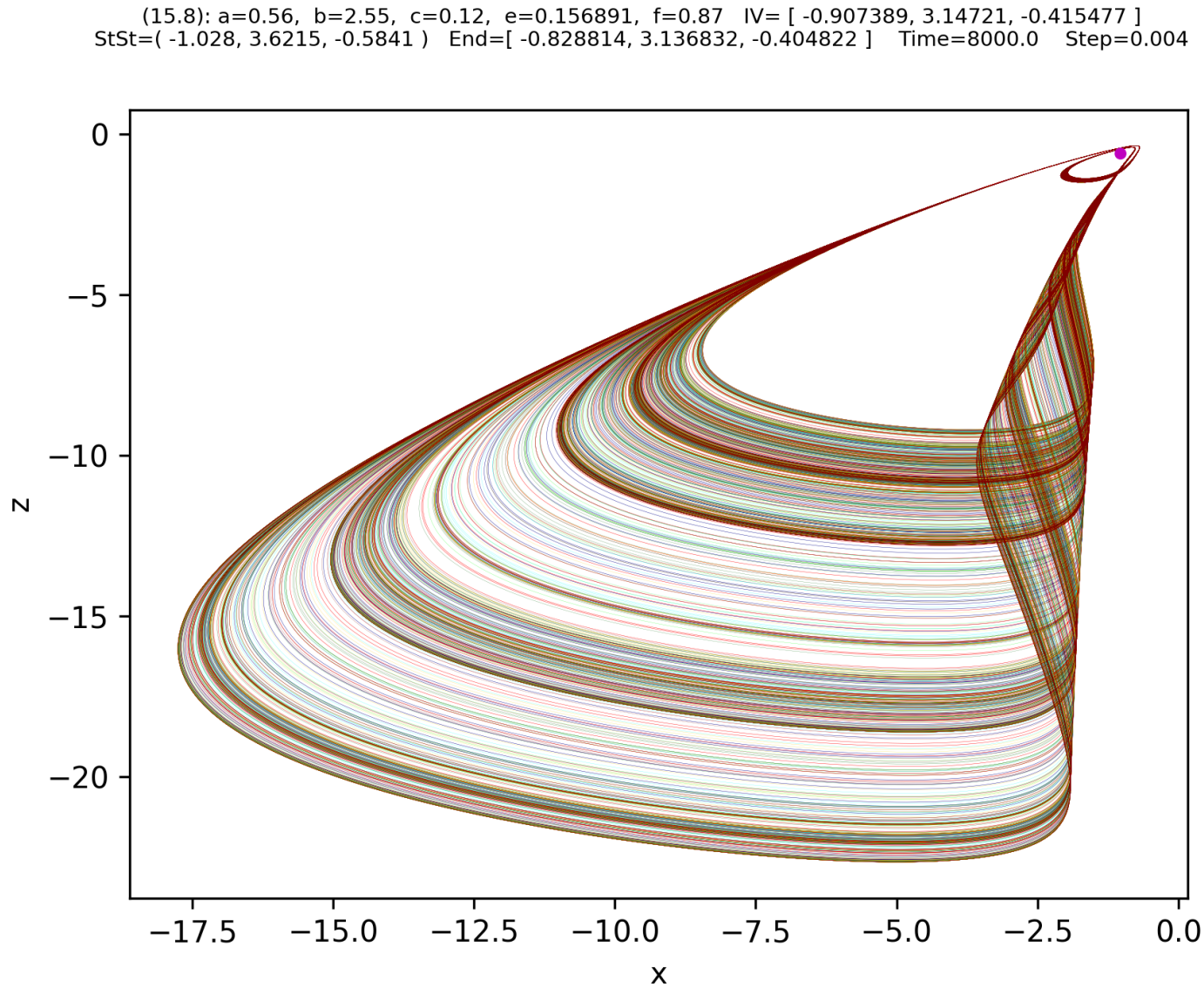
Legende: Chaos im **Beispiel 262**: $\lambda_1 = 0.050$ für
$a = 1.16$, $b = -0.011$, $d = -1.59$, $e = 1.36$, $f = 0.43$.



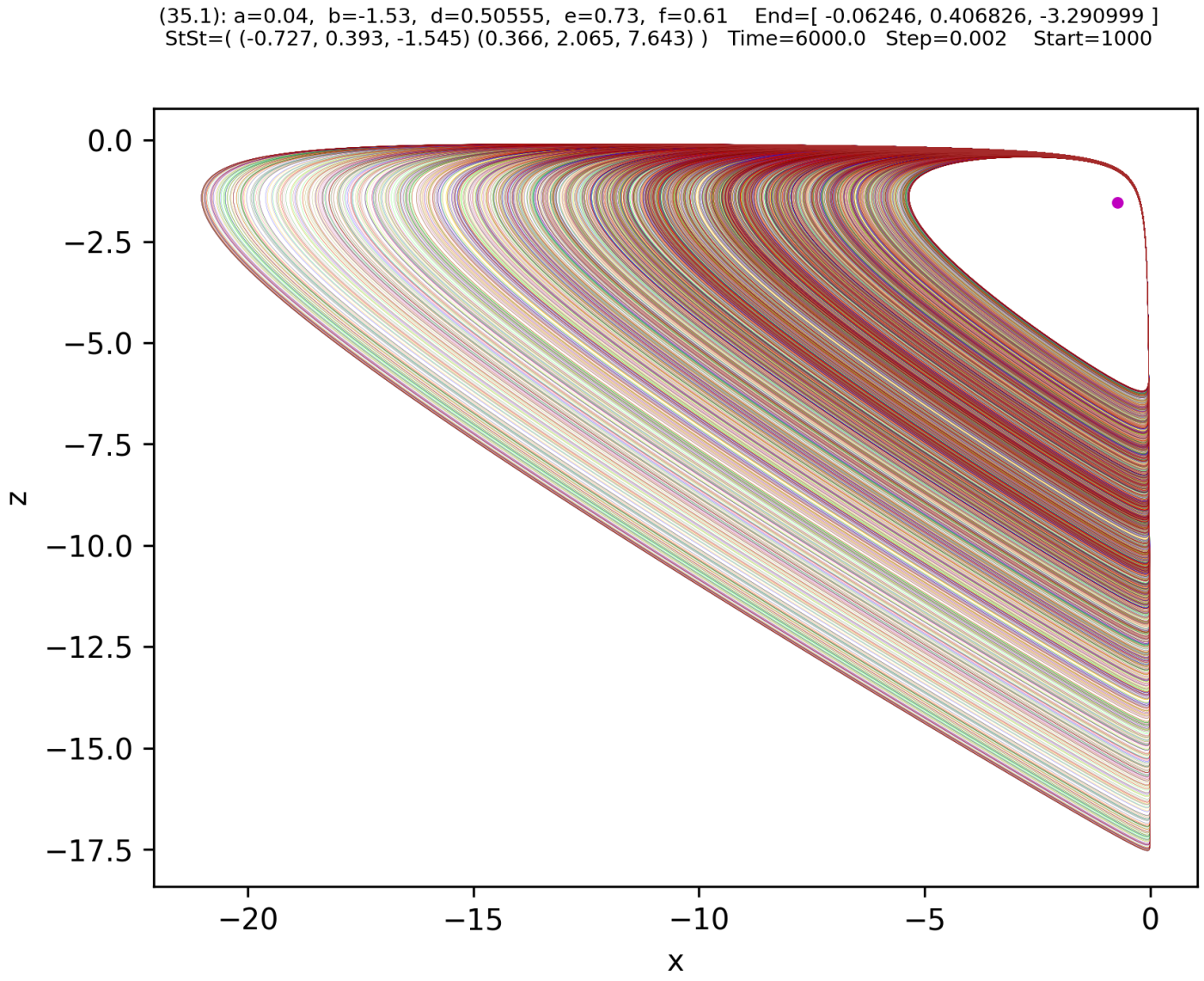
Legende: Chaos im **Beispiel 263**: $\lambda_1 = 0.078$ für
$a = -0.53,\ b = 2.01,\ c = 3.38,\ d = 0.868,\ e = 0.08,\ f = 1.1,\ k = 0.06$.



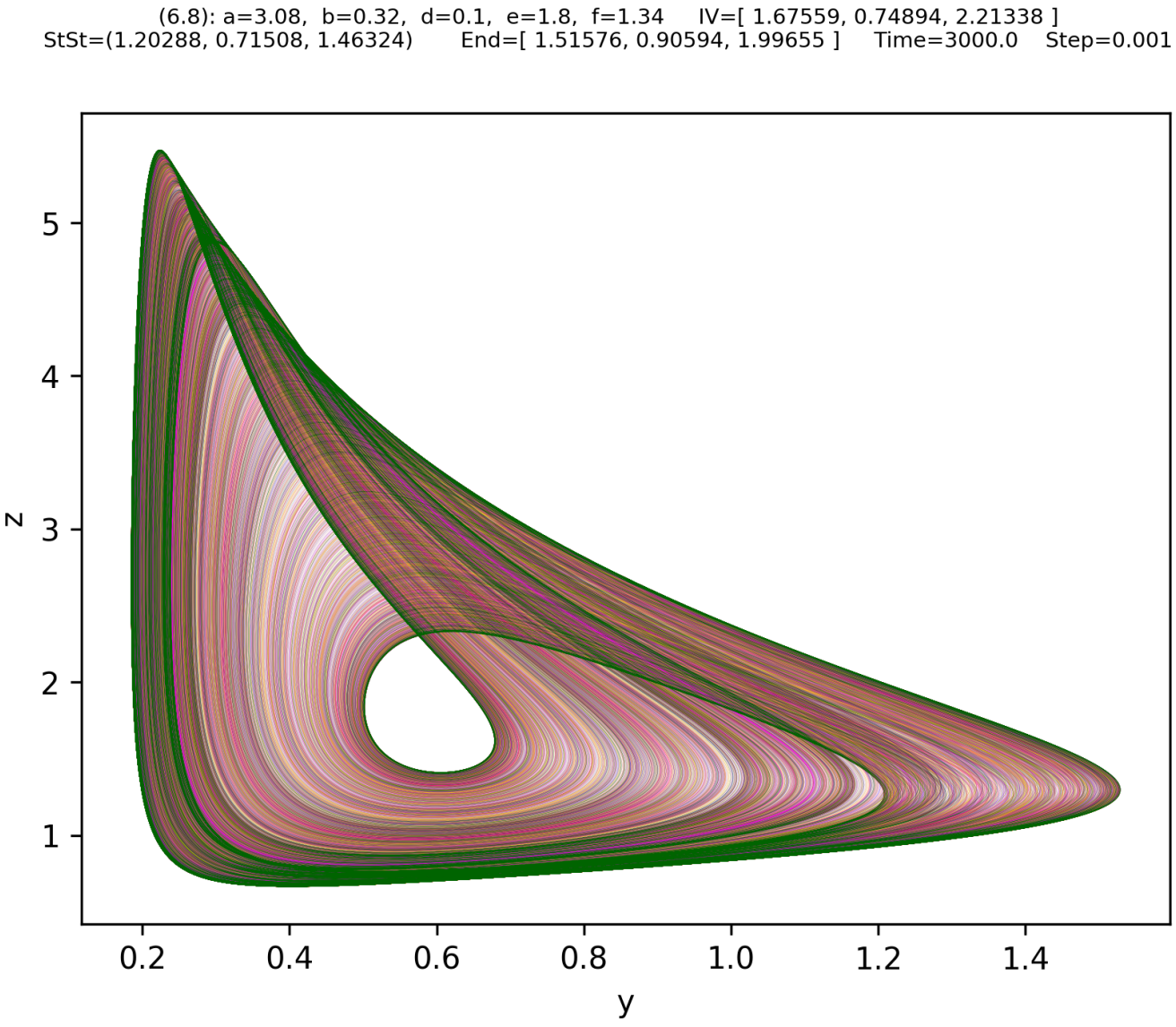
Legende: Chaos im **Beispiel 264**: $\lambda_1 = 0.009$ für
$a = 1.56$, $b = 2.55$, $c = 0.12$, $e = 0.156891$, $f = 0.87$.



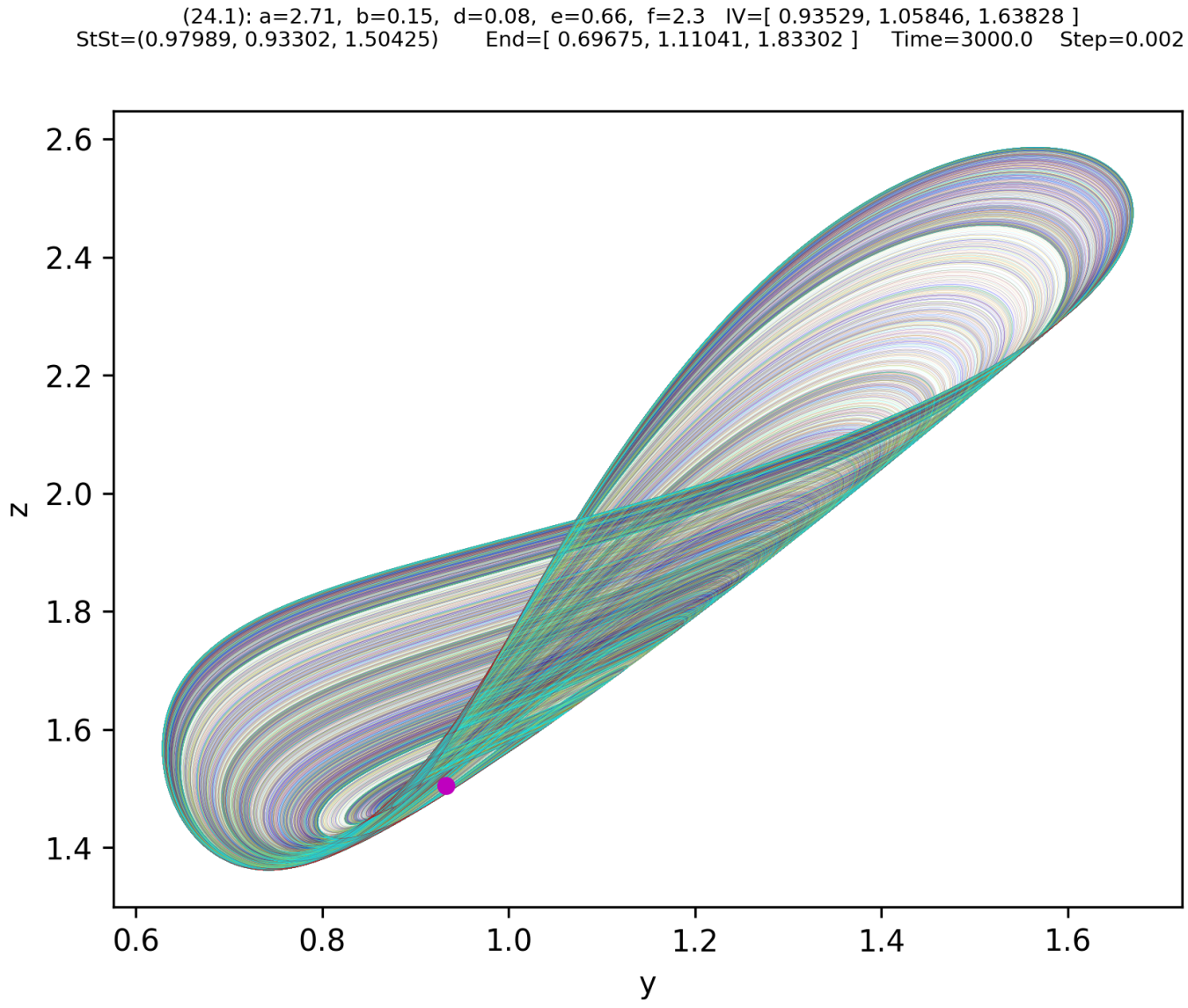
Legende: Chaos im **Beispiel 265**: $\lambda_1 = 0.021$ für
$a = 0.04,\ b = -1.53,\ d = 0.50555,\ e = 0.73,\ f = 0.61$.



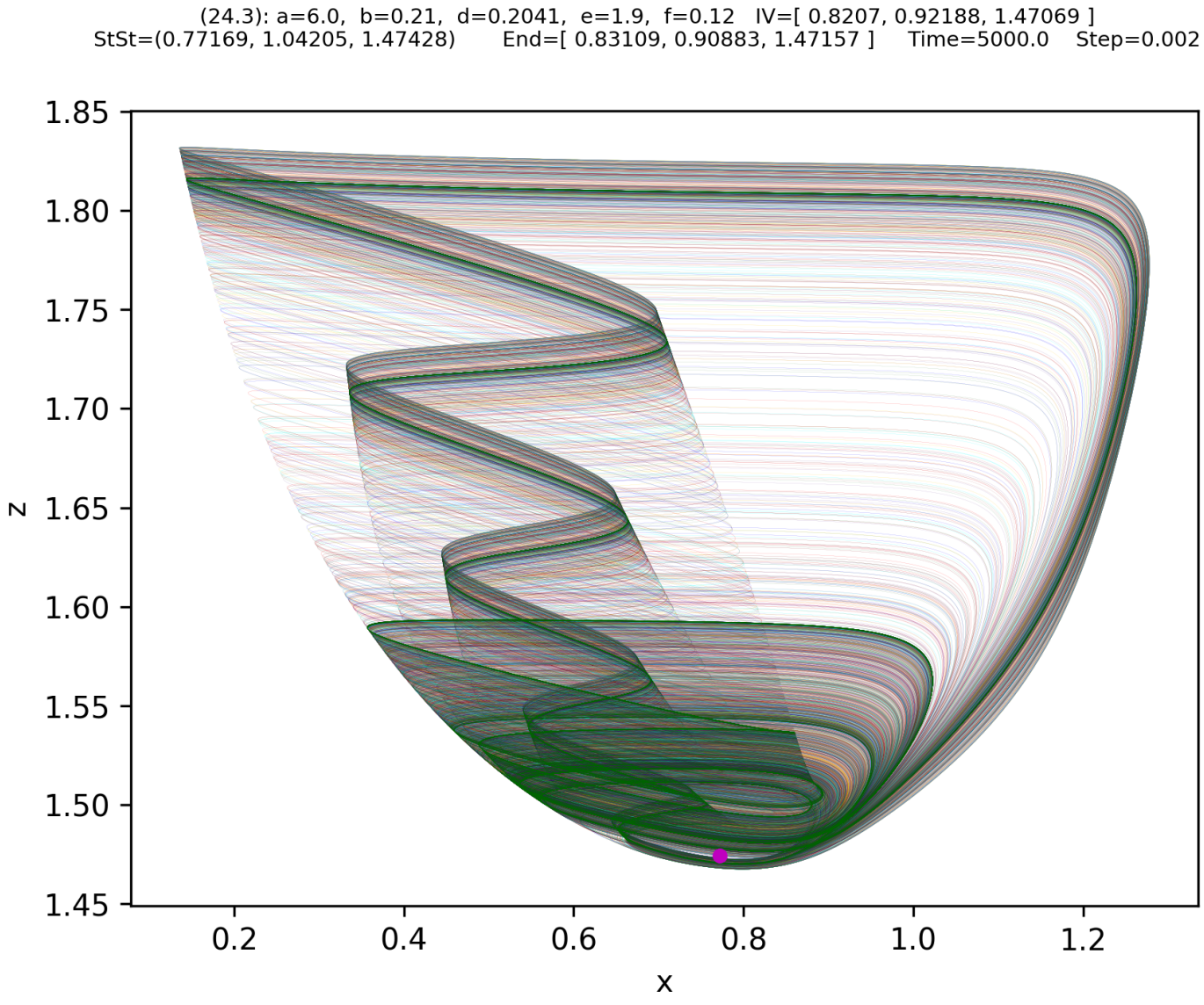
Legende: Chaos im **Beispiel 266**: $\lambda_1 = 0.139$ für
$a = 3.08$, $b = 0.32$, $d = 0.1$, $e = 1.8$, $f = 1.34$.



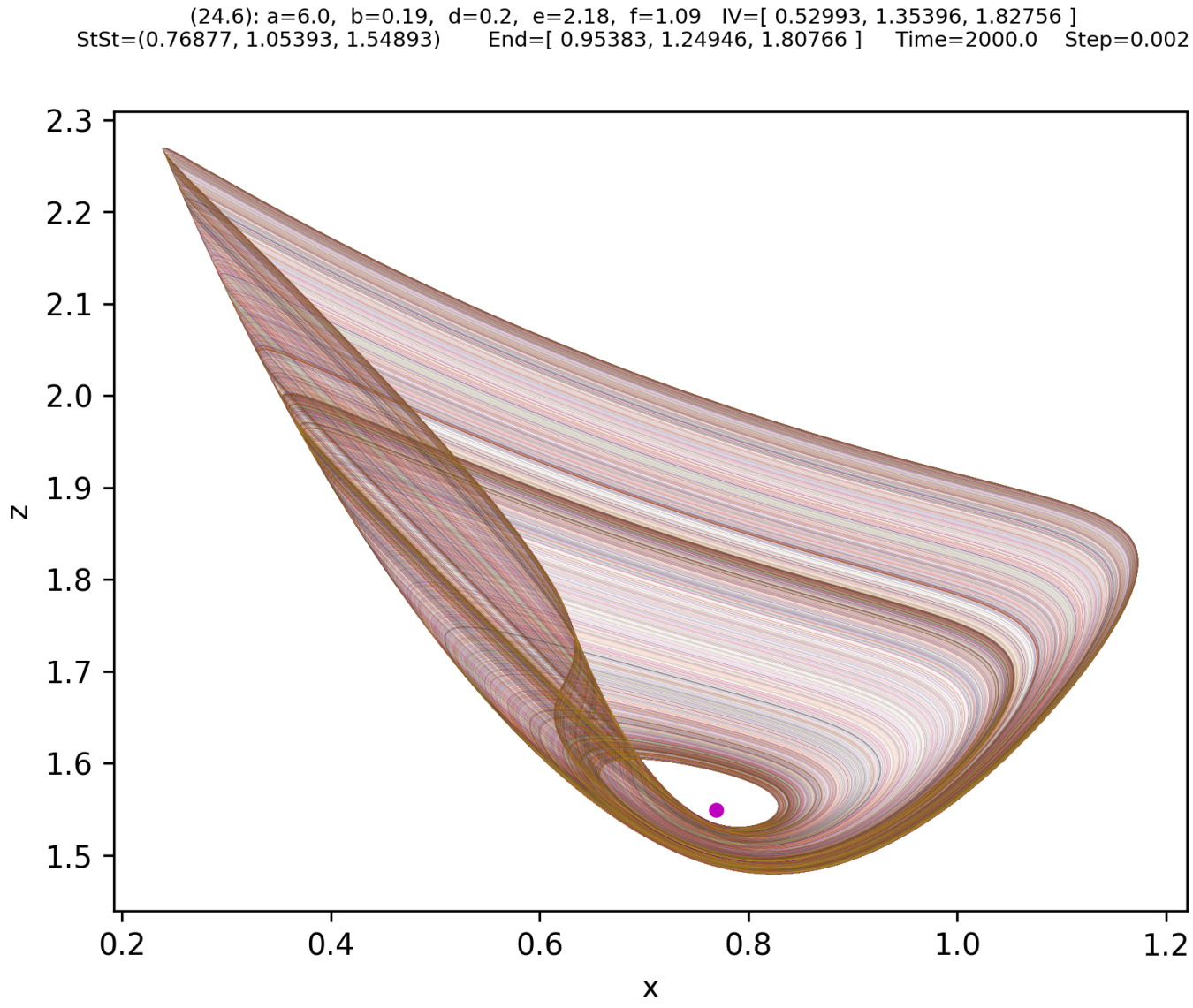
Legende: Chaos im **Beispiel 267**: $\lambda_1 = 0.087$ für $a = 2.71,\ b = 0.15,\ d = 0.08,\ e = 0.66,\ f = 2.3$.



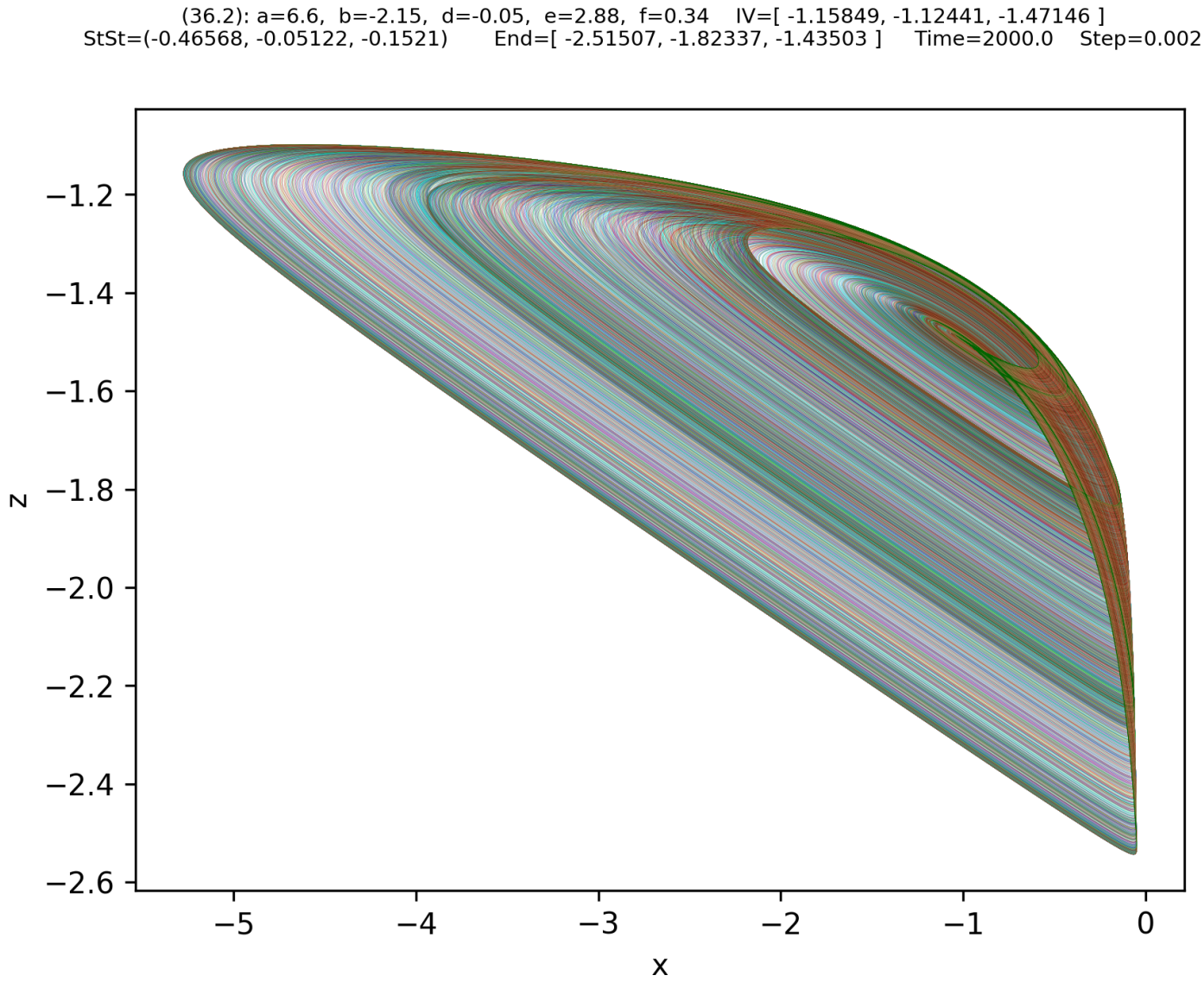
Legende: Chaos im **Beispiel 268**: $\lambda_1 = 0.083$ für $a = 6.0$, $b = 0.21$, $d = 0.2041$, $e = 1.9$, $f = 0.12$.



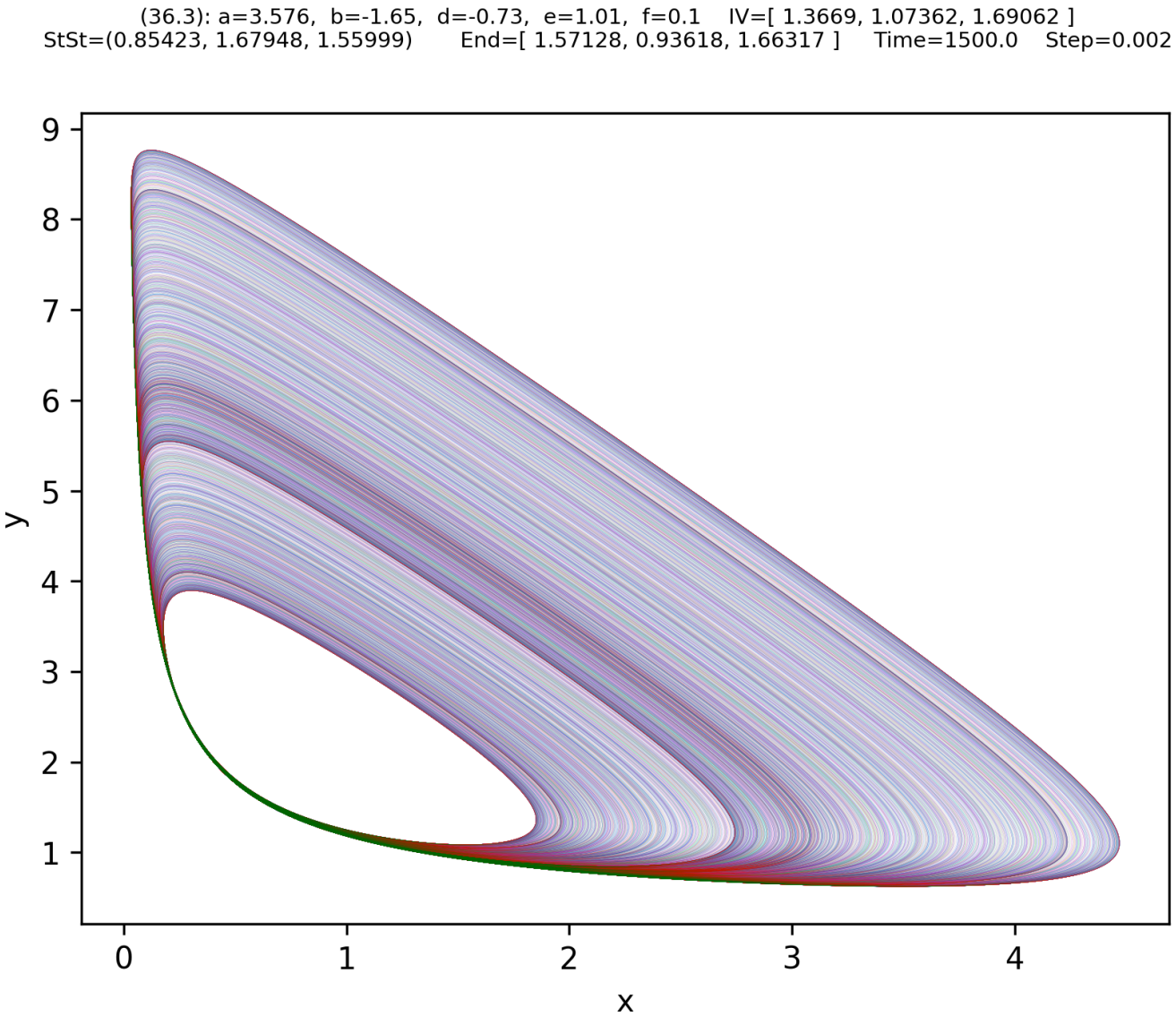
Legende: Chaos im **Beispiel 269**: $\lambda_1 = 0.159$ für $a = 6.0$, $b = 0.19$, $d = 0.2$, $e = 2.18$, $f = 1.09$.



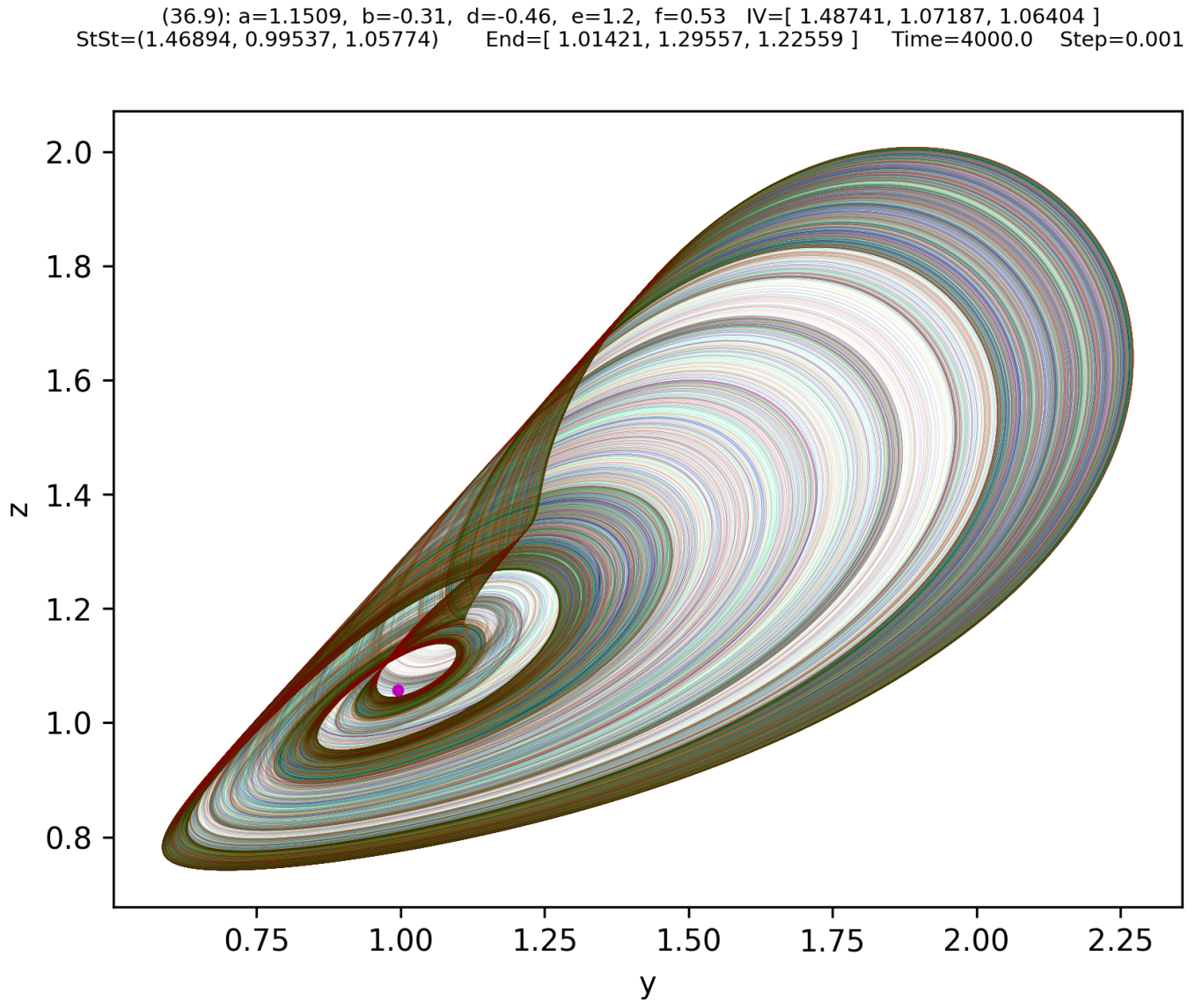
Legende: Chaos im **Beispiel 270**: $\lambda_1 = 0.273$ für
$a = 6.6,\ b = -2.15,\ d = -0.05,\ e = 2.88,\ f = 0.34$.



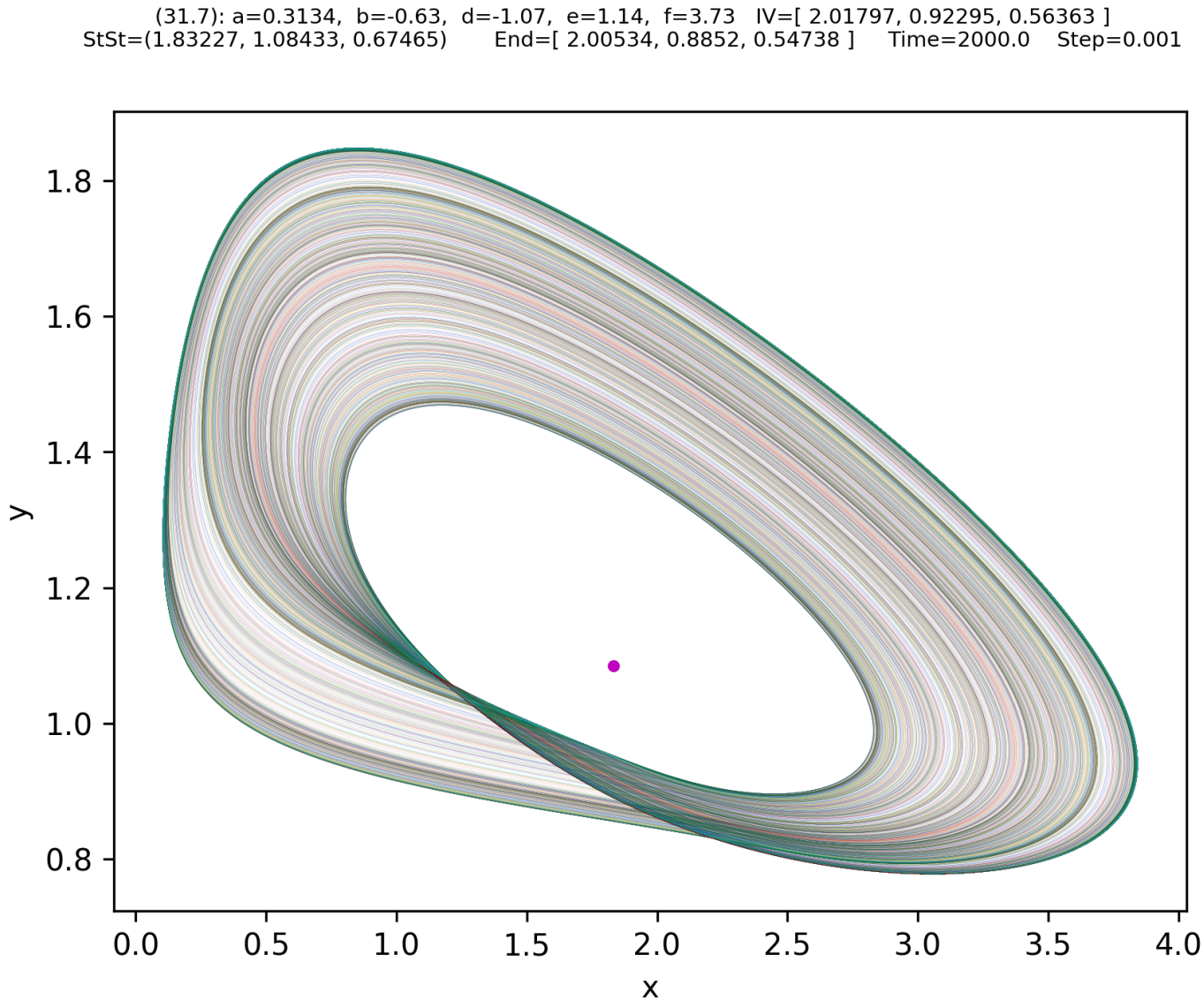
Legende: Chaos im **Beispiel 271**: $\lambda_1 = 0.308$ für
$a = 3.576$, $b = -1.65$, $d = -0.73$, $e = 1.01$, $f = 0.1$.



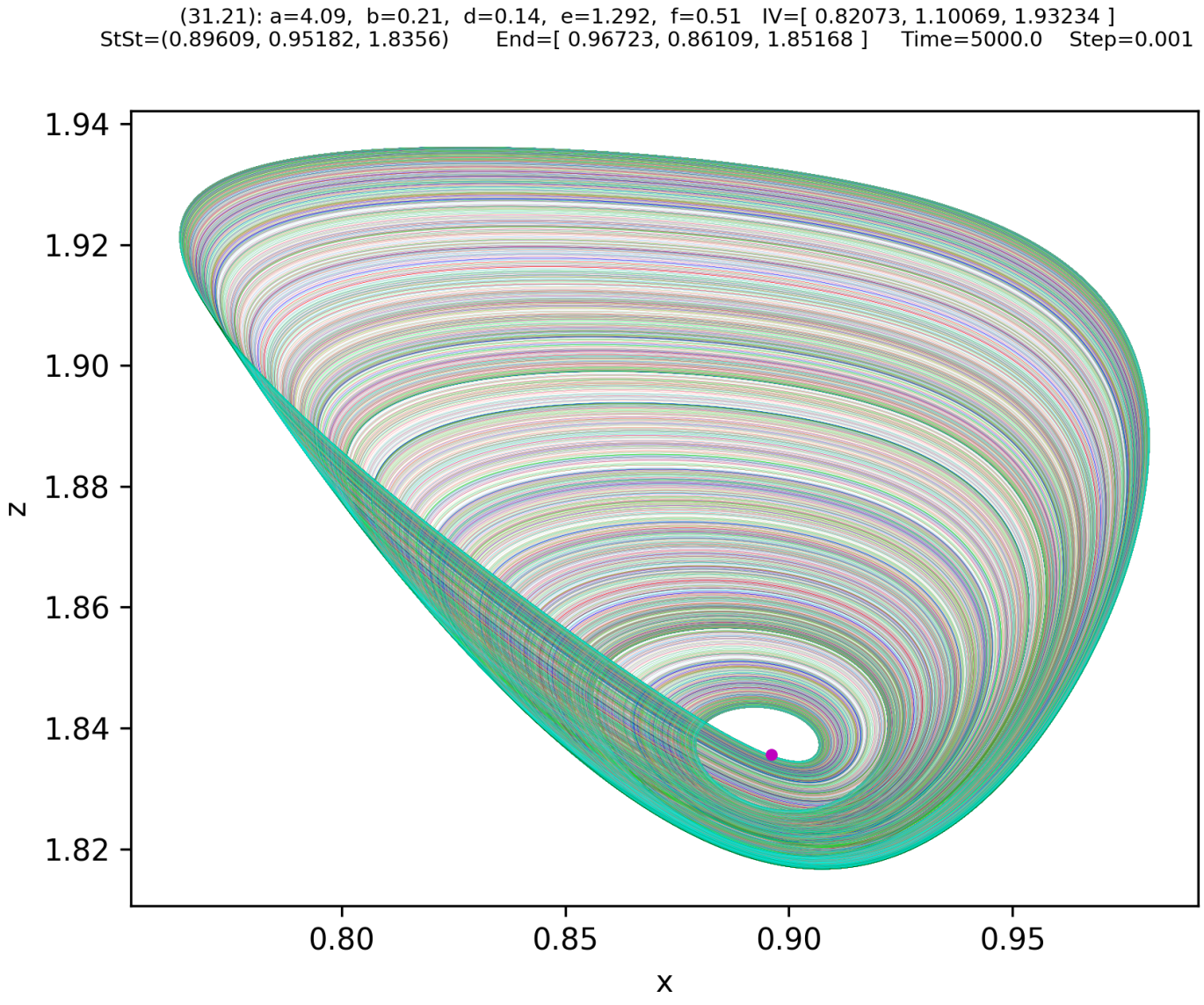
Legende: Chaos im **Beispiel 272**: $\lambda_1 = 0.080$ für
$a = 1.1509$, $b = -0.31$, $d = -0.46$, $e = 1.2$, $f = 0.53$.



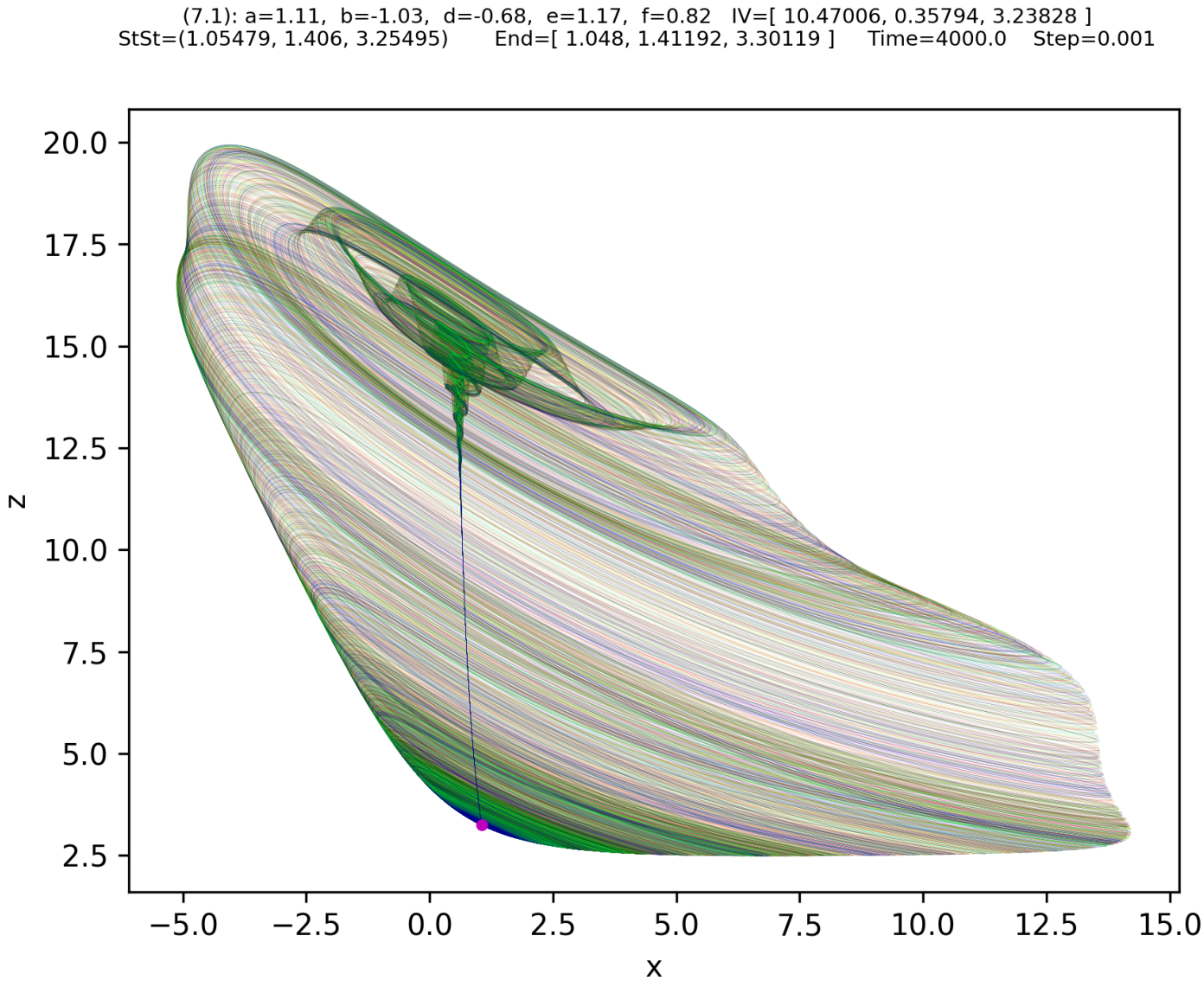
Legende: Chaos im **Beispiel 273**: $\lambda_1 = 0.091$ für
$a = 0.3134$, $b = -0.63$, $d = -1.07$, $e = 1.14$, $f = 3.73$.



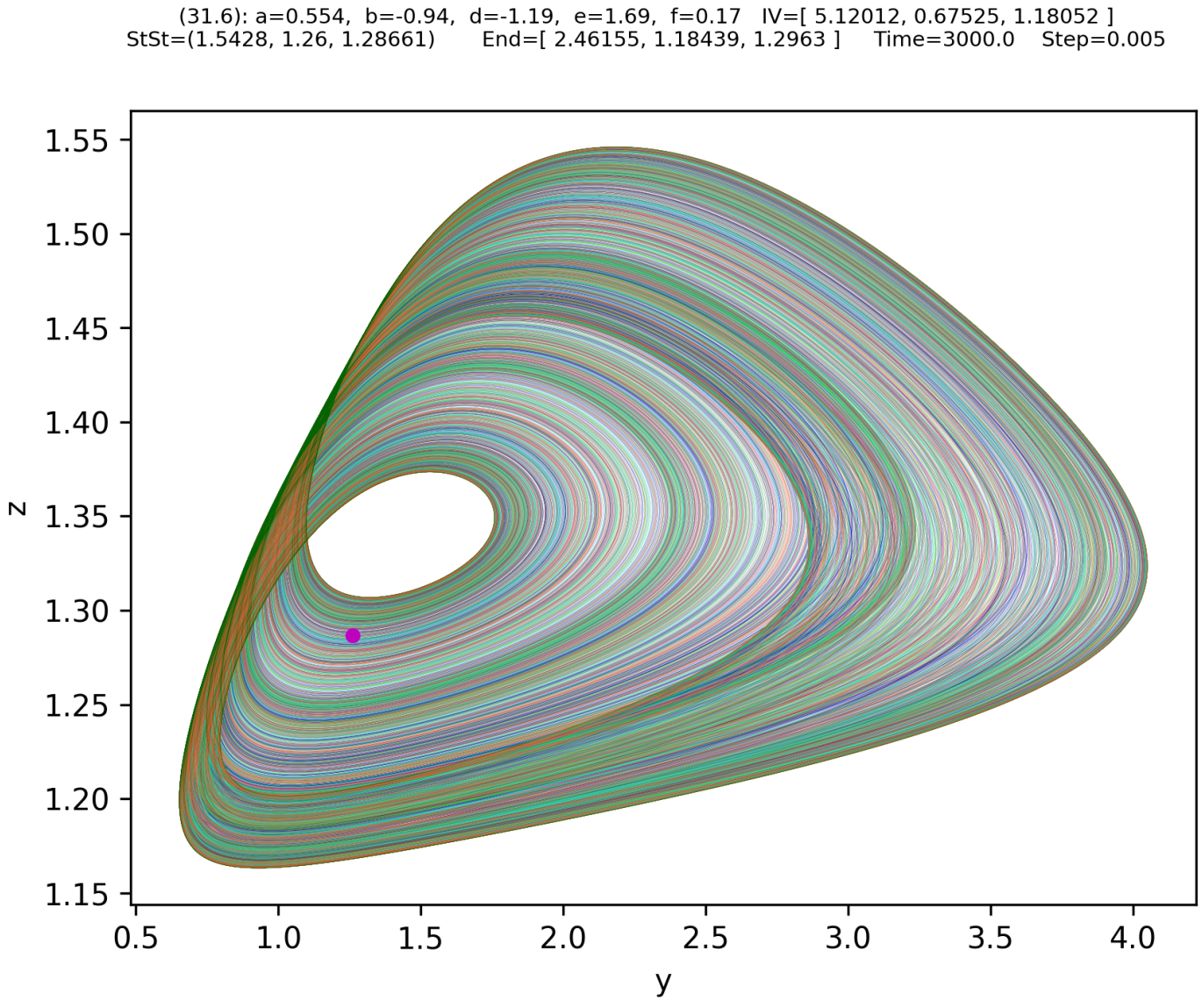
Legende: Chaos im **Beispiel 274**: $\lambda_1 = 0.071$ für
$a = 4.09$, $b = 0.21$, $d = 0.14$, $e = 1.292$, $f = 0.51$.



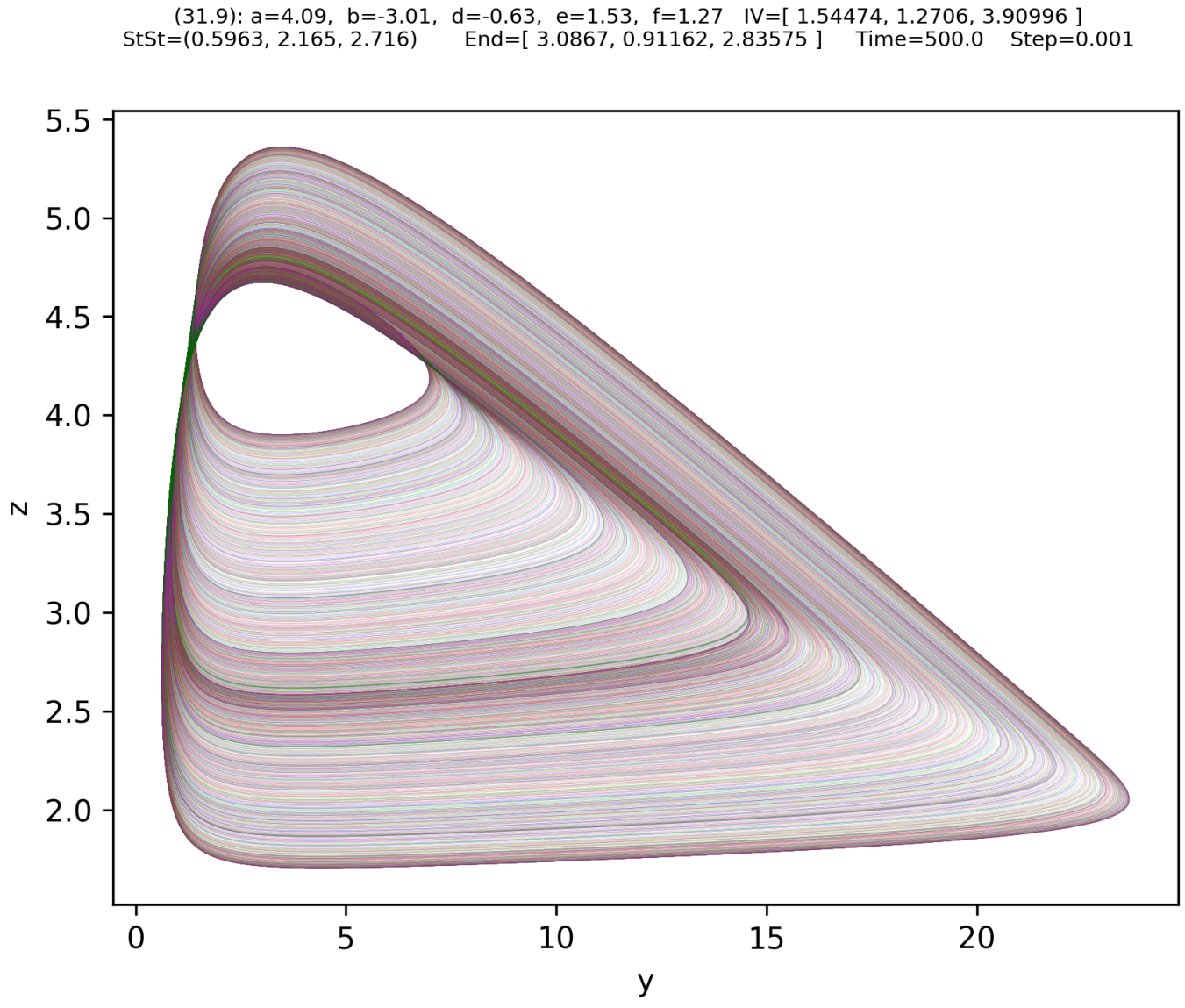
Legende: Chaos im **Beispiel 275**: $\lambda_1 = 0.033$ für
$a = 1.11,\ b = -1.03,\ d = -0.68,\ e = 1.17,\ f = 0.82$.



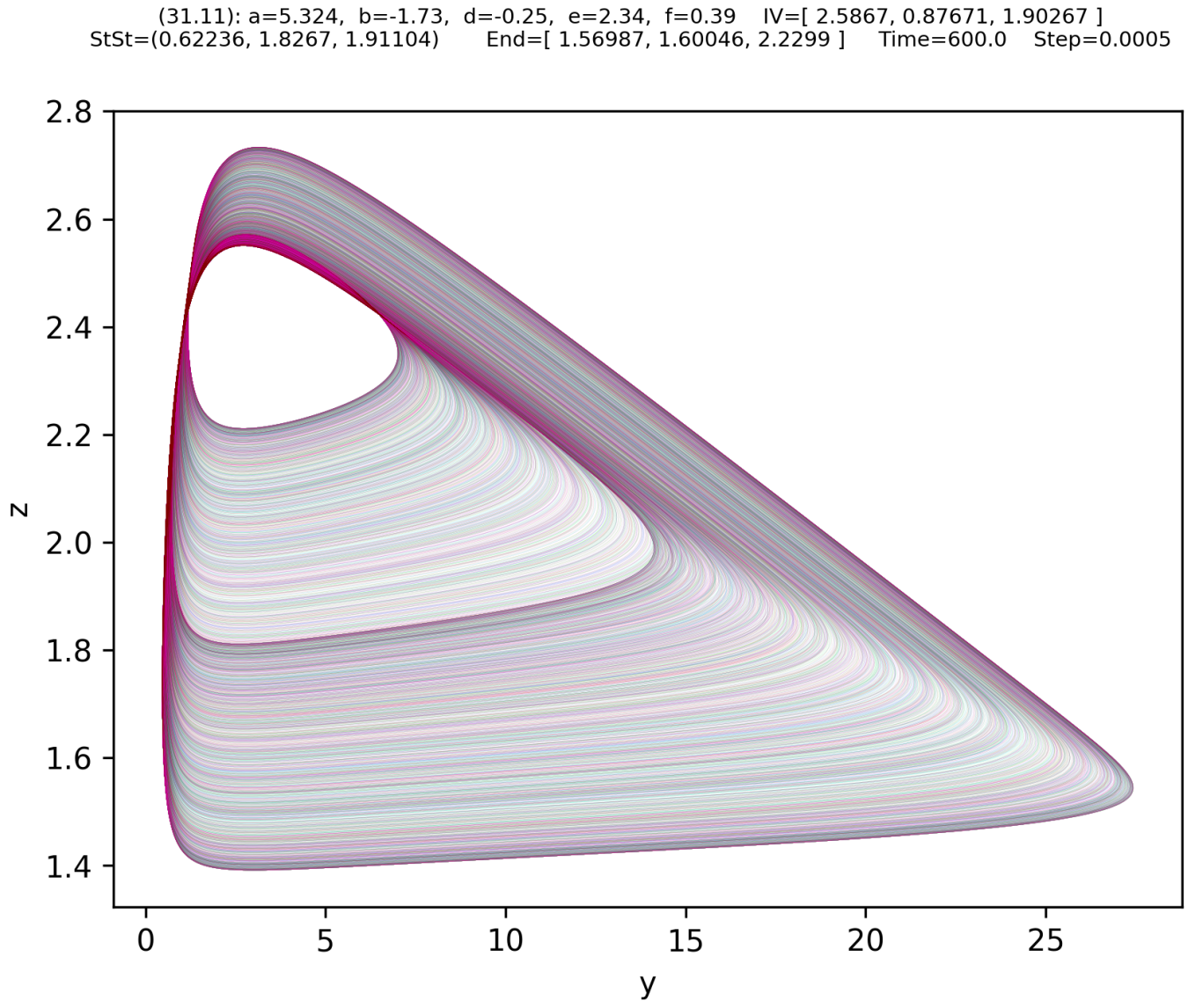
Legende: Chaos im **Beispiel 276**: $\lambda_1 = 0.101$ für
$a = 0.554$, $b = -0.94$, $d = -1.19$, $e = 1.69$, $f = 0.17$.



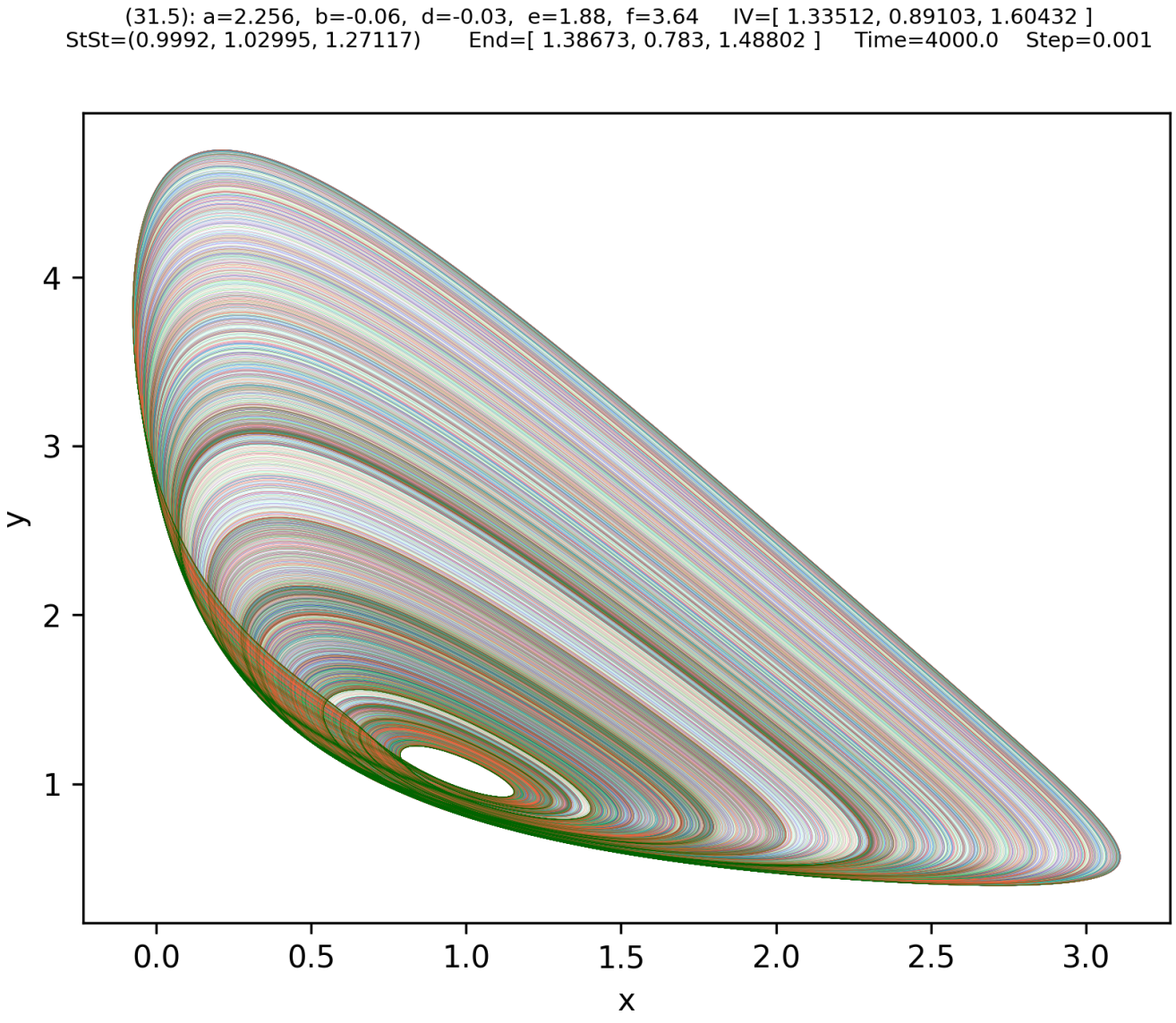
Legende: Chaos im **Beispiel 277**: $\lambda_1 = 0.436$ für
$a = 4.09$, $b = -3.01$, $d = -0.63$, $e = 1.53$, $f = 1.27$.



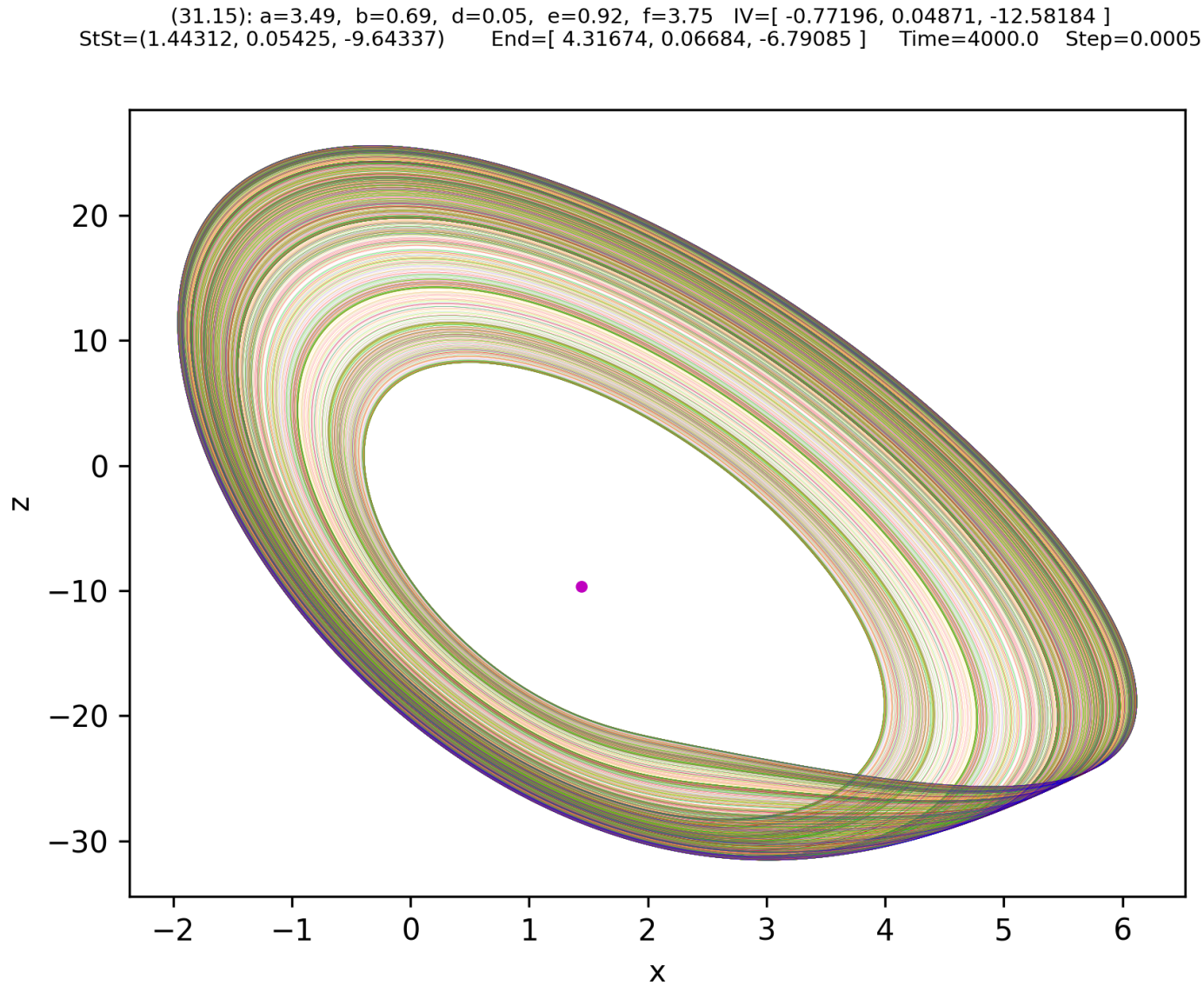
Legende: Chaos im **Beispiel 278**: $\lambda_1 = 0.614$ für
$a = 5.324$, $b = -1.73$, $d = -0.25$, $e = 2.34$, $f = 0.39$.



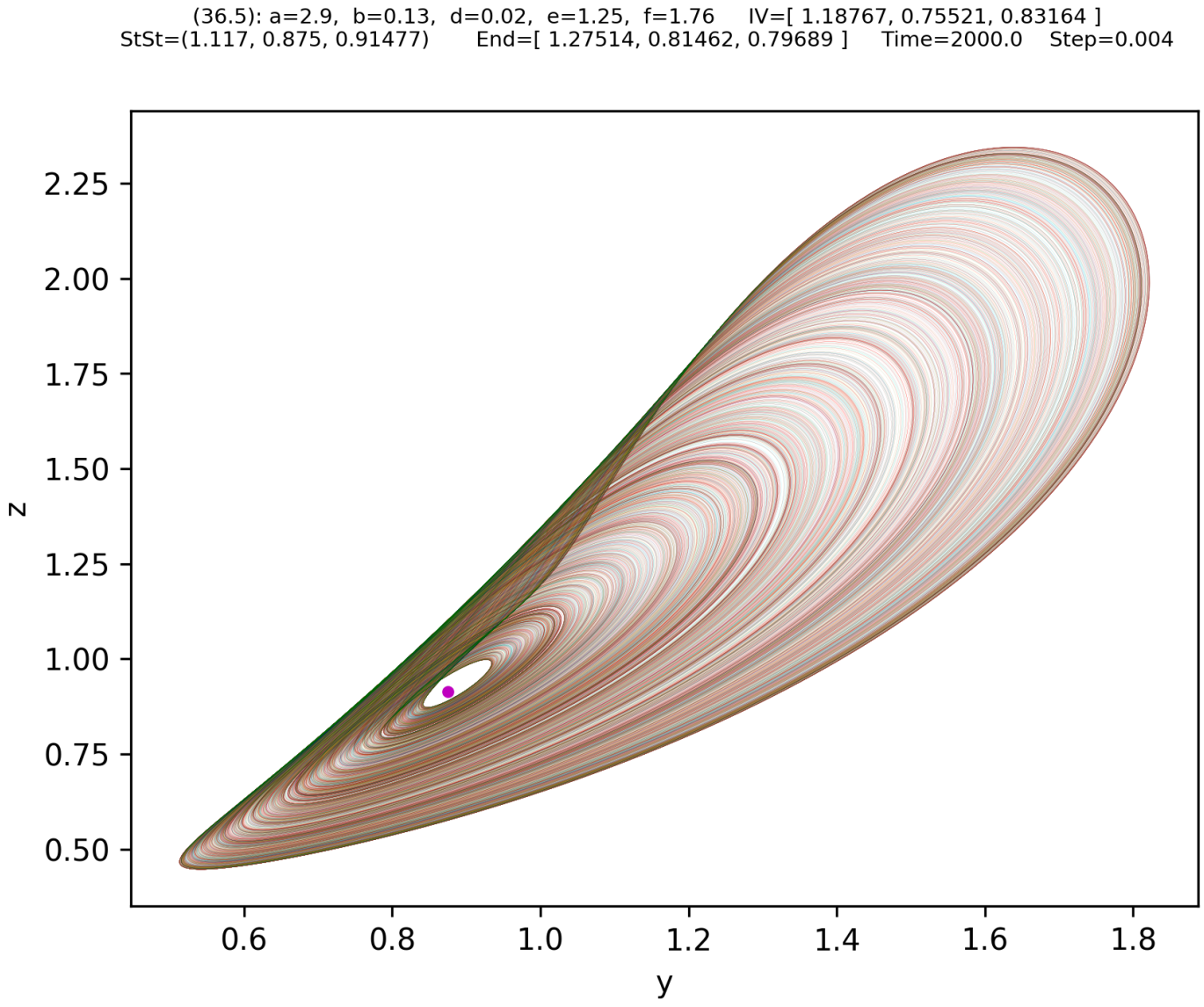
Legende: Chaos im **Beispiel 279**: $\lambda_1 = 0.141$ für
$a = 2.256$, $b = -0.06$, $d = -0.03$, $e = 1.88$, $f = 3.64$.



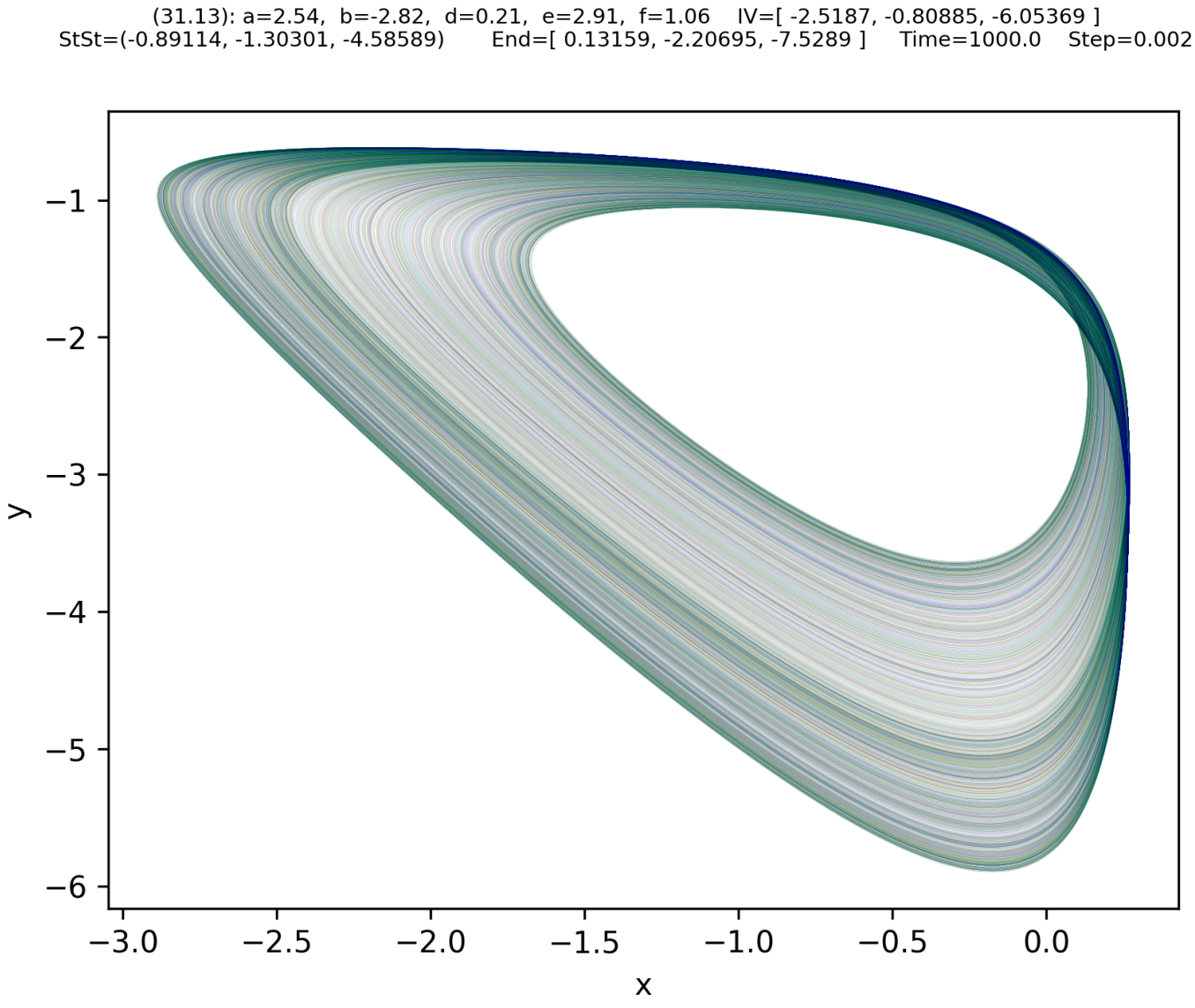
Legende: Chaos im **Beispiel 280**: $\lambda_1 = 0.024$ für $a = 3.49$, $b = 0.69$, $d = 0.05$, $e = 0.92$, $f = 3.75$.



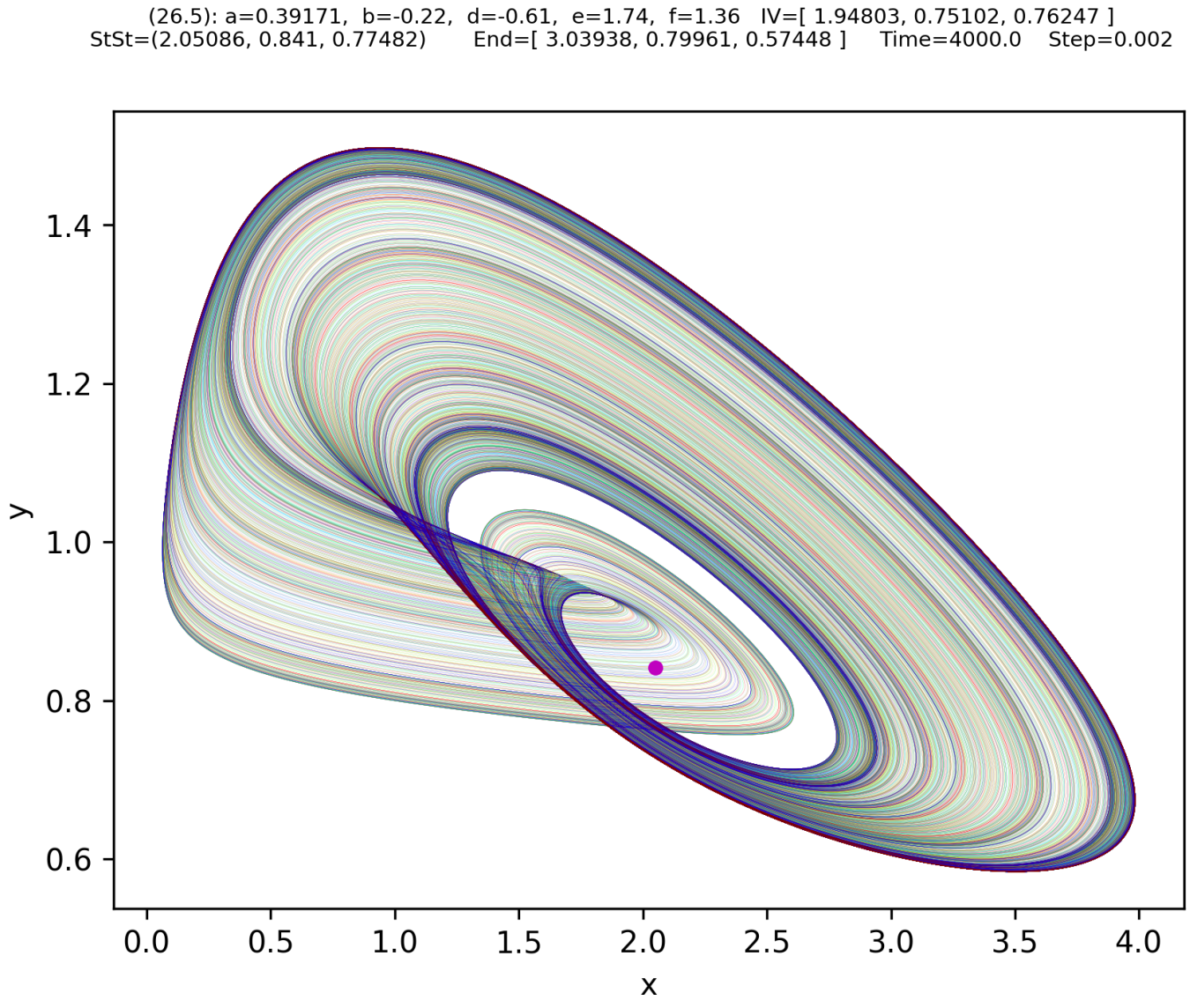
Legende: Chaos im **Beispiel 281**: $\lambda_1 = 0.156$ für $a = 2.9$, $b = 0.13$, $d = 0.02$, $e = 1.25$, $f = 1.76$.



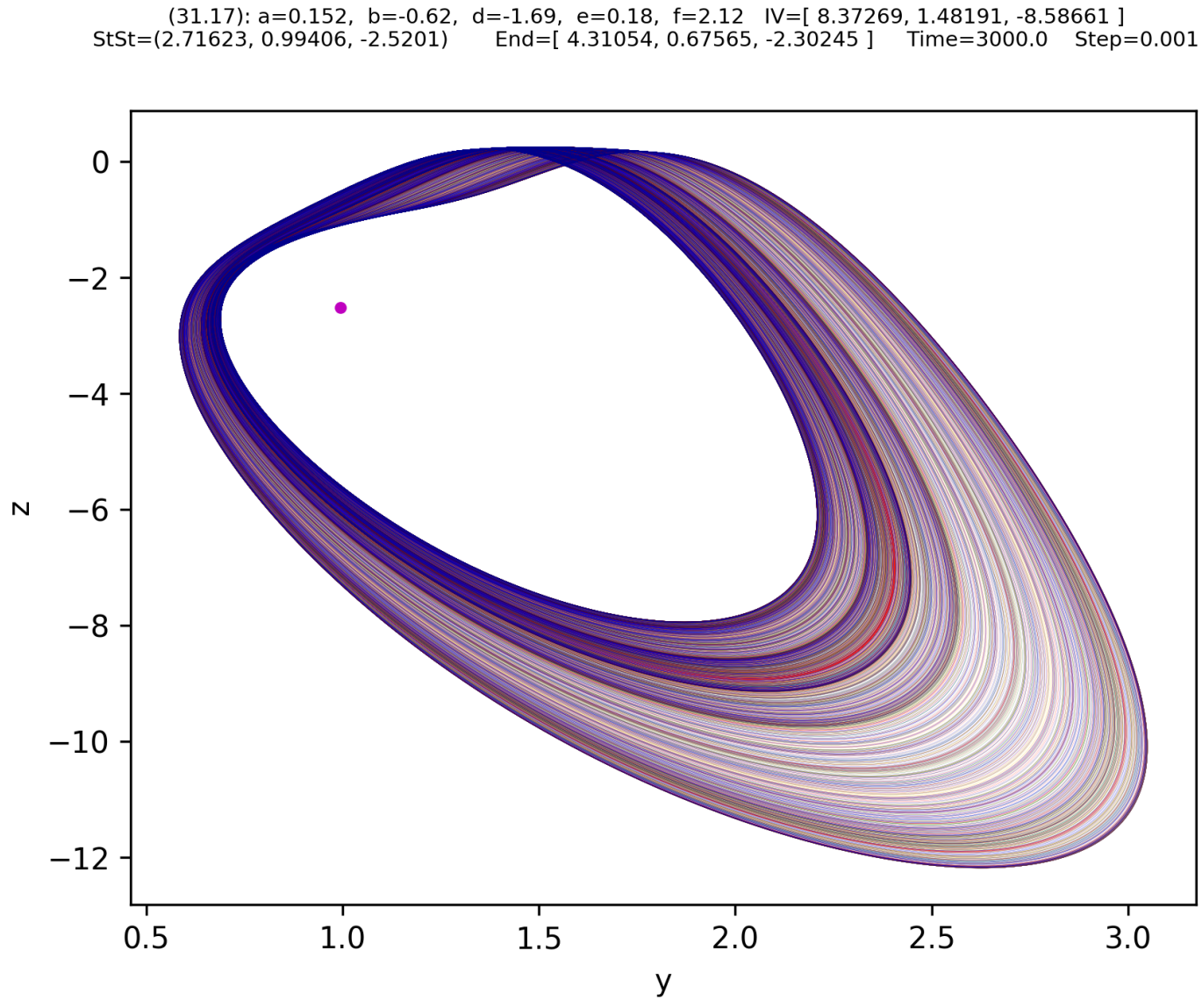
Legende: Chaos im **Beispiel 282**: $\lambda_1 = 0.307$ für
$a = 2.54,\ b = -2.82,\ d = 0.21,\ e = 2.91,\ f = 1.06$.



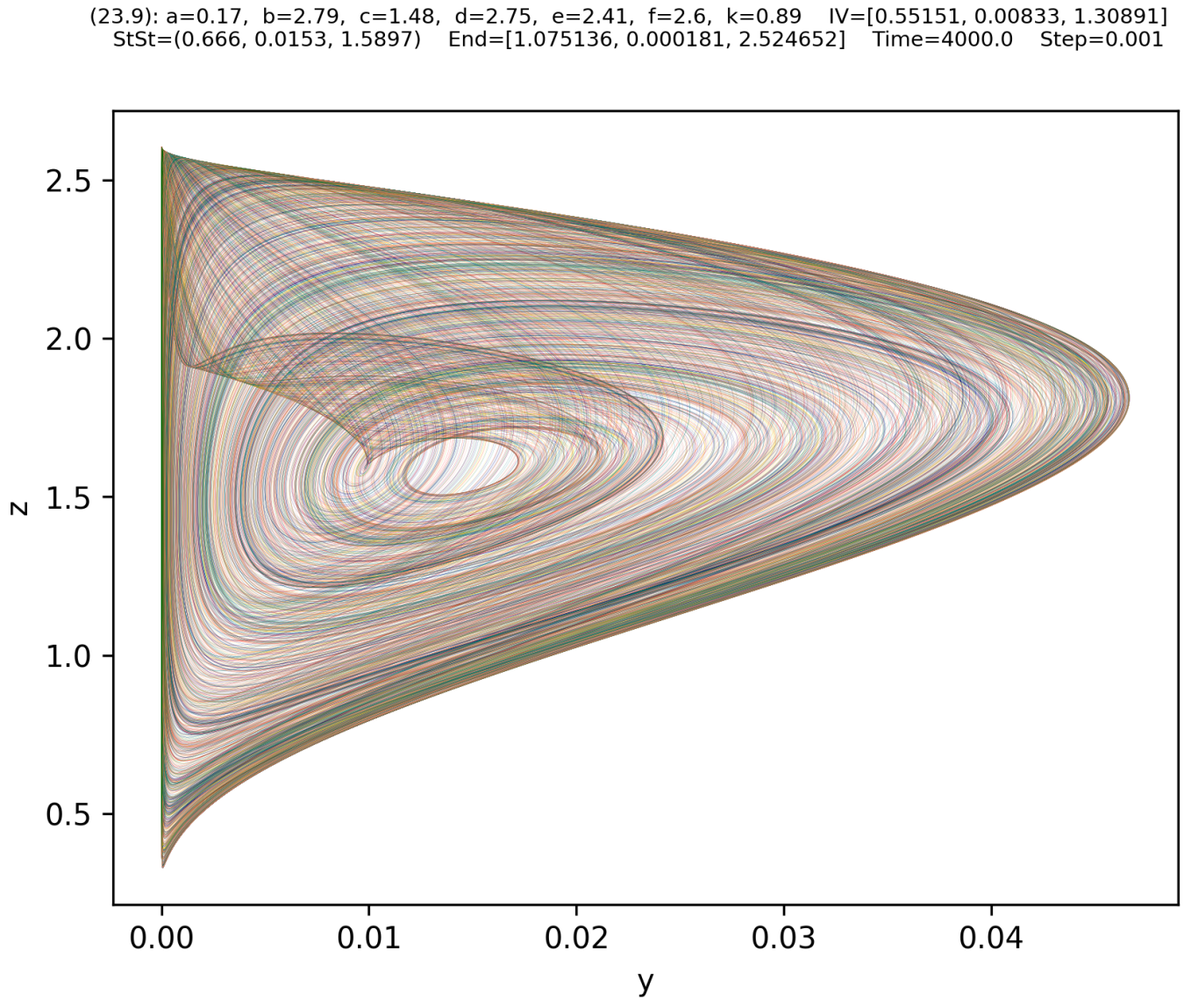
Legende: Chaos im **Beispiel 283**: $\lambda_1 = 0.050$ für
$a = 0.39171$, $b = -0.22$, $d = -0.61$, $e = 1.74$, $f = 1.36$.



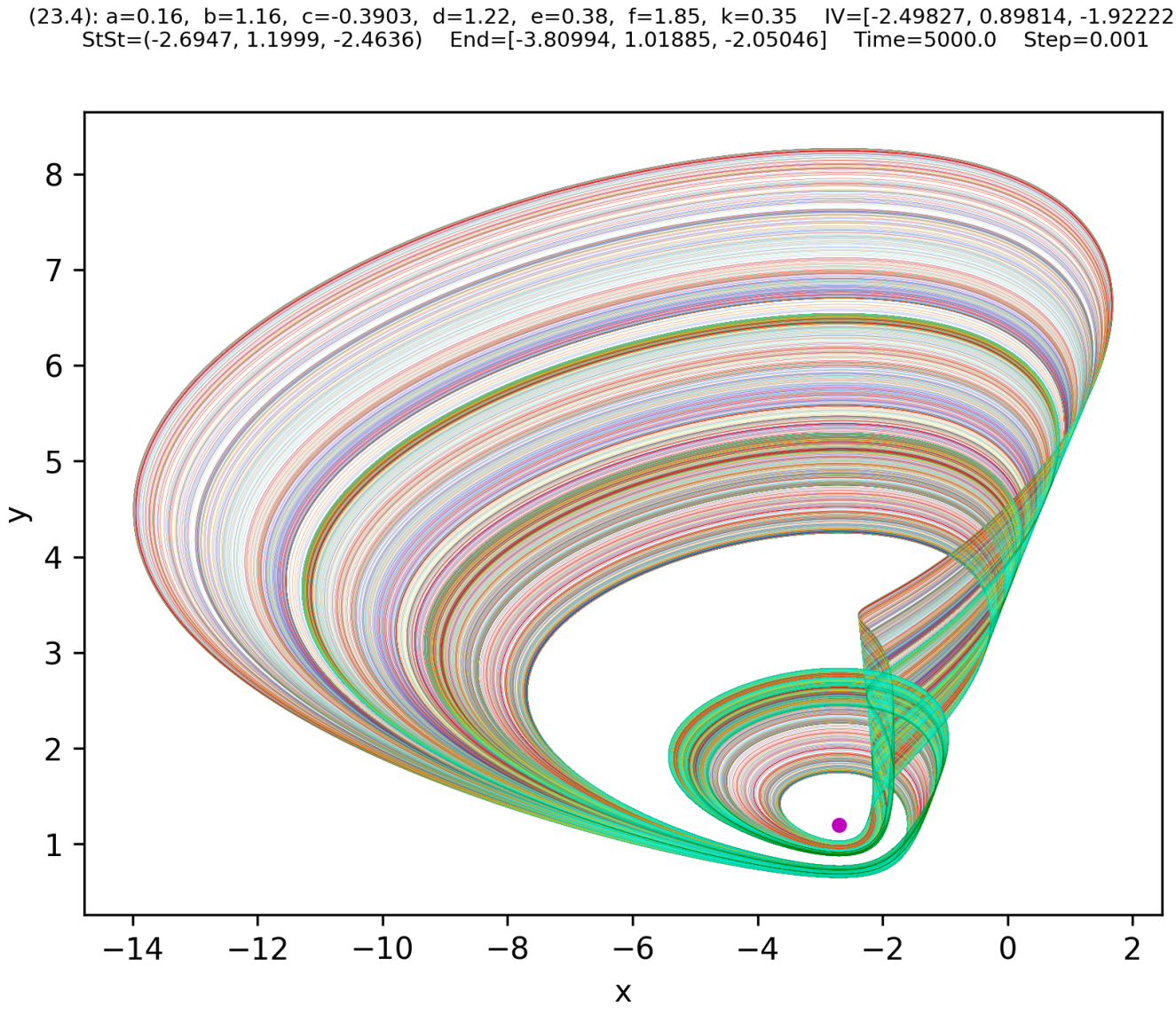
Legende: Chaos im **Beispiel 284**: $\lambda_1 = 0.152$ für
$a = 0.152,\ b = -0.62,\ d = -1.69,\ e = 0.18,\ f = 2.12$.



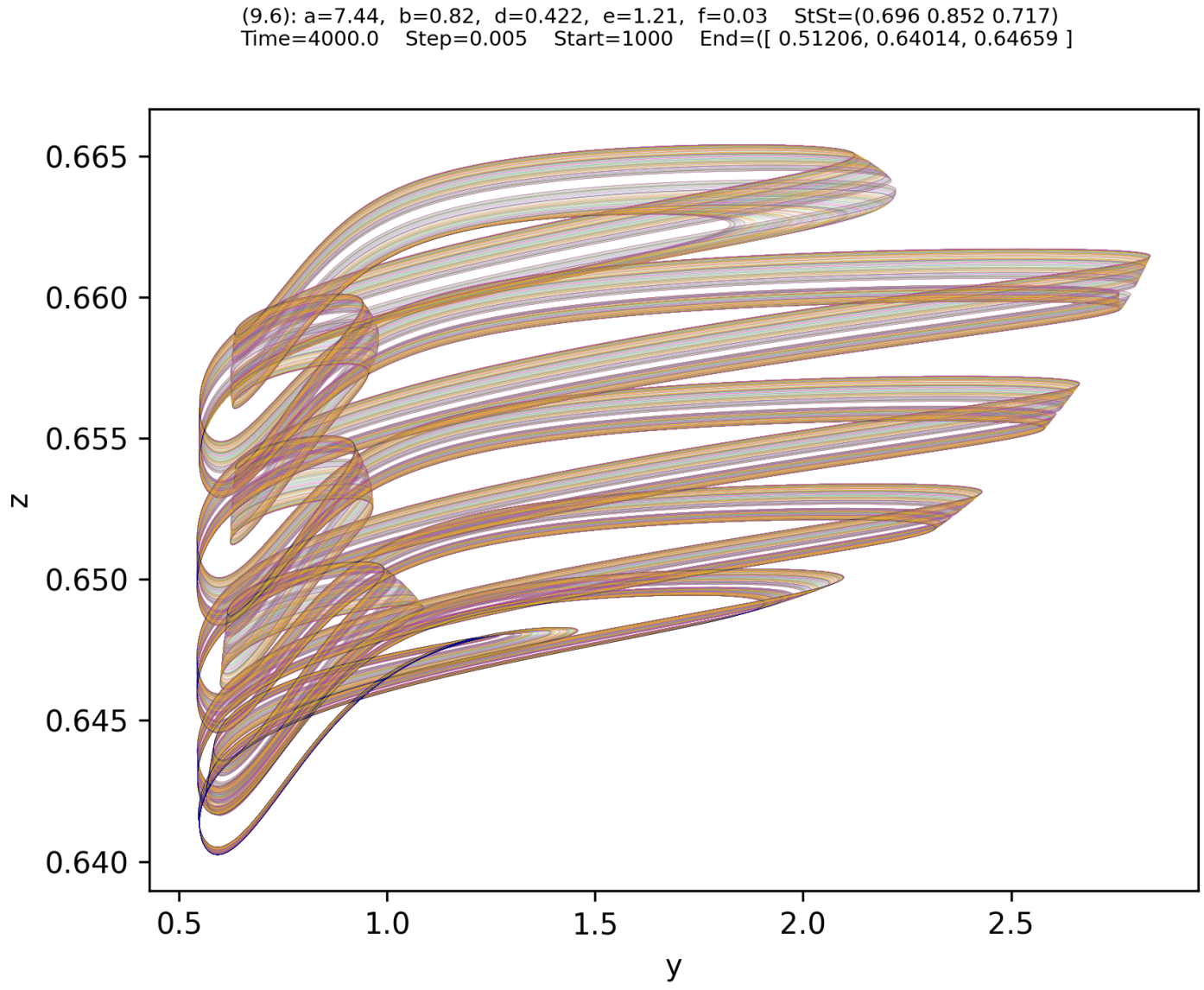
Legende: Chaos im **Beispiel 285**: $\lambda_1 = 0.064$ für
$a = 0.17,\ b = 2.79,\ c = 1.48,\ d = 2.75,\ e = 2.41,\ f = 2.6,\ k = 0.89$.



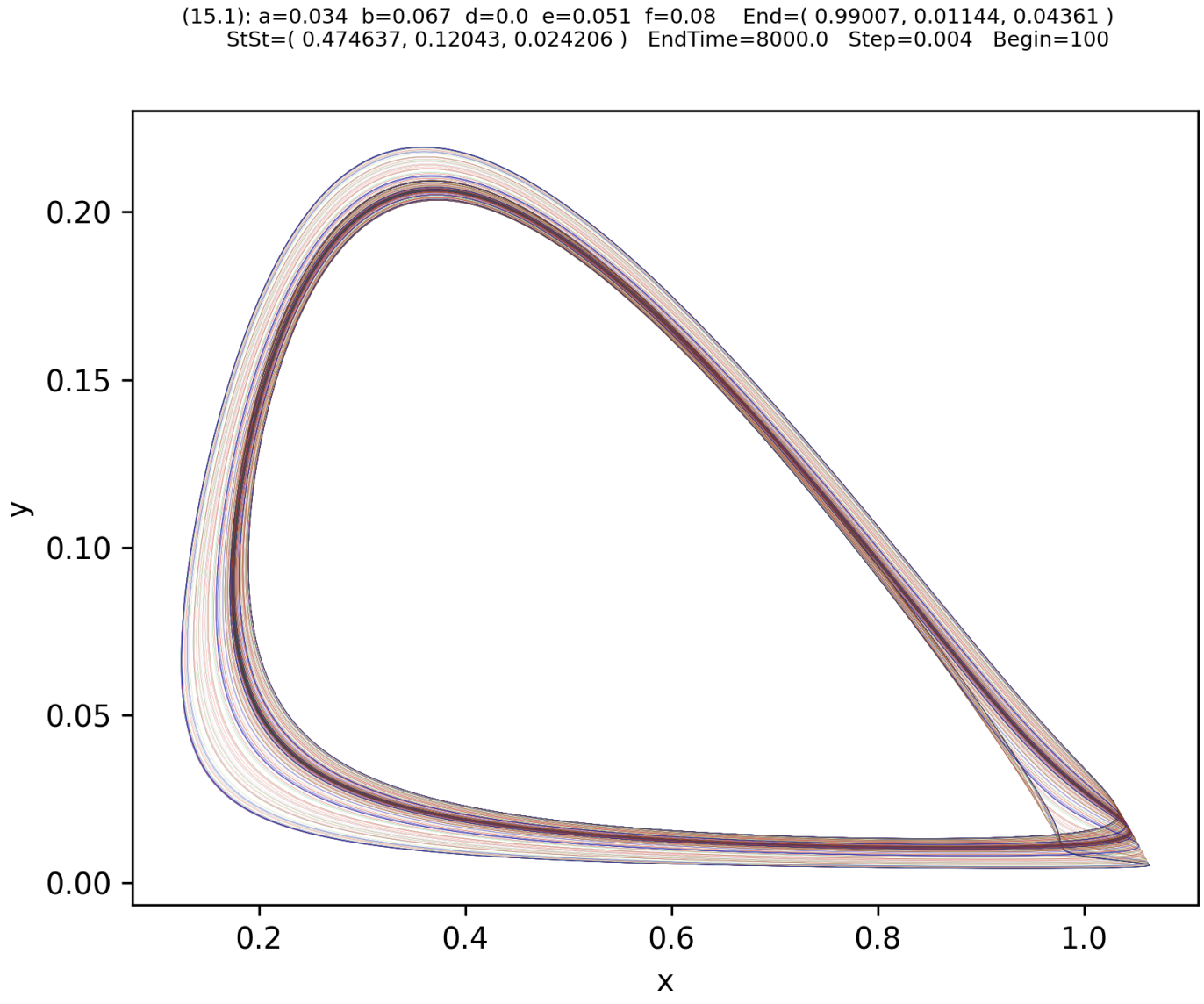
Legende: Chaos im **Beispiel 286**: $\lambda_1 = 0.053$ für
$a = 0.16,\ b = 1.16,\ c = -0.3903,\ d = 1.22,\ e = 0.38,\ f = 1.85,\ k = 0.35$.



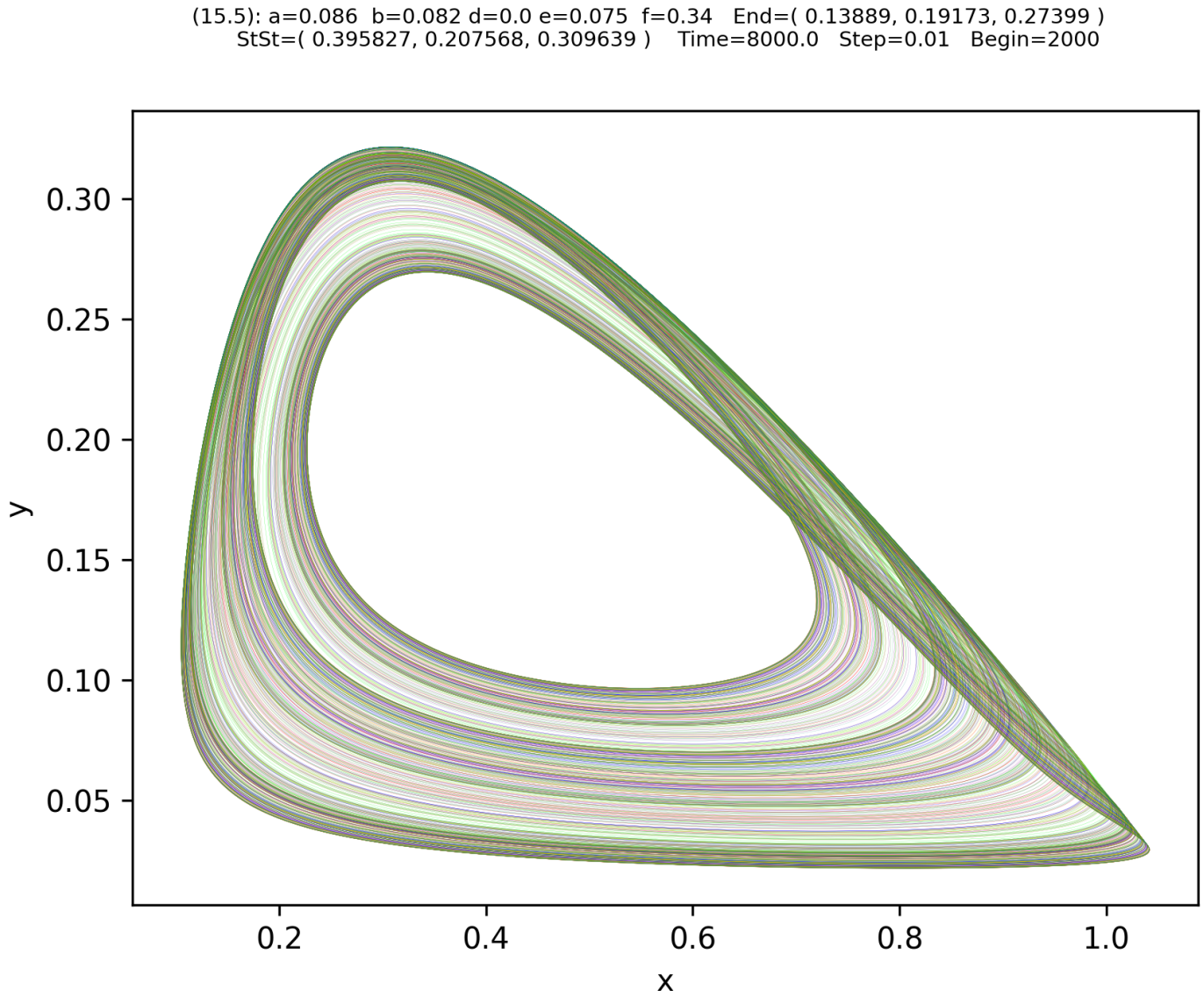
Legende: Chaos im **Beispiel 4GR**: $\lambda_1 = 0.007$
für: $a = 7.44,\ b = 0.82,\ d = 0.422,\ e = 1.21,$ und $f = 0.03$.



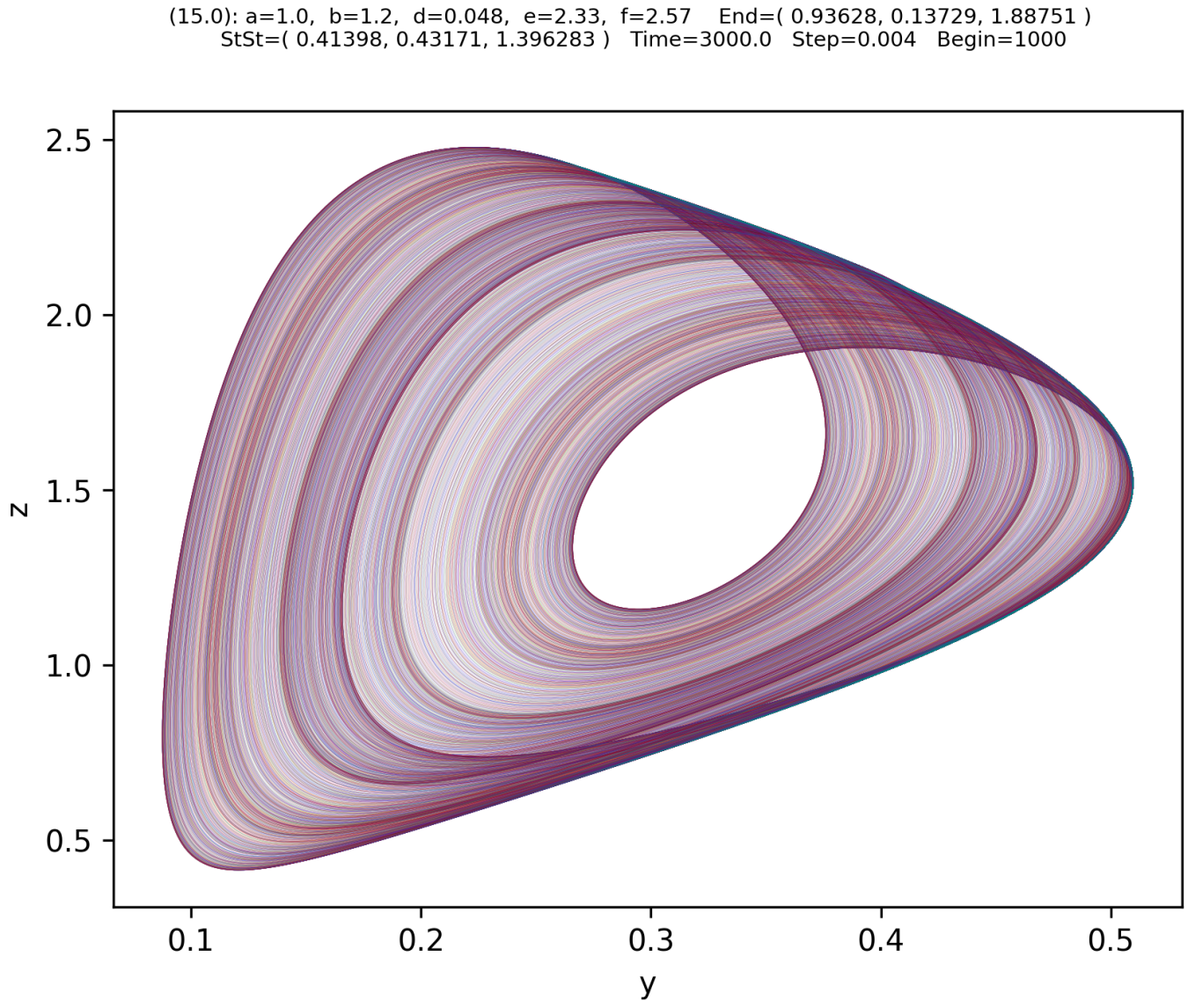
Legende: Chaos im **Beispiel x70**: $\lambda_1 \approx 0.002$ für:
$a = 0.034$, $b = 0.067$, $e = 0.051$, $f = 0.08$.



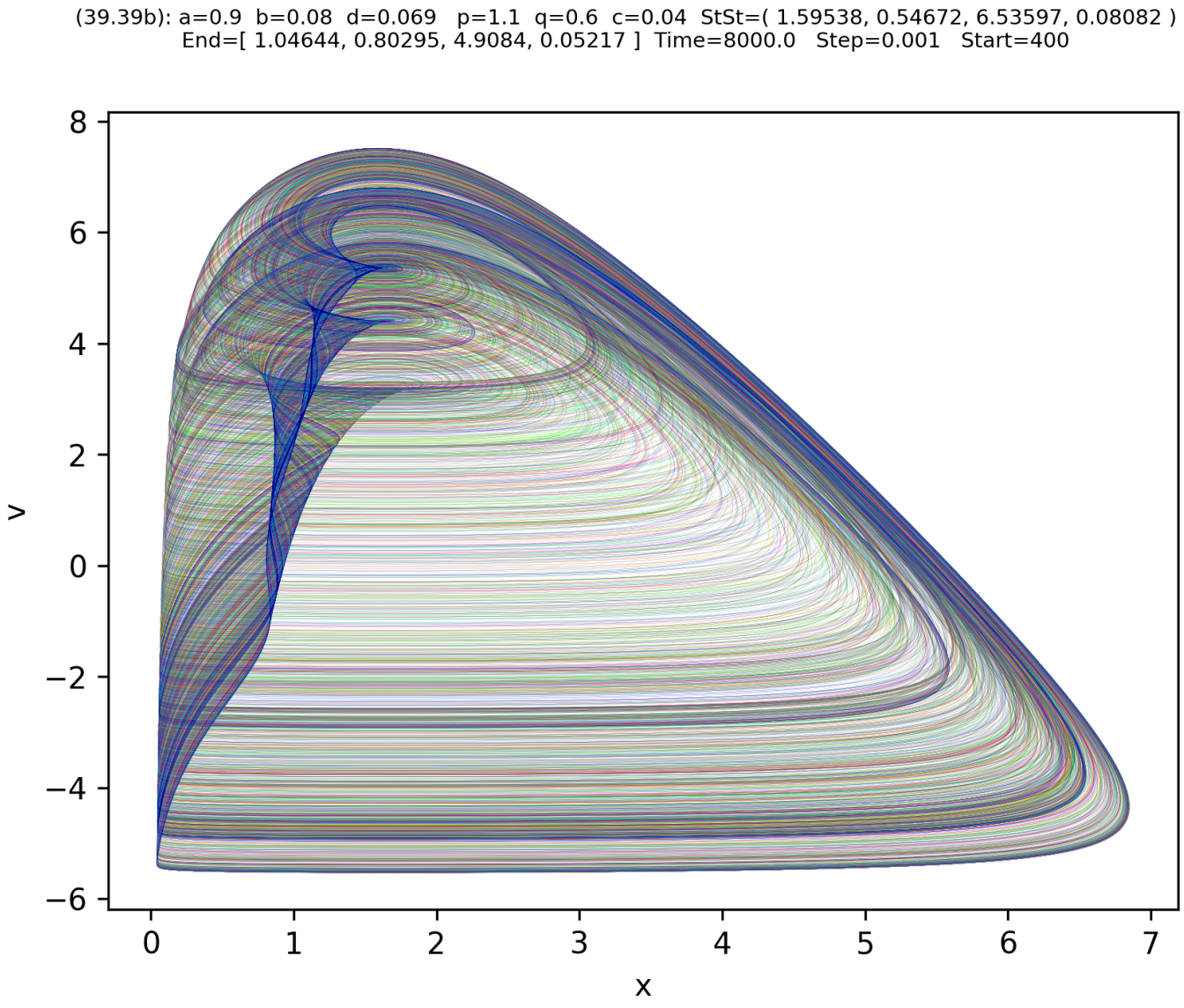
Legende: Chaos im **Beispiel x147**: $\lambda_1 = 0.003$
für: $a = 0.086$, $b = 0.082$, $e = 0.075$ und $f = 0.34$.



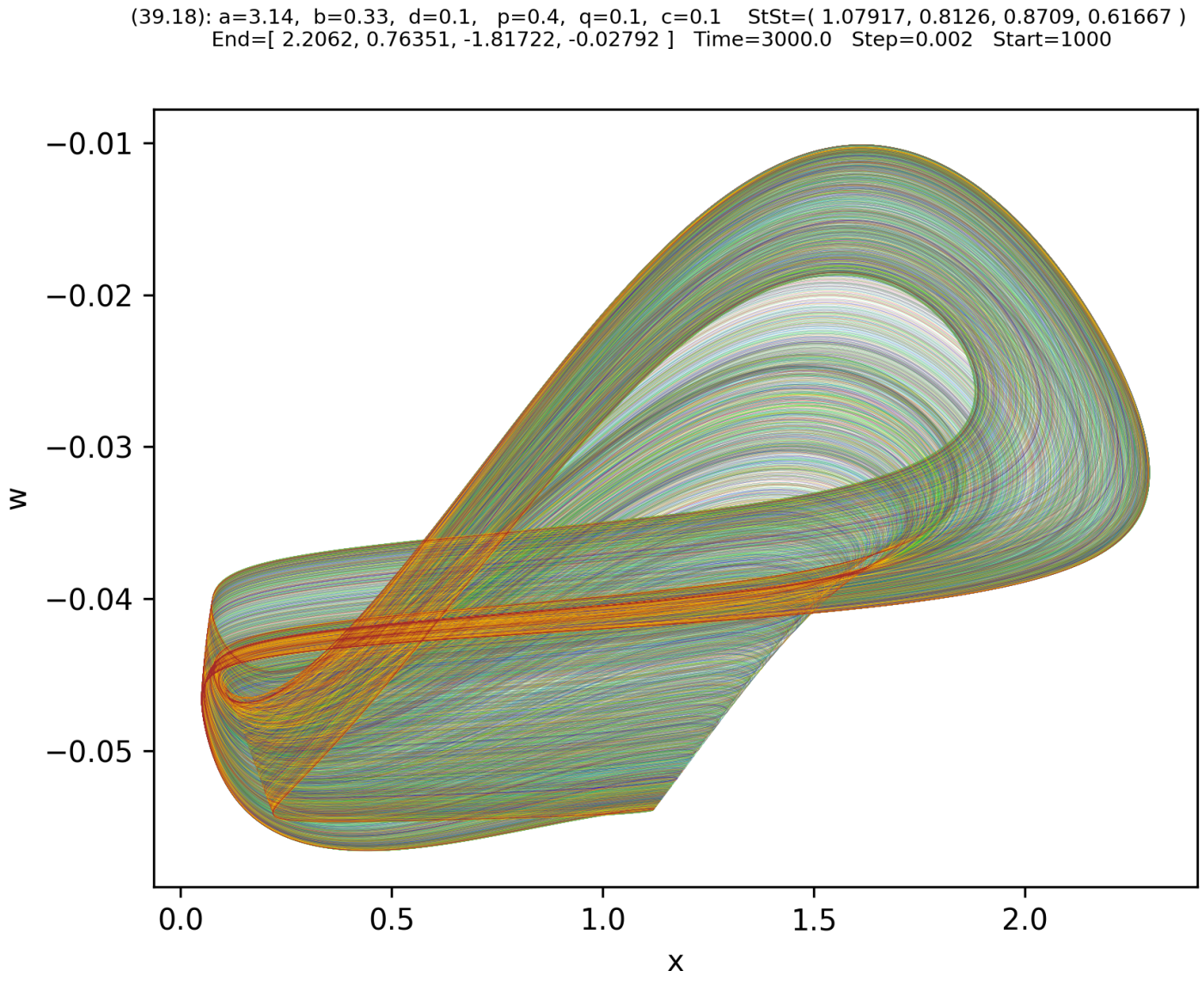
Legende: Chaos im **Beispiel x200**: $\lambda_1 = 0.057$
für: $a = 1.0$, $b = 1.2$, $d = 0.048$, $e = 2.33$ und $f = 2.57$.



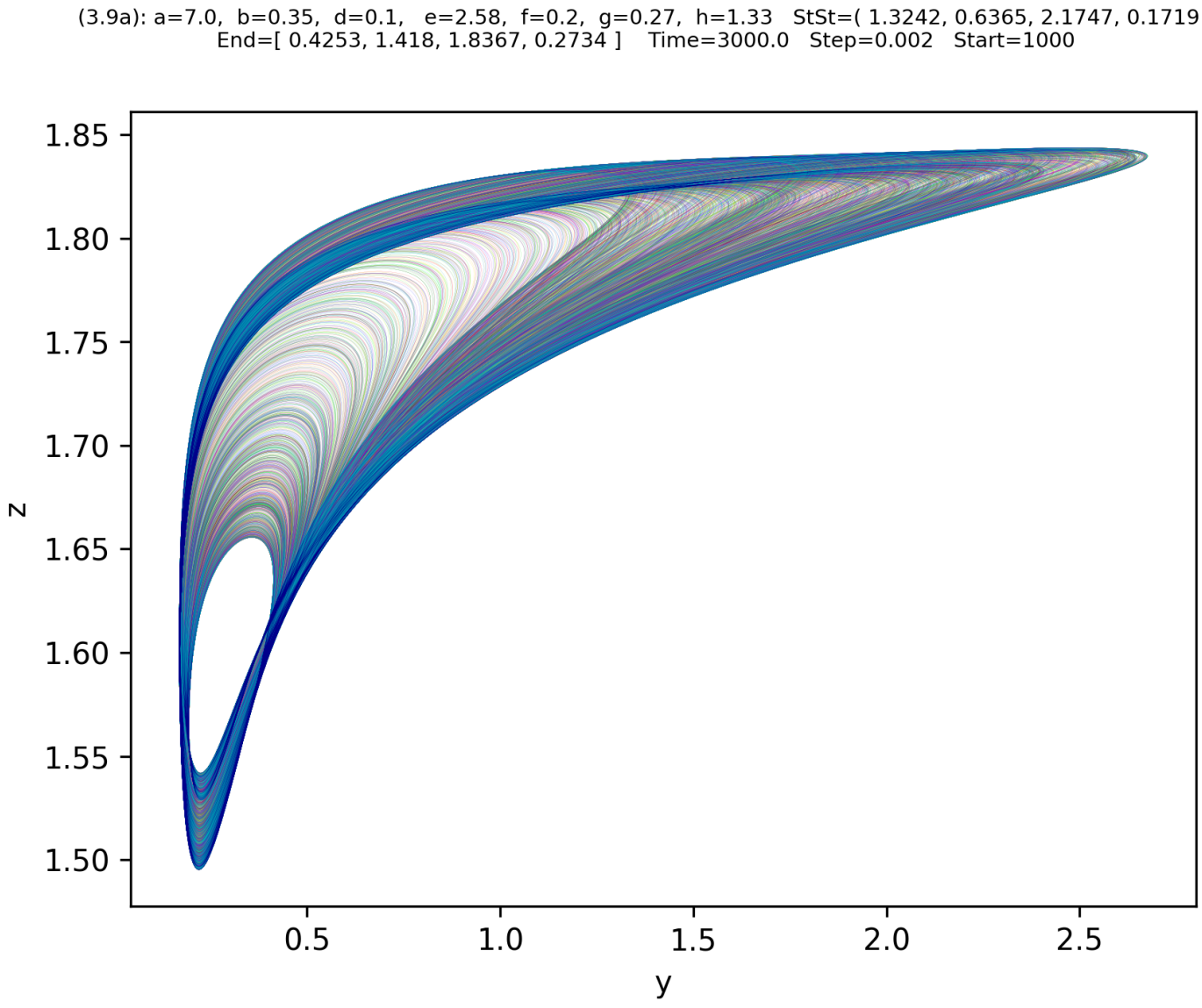
Legende: Chaos im **Beispiel 2xB**: $\lambda_1 = 0.033$
für: $a = 0.9$, $b = 0.08$, $d = 0.069$, $p = 1.1$, $q = 0.6$, $c = 0.04$.



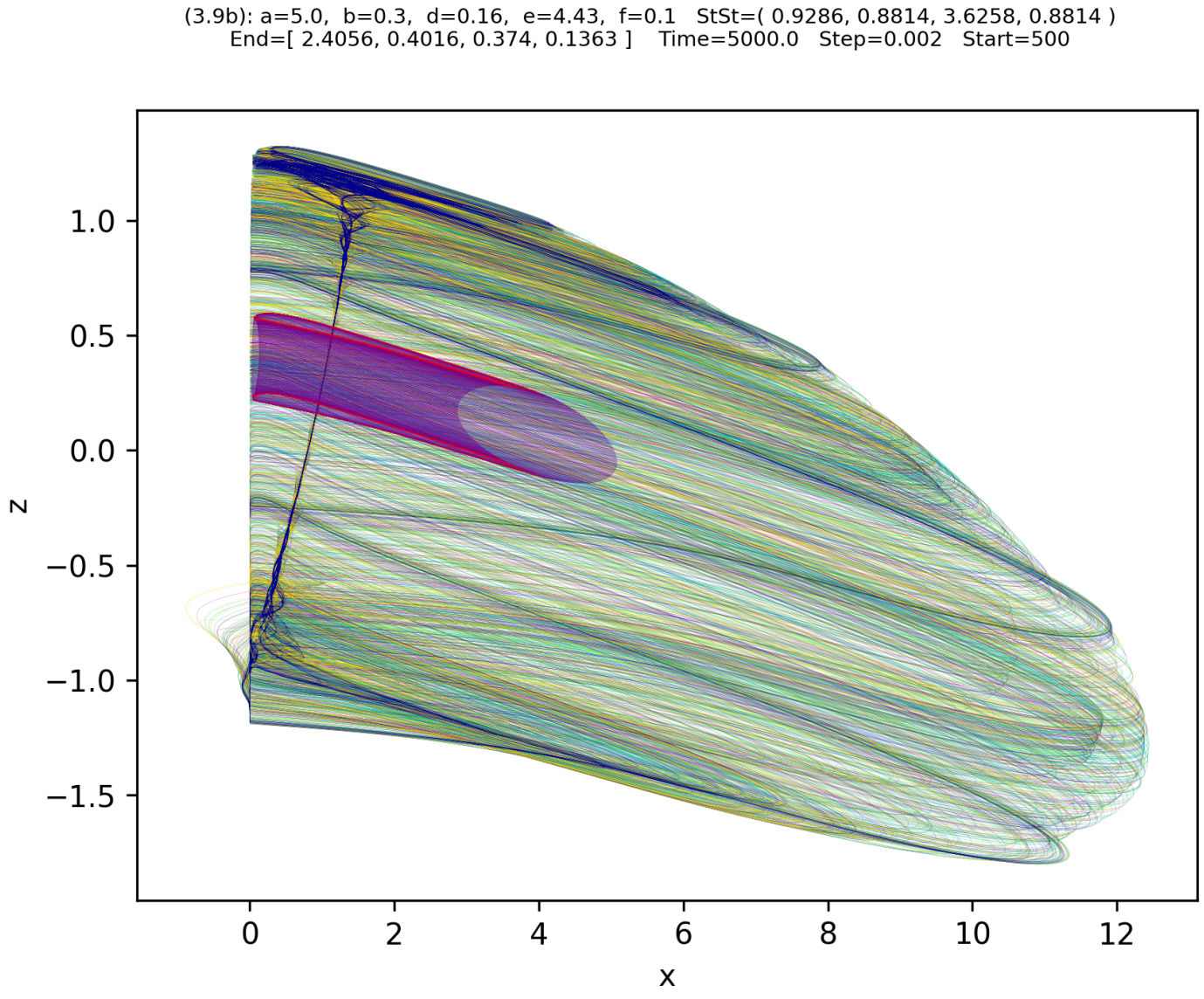
Legende: Chaos im **Beispiel BxB**: $\lambda_1 = 0.121$
für: $a = 3.14$, $b = 0.33$, $d = 0.1$, $p = 0.4$, $q = 0.1$, $c = 0.1$.



Legende: Chaos im **Beispiel 2DEP**: $\lambda_1 = 0.075$
für: $a = 7.0,\ b = 0.35,\ d = 0.1,\ e = 2.58,\ f = 0.2,\ g = 0.27,\ h = 1.33$.



Legende: Chaos im **Beispiel PROD**: $\lambda_1 = 0.020$
für: $a = 5.0,\ b = 0.3,\ d = 0.16,\ e = 4.43,\ f = 0.1$



Eine Anmerkung zum Sel'kov-System von 1968

Unser Chaossystem basiert auf einer speziellen Verallgemeinerung des Sel'kov-Sytems [35] als Basissystem durch Hinzunahme von 2 Termen.

Es gibt aber auch andere Verallgemeinerungen des Sel'kov-Systems, zum Beispiel das von U. Schwarz betrachtete Basissystem [34] (mit vertauschten Variablen). In den Beispielen 18 bis 20 wurden dazu Pendel-Polynome hinzugenommen, die mit diesem Basissystem auch ins Chaos führen können.

Andererseits führen auch Verallgemeinerungen des Brüsselators (durch Zugabe neuer Monome oder Binome) zu ähnlichen oder eventuell sogar äquivalenten Basissystemen. Das gilt auch für das Van-der-Pol-Modell.
Das war zu erwarten, da es nur wenige polynomiale Nichtlinearitäten in Modellen von ebenen Systeme vom maximalen Grad 3 gibt.
Erst recht gilt das bei sinnvollen Modellen aus Biologie, Chemie und Physik.

Durch die Zugabe von Pendel-Polynomen kommt aber wieder etwas Ordnung (Unterscheidbarkeit) in die dynamischen Systeme. Trotzdem, es sei wiederholt. Es kann Beispiele aus dieser Sammlung geben, die an anderer Stelle in äquivalenter Form bereits untersucht wurden. Wahrscheinlich aber ohne Chaos.

Eine Anmerkung zu polynomialen Systemen von Grad 2

Polynomiale Systeme der hier betrachteten Art können auch Chaos erzeugen, wenn der maximale Grad der Monome nur 2 beträgt. Solche Beispiele sind in dieser Sammlung reichlich vorhanden. Eine Klassifizierung der Systeme vom Grad 2 ist zum Beispiel in Desprez [9] vorgenommen. Dort werden die maximal möglichen 30 Monome mit 30 Parametern unterschieden in:

Typ A	9 Monome mit 3 Parametern
Typ B	12 Monome mit 6 Parametern
Typ C	18 Monome mit 18 Parametern
sonstige	mehr als 18 Monome

Das kann man mal so machen. Das ist ein Ansatz, der allerdings nicht auf Modellierungen basiert wie es in dieser Arbeit bevorzugt wird.

Und die Anzahl der formal unterscheidbaren Systeme vom Typ C (ob ein Monom mit Parameter auftritt oder nicht) ist mit 2^{18} schon nicht mehr zu handeln.

Ganz zu schweigen von den maximal möglichen 30 Monomen und Parametern.

Und beim Grad 3 hätten wir 60 Monome mit 60 Parametern, also 2^{60} formal unterscheidbare Systeme. Das Chaossystem hat 10 Monome und 5 Parameter.

Anmerkungen zu den numerischen Simulationen.

Es gibt im drei-dimensionalen Phasenraum komplizierte Trajektorien, die trotzdem kein Chaos sind. Das bringt ein Sattel-Fokus manchmal so mit sich. Oder ein Torus. Oder eine Ruine. Der optische Eindruck ist nützlich, mehr nicht. Und ein nur wenig positiver Lyapunov-Exponent ist kein Beweis. Es gibt sogar Forscher, die die Rolle der Lyapunov-Exponenten ganz bezweifeln.

Eine Serie von Periodenverdopplungen darf nicht zu dem voreiligen Schluss: CHAOS! verleiten. Eine halbwegs sichere Entscheidung kann zwar der Lyapunov-Exponent $\lambda_1 > 0.001$ liefern. Aber auch der beruht auf einer numerischen Berechnung und die ist beim Chaos immer fehlerbehaftet. Faustregeln sind in der Mathematik unzulässig (manchmal aber nicht ganz).

Prüfen sie, ob sich bei Verdopplung der Simulationszeit der gleiche Wert ergibt. Verwenden sie verschiedene Programme zur Berechnung von λ_1.
Benutzen sie den Mittelwert von mehreren Startwerten, im Zweifelsfall vielen. Stark streuende positive Werte sprechen dann eher für eine Chaos-Ruine. Unterschiedliche, aber stark gehäuft auftretende Resultate sprechen für die (seltene) Koexistenz von zwei getrennten chaotischen Attraktoren.

Eine Information über die Güte der Berechnung der Lyapunov-Exponenten ist λ_2 . Er sollte Null sein, wenn nicht, ist er ein Maß für den numerischen Fehler.

Zur Häufigkeit von Chaos.

In mehr als drei Viertel der betrachteten Systeme wurde Chaos gefunden. Das ist überraschend viel. Zumal in den restlichen Systemen auch noch Chaos existieren kann, aber (noch) nicht gefunden wurde.

Andererseits sind die untersuchten Systeme alle ähnlich aufgebaut: Man nimmt ein ebenes System mit Grenzzyklen und koppelt ein pendelndes Polynom als dritte Dimesion dazu. Das klappt häufig.

Die Behauptung, dass Chaos doch ziemlich selten ist, bezieht sich hier eher auf die Parametergebiete in diesen Systemen. Und die sind fast immer klein. Und dazu noch auf die zugehörigen Attraktionsgebiete im 3-D-Phasenraum. Die sind manchmal auch sehr klein. Und beides kann zusammen auftreten.

So gesehen ist Chaos eben doch ziemlich selten. Und oft nicht leicht zu finden.

Mit Sicherheit wurden hier sowohl Parametergebiete als auch Attraktionsgebiete übersehen. So sind nichtlineare dynamische Systemen eben.

Die hier aufgelisteten Beispiele sind deshalb nur als ein Anfang zu verstehen. Machen sie die Sachen fertig, beseitigen sie die Fehler, suchen sie neue Wege ins Chaos. Finden sie schönere Routen. Finden sie bessere Plots.
Und vor allem: Finden sie neue Chaos-Systeme. Jeder kann Chaos.

Warum Python?

Alle hier vorgeführten Chaos-Beispiele können nachgerechnet werden. Alle Parameter-Werte sind angegeben. Allerdings nicht die manchmal wichtigen Startwerte für die Lösung der Anfangswert-Probleme. Das würde den Rahmen einer populärmathematischen Arbeit sprengen. Das können sie aber leicht verschmerzen, wenn sie ein benutzerfreundliches Programm benutzen.

Für die Lösung von Systemen von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es fertige Programm-Pakete, auch mit Grafik-Ausgabe. Manches ist Open Source und im Internet abgreifbar, manches nicht.
Aber ohne gute Software und einen schnellen Rechner wird es nicht gehen.

In dieser Schrift wurde mehrfach die Programmiersprache Python erwähnt. Das müssen sie nicht beachten, aber sie können es. Python ist frei und es existieren viele sehr nützliche Quelltexte im Internet. Und dokumentierte Bibliotheken. Und Foren. Und Tausende Bücher. Beim Googeln nach 'Python Lyapunov Chaos' kommen Tausende Treffer. Ihre KI wartet schon auf einen Chat.

Python gibt es für Linux und Windows, sogar für Android (Pydroid 3). Python kann auf einem Laptop installiert werden, auch auf einem Tablet. Sogar ein flottes Smartphone sollte es tun (wenn sie es unbedingt wollen).

Dass C++ etwas schnelleren Code erzeugt, ist bekannt. Entscheiden sie selbst.

Aus den Beispielen wird klar, wie die Chaossuche weiter gehen könnte:

- Einbinden des Pendel-Polynoms in die zweite Differentialgleichung. Das hat hier in zahlreichen Beispielen bereits funktioniert.
- Addition (statt Subtraktion) des Pendel-Polynoms in den ersten beiden Differentialgleichungen. Auch das wurde in Beispielen bereits demonstriert.
- Erweiterung des Bereiches der Parameter und Variablen auf negative Werte. Das liefert in der Tat oft neues Chaos. Wir liefern die Beispiele.
- Zulassen leichter Unterschiede zwischen den pendelden Polynomen. Damit geht die Übernahme der Resultate des Basissystems zwar verloren. Aber es funktioniert im Prinzip. Beispiele werden hier geliefert.
- Man kann Polynome vierten Grades zulassen. Vier (nicht mitzählende) Beispiele dazu folgen sofort. Übrigens sind Dutzende Beispiele dieser Sammlung vom Grad 2, zum Beispiel die Beispiele 235 bis 245.
- Noch allgemeiner ist der Ansatz, andere Basissysteme zu verwenden, z.B. den Van der Pol-Oszillator oder das FitzHugh-Nagumo-Modell. Oder den Brusselator. Oder ein Lotka-Volterra-System. Auch das ging schon.

Die Anzahl der möglichen neuen Chaos-Systeme ist deshalb gewaltig. Vorsichtig geschätzt, Hunderte. Worauf warten sie? Jeder kann Chaos!

Beispiel 4GR ist besonders. Wir erhöhen im autokatalytischen Term die Potenz. Das ergibt den Grad 4, nur als Ausnahme. Wir tun das aber auch, weil das Beispiel die seltene Route ins Chaos aus quasi-periodischen Trajektorien realisiert. Das Pendel-Polynom ist das Original vom Chaossystem:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bx - xy^3 - (exy - z)$$
$$\frac{dy}{dt} = a\,(xy^3 + d - y)$$
$$\frac{dz}{dt} = f\,(exy - z)$$

Die stationären Zustände sind numerisch zu bestimmen aus:

$$y^4 - (1+d)y^3 + by - bd = 0 \qquad x = (y-d)/y^3 \qquad z = exy$$

Chaos existiert. Es entsteht durch die Ruelle-Takens-Newhouse-Route.

Das Chaos-Intervall des Parameters a ist durchaus groß, aber die anderen Parameter sind speziell, nicht so leicht zu finden.

Numerisch ist das Beispiel relativ gutmütig. Die Lyapunov-Exponenten der Chaos-Attraktoren sind anfangs klein, aber später deutlich positiv.

a	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
5.26	Ein einfacher Grenzzyklus.	
5.28	Ein Torus.	0.0
5.61	Ein Torus.	0.0
6.34	Ein Torus.	0.0
7.262	Chaos.	0.010
7.28	Ein 9-facher Grenzzyklus.	
7.38	Ein 18-facher Grenzzyklus.	
7.40	Ein 36-facher Grenzzyklus.	
7.42	Ein 72-facher Grenzzyklus.	
7.43	Ein 18-faches Chaos-Band.	0.004
7.46	Ein 9-faches Chaos-Band.	0.009
7.50	Chaos.	0.019

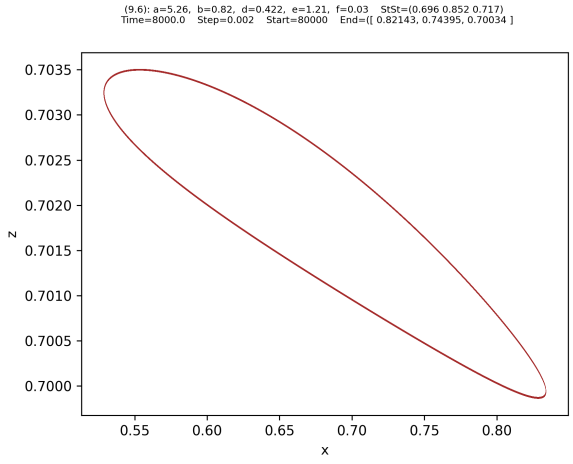
Ausgewählte stationäre Trajektorien von **Beispiel 4GR** für $b = 0.82$, $d = 0.422$, $e = 1.21$, $f = 0.03$ und zunehmende Werte von a.

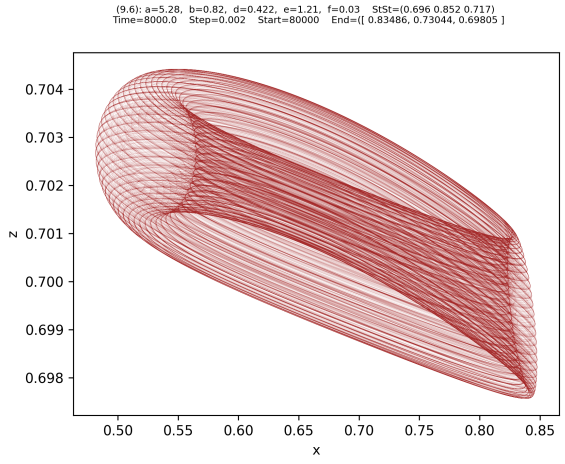
Ein einfacher Grenzzyklus expandiert durch eine verallgemeinerte Hopf-Bifurkation zu einem Torus. Dann erfolgt die ”Torus breakdown route”. Der Torus zerfällt dabei zu Chaos, das hier seinerseits zu einem 9-facher Grenzzyklus zerfällt. Danach folgt eine Feigenbaum-Route in neues Chaos. Die Zählung der Faltung ist willkürlich, sie ergibt sich aus der Darstellung in der x-z-Ebene.

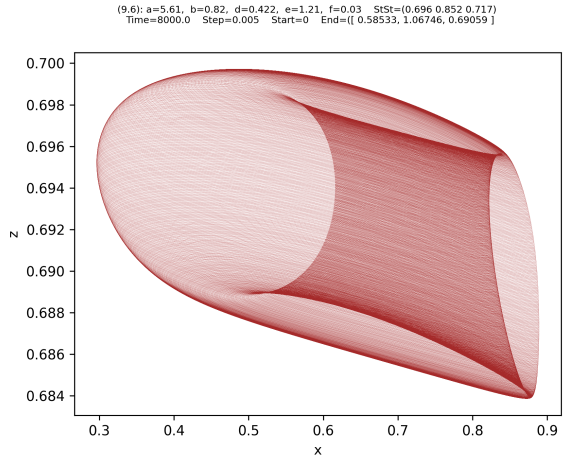
a	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
7.65	Ein 10-facher Grenzzyklus.	
7.85	Ein 20-facher Grenzzyklus.	
7.90	Ein 40-facher Grenzzyklus.	
8.40	Chaos.	0.065
8.70	Ein 11-facher Grenzzyklus.	
8.98	Ein 22-facher Grenzzyklus.	
9.00	Ein 44-facher Grenzzyklus.	
9.05	Chaos.	0.043
10.0	Chaos.	0.075
15.0	Ein 7-facher Grenzzyklus.	
20.0	Ein 6-facher Grenzzyklus.	
25.0	Ein 3-facher Grenzzyklus.	

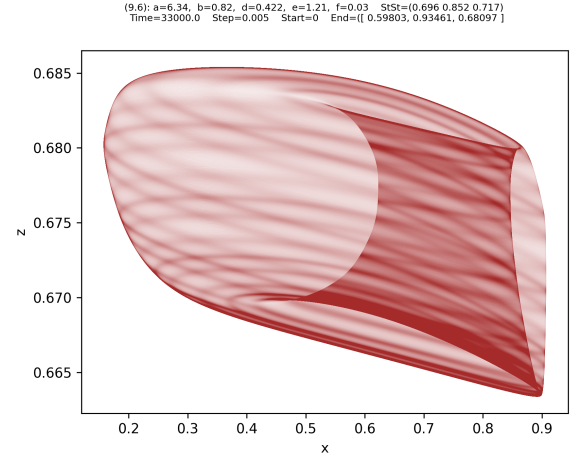
Ausgewählte stationäre Trajektorien von **Beispiel 4GR** für $b = 0.82$, $d = 0.422$, $e = 1.21$, $f = 0.03$ und zunehmende Werte von a.

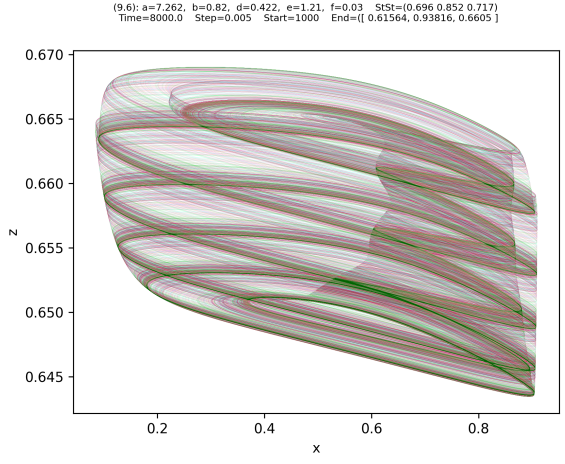
Ein 10-facher Grenzzyklus verdoppelt sich per Feigenbaum ins Chaos. Das Chaos zergeht zu einem 11-fachen Grenzzyklus, auch der verdoppelt sich per Feigenbaum ins Chaos. So geht das weiter, aber ohne uns. Es werden hier nur noch einige Grenzzyklen angezeigt. Dazwischen ist noch ganz viel Chaos. Dass auch ein System mit Polynomen 4. Grades Chaos kann, war zu erwarten.

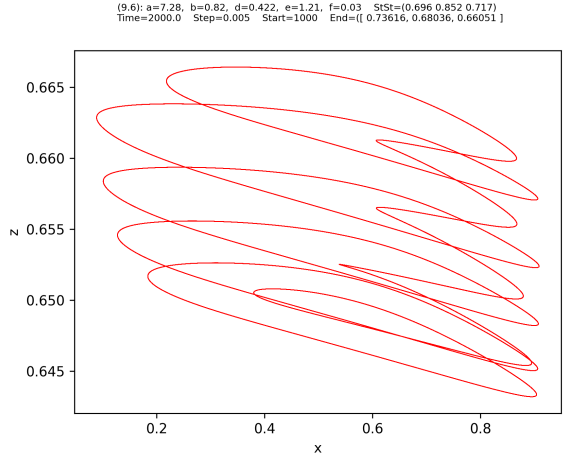






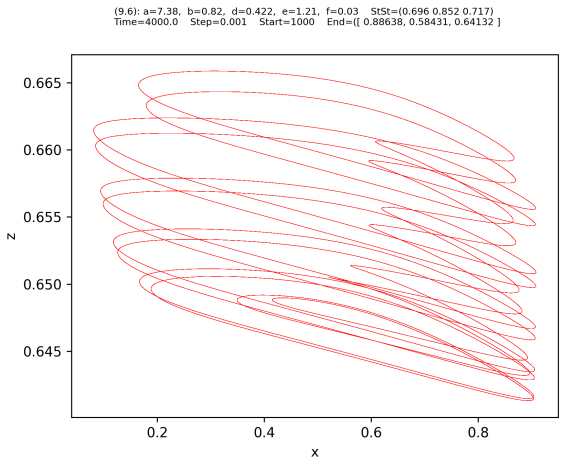


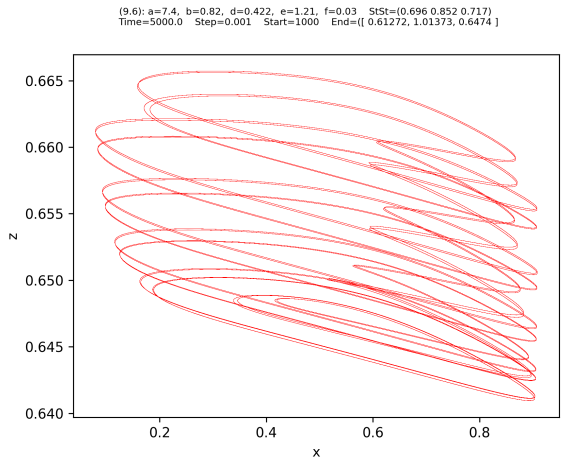


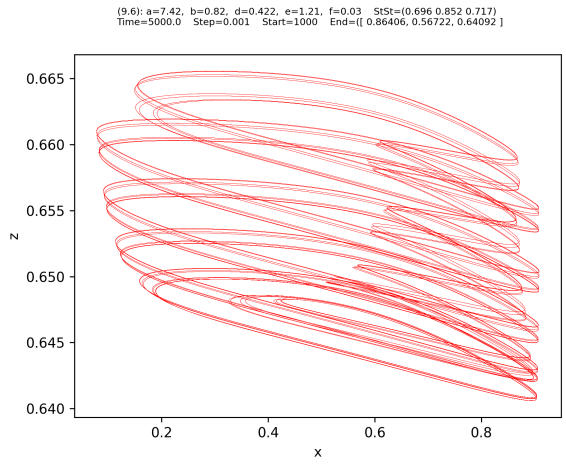


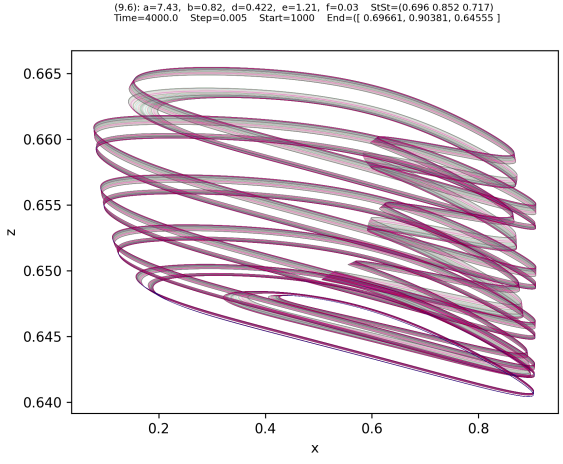
Legende: x-z-Plots zu **Beispiel 4GR** für $b = 0.82$, $d = 0.422$, $e = 1.21$, $f = 0.03$ und wachsende Werte von a (die oberen sechs Zeilen der ersten Tabelle).

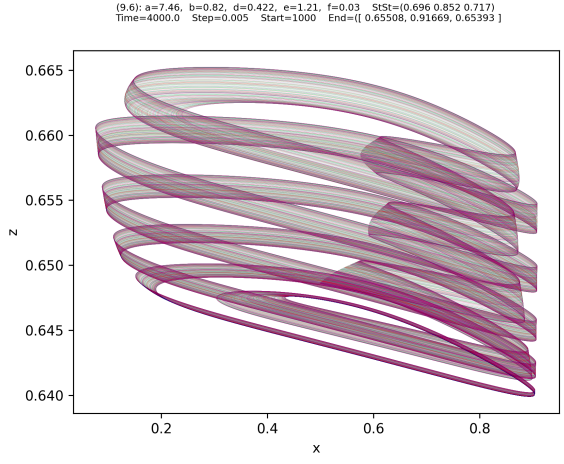
Ein Grenzzyklus dehnt sich aus zu einem Torus (Bilder 1 und 2). Quasi-periodische Trajektorien treten auf (Bilder 2 bis 4). Der Torus implodiert zu Chaos (Bild 5). Das Chaos vergeht zu einem neunfachen Grenzzyklus (Bild 6), dem Anfang von Feigenbaum.

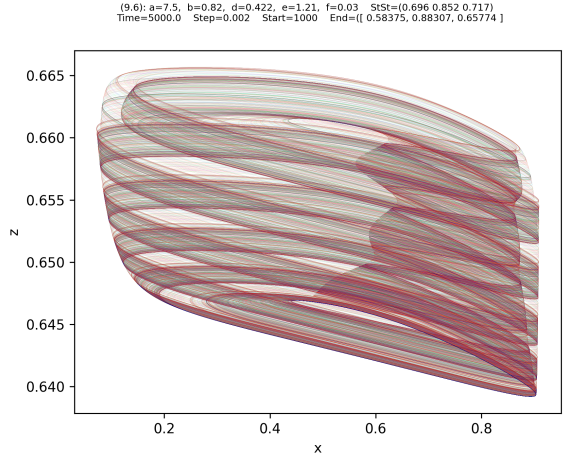






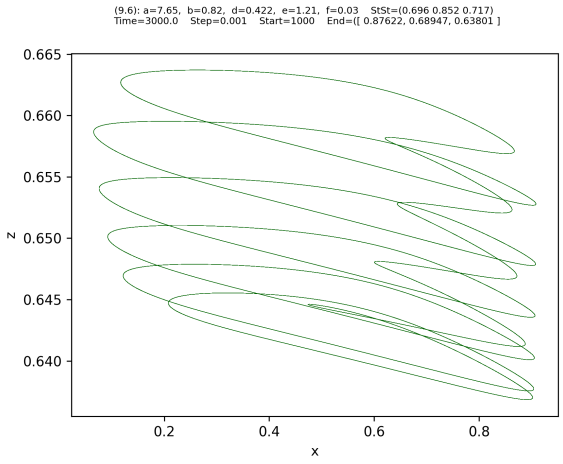


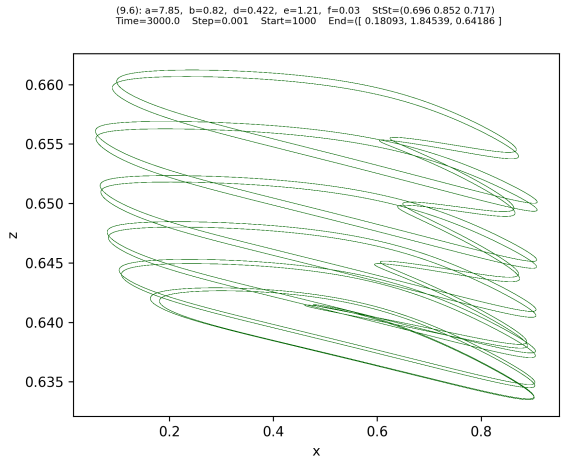


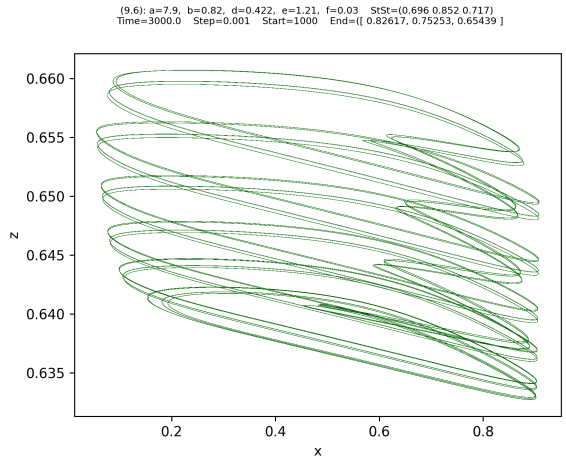


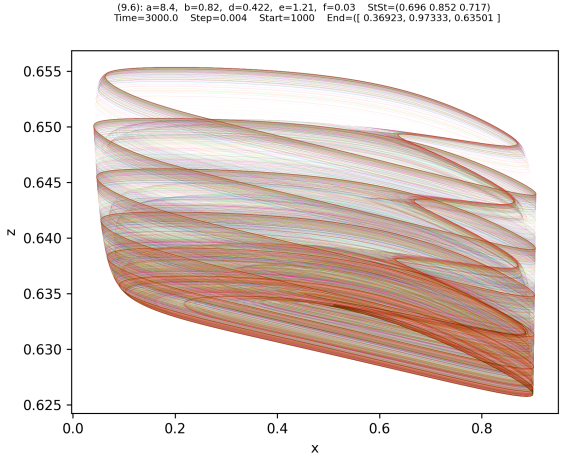
Legende: x-z-Plots zu **Beispiel 4GR** für $b = 0.82$, $d = 0.422$, $e = 1.21$, $f = 0.03$ und wachsende Werte von a (die unteren sechs Zeilen der ersten Tabelle).

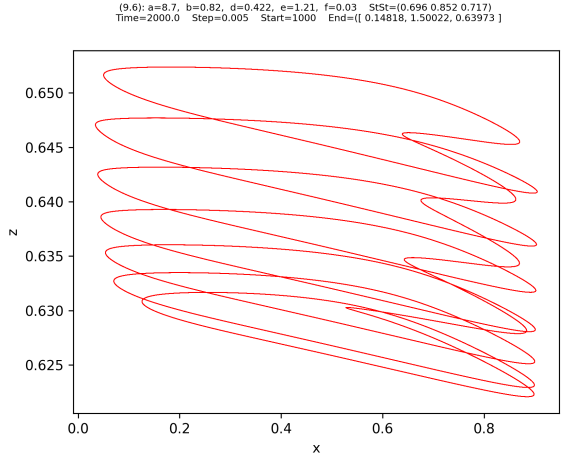
Eine Feigenbaum-Route führt in neues Chaos (Bilder 1 bis 6). Gezeigt werde 18-fache, 36-fache und 72-fache Grenzzyklen. Dann folgen 18-fache und 9-fache Chaos-Bänder (Bilder 4 und 5). Dann das neue kompakte Chaos.

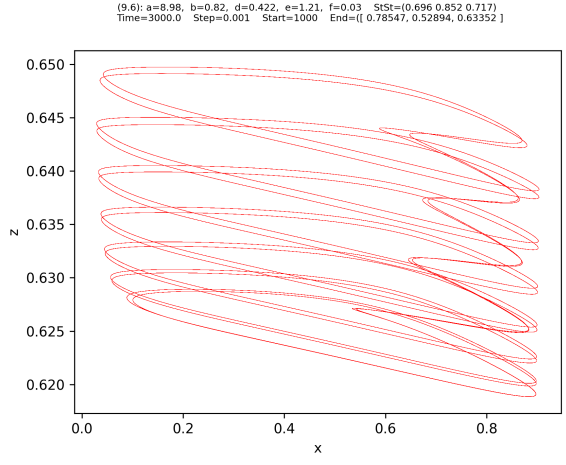






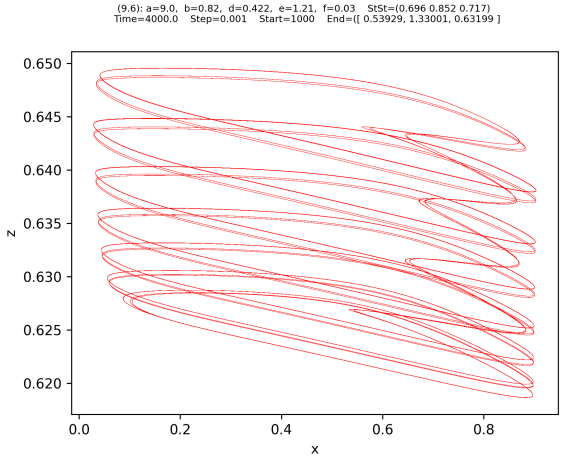


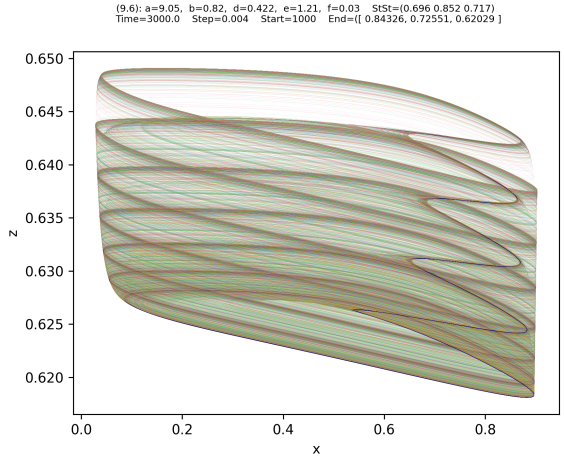


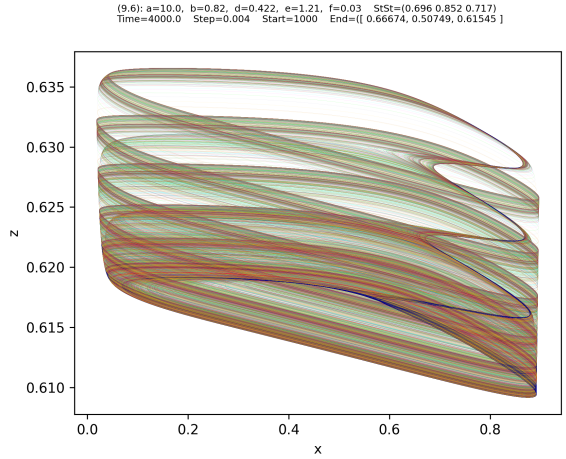


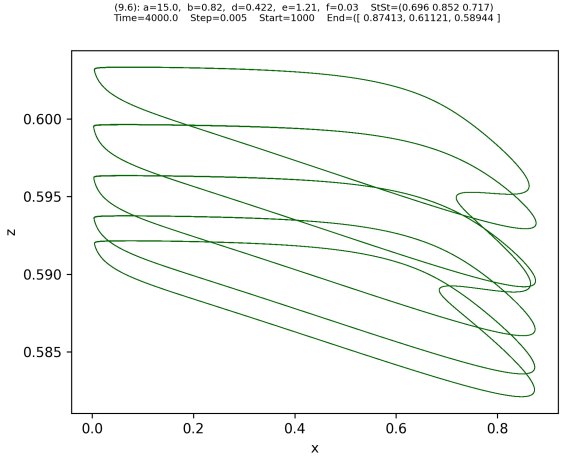
Legende: x-z-Plots zu **Beispiel 4GR** für $b = 0.82$, $d = 0.422$, $e = 1.21$, $f = 0.03$ und wachsende Werte von a (die oberen sechs Zeilen der zweiten Tabelle).

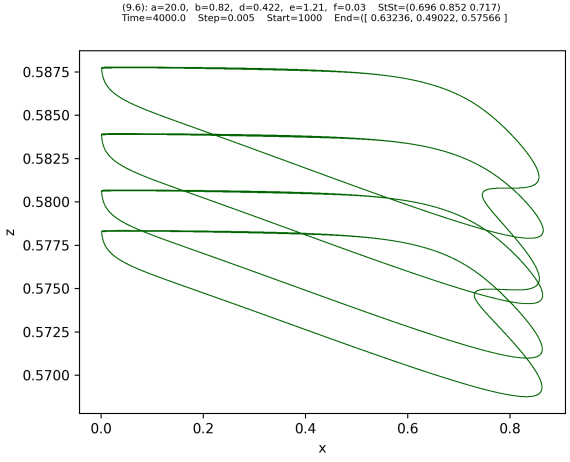
Ein 10-facher Grenzzyklus taucht auf (Bild 1) und beginnt eine Feigenbaum-Route. Gezeigt werden 20-fache und 40-fache Grenzzyklen (Bilder 2 und 3) und Chaos (Bild 4). Das Chaos vergeht und ein 11-facher Grenzzyklus (Bild 5) taucht auf und beginnt die nächste Feigenbaum-Route. So geht das immer weiter.

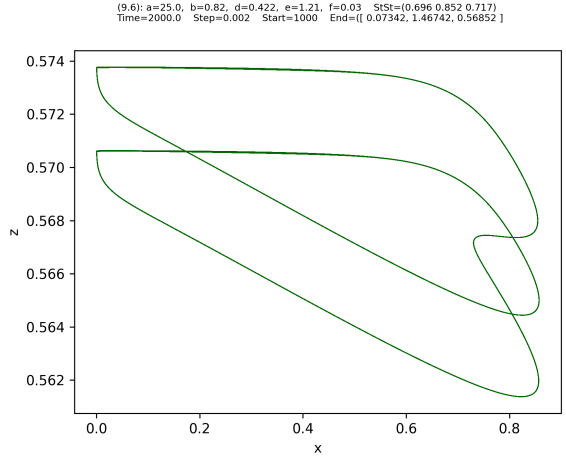












Legende: x-z-Plots zu **Beispiel 4GR** für $b = 0.82$, $d = 0.422$, $e = 1.21$, $f = 0.03$ und wachsende Werte von a (die unteren sechs Zeilen der zweiten Tabelle).

Ein 44-facher Grenzzyklus (Bild 1) führt in das nächste Chaos (Bilder 2 und 3). Danach treten weitere Grenzzyklen und Chaos auf. Gezeigt werden siebenfache, sechsfache und dreifache Grenzzyklen gezeigt (Bilder 4 bis 6). Dazwischen gibt es noch viel weiteres Chaos. Das betrachtete Intervall endet hier. Grad 4 geht also auch.

Das **Beispiel x70** modelliert eine chemische Reaktion (Shabunin et al. [36]). Dort wird ein Sinus-Term addiert, bei uns ein lineares Pendel-Polynom:

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2y^2 + ax(1 - x - y) + (ex - z)$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2y^2 - by(1 - x - y)$$
$$\frac{dz}{dt} = f\,(ex - z)$$

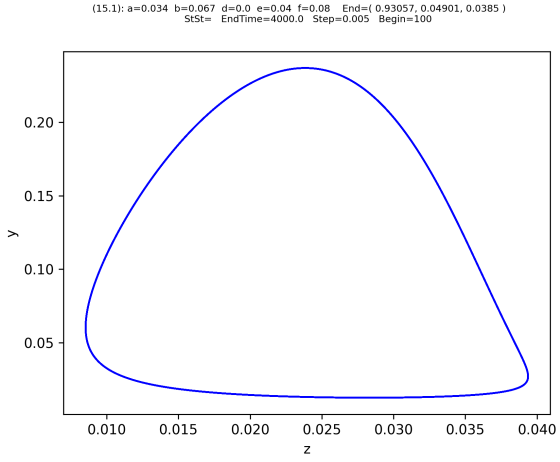
Beispiel x70 hat einen Term 4. Grades, eine Ausnahme. Es zeigt, so geht es auch. Das System hat 4 stationäre Zustände, davon liegen 3 auf den Achsen. Auch für den Vierten wird eine Formel angegeben. Das brauchen wir nicht.

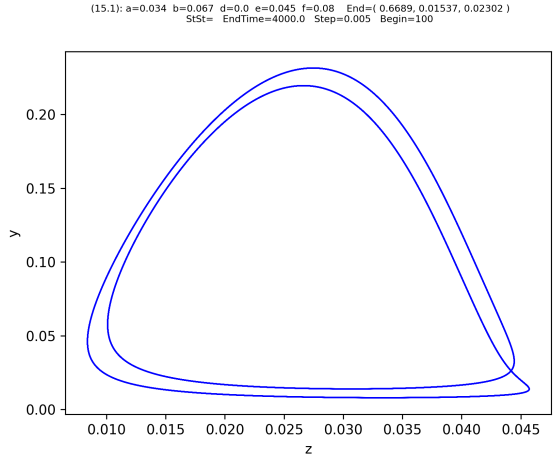
Das Basissystem von Shabunin enthält nur zwei Parameter. Trotzdem ist die Suche nach Chaos nicht leicht. Die stationären Zustände sind in großen Parameter-Gebieten stabil. Das erschwert die Suche nach Grenzzyklen. Und wenn alle stationären Zustände instabil sind, streben fast alle Trajektorien in die Unendlichkeit. Das gefundene Chaos-Intervall ist klein und existiert in Koexistenz mit einem stabilen stationären Zustand. Es gibt eine Feigenbaum-Route und das Vergehen des Chaos in einer Periode-3-Route.

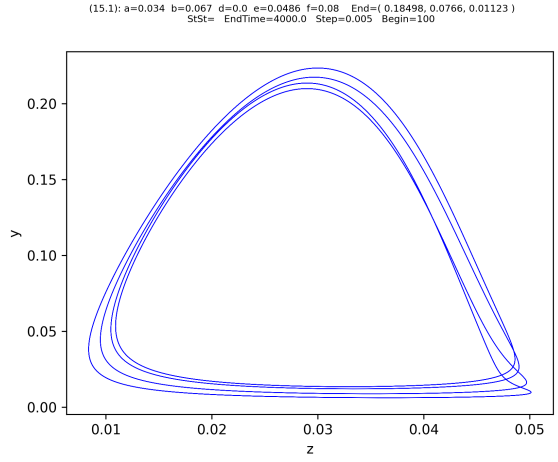
e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
0.040	Ein einfacher Grenzzyklus.	
0.045	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
0.0486	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
0.0488	Ein achtfacher Grenzzyklus.	
0.049	Ein 16-facher Grenzzyklus.	
0.052	Ein gefaltetes Chaos-Band.	0.001
0.0525	Ein 5-facher Grenzzyklus.	
0.053	Chaos.	0.002
0.0535	Fast das letzte Chaos.	0.001 bis 0.002
0.0537	Ein 12-facher Grenzzyklus.	
0.053	Ein 6-facher Grenzzyklus.	
0.054	Ein 3-facher Grenzzyklus.	

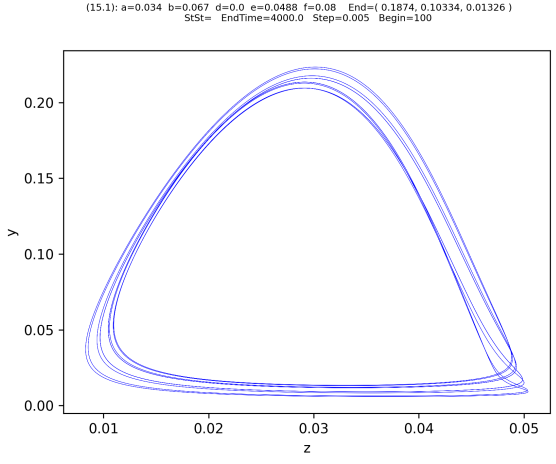
Ausgewählte stationäre Trajektorien von **Beispiel x70** für
$a = 0.034$, $b = 0.067$, $f = 0.08$ und wachsende Werte von e.

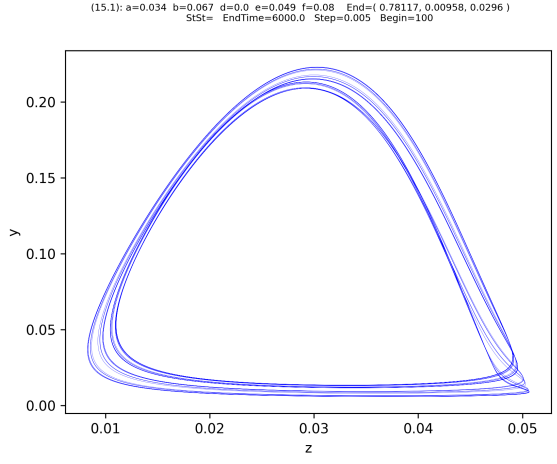
Das Parameter-Intervall mit Chaos ist extrem klein, die chaotischen Attraktoren sind dünn und schmal. Sie ändern ihre Ring-Form nur wenig.
Die Feigenbaum-Route ist deutlich. Es gibt (mindestens) ein Fenster im Chaos. Es endet in einer Periode-3-Route. Sie geht rückwärts und endet im Nichts.
Die Lyapunov-Exponenten streuen an $e = 0.0535$ besonders stark.

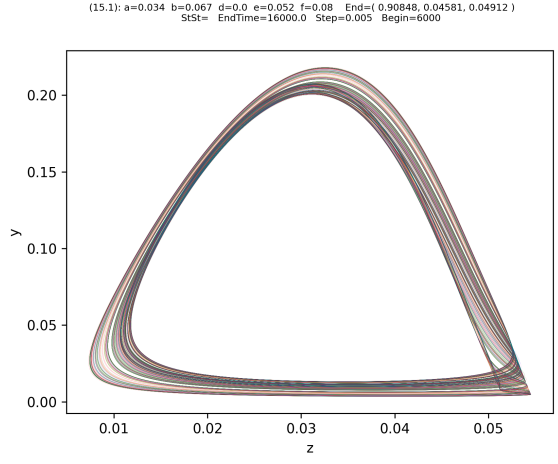






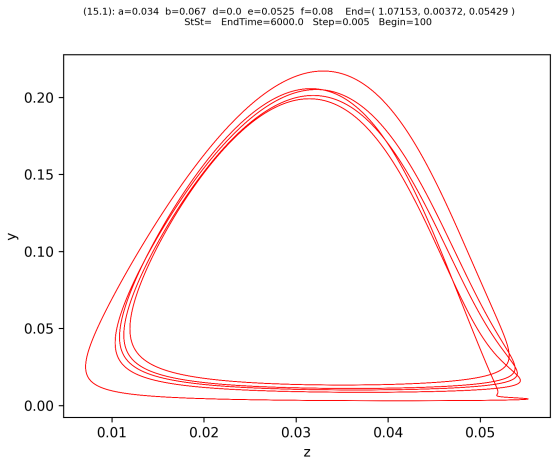


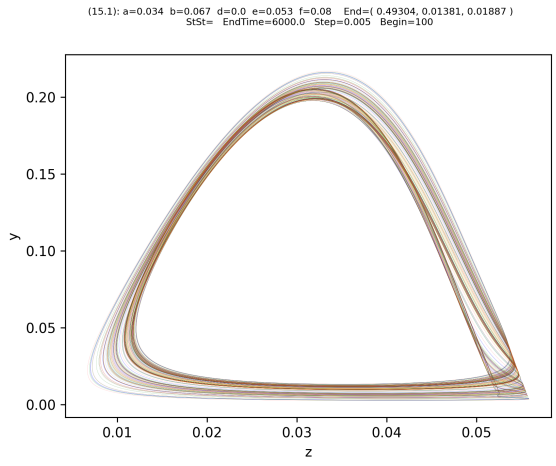


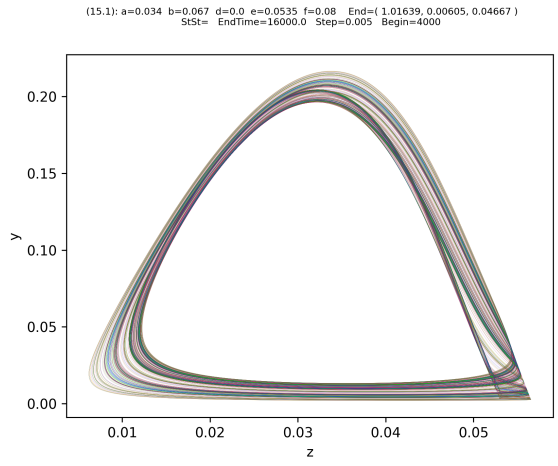


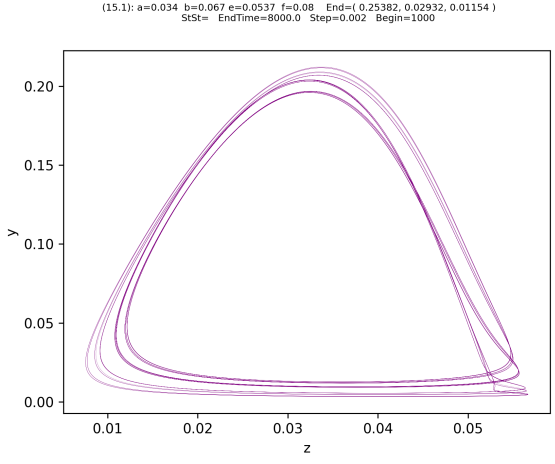
Legende: z-y-Plots zu **Beispiel x70** für $a = 0.034$, $b = 0.067$, $f = 0.08$ und wachsende Werte von e (die oberen sechs Zeilen der Tabelle).

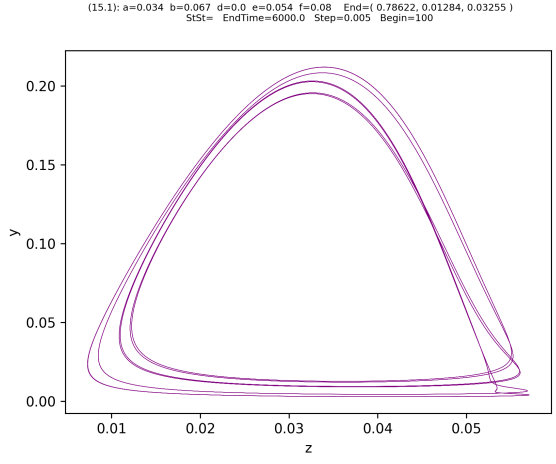
Es beginnt mit einer Verdopplungskaskade (Bilder 1 bis 5). Die Faltungen sind deutlich und erzeugen ein einmal gefaltetes sehr schmales Chaos-Band (Bild 6). Der Attraktor hat ein sehr kleines Attraktionsgebiet. Das macht die Berechnung der Lyapunov-Exponenten zusätzlich schwierig und zum Teil ungenau.

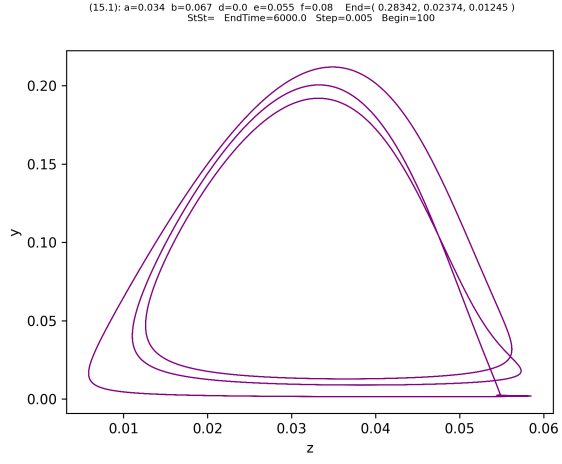












Legende: z-y-Plots zu **Beispiel x70** für $a = 0.034$, $b = 0.067$, $f = 0.08$ und wachsende Werte von e (die unteren sechs Zeilen der Tabelle).

Im Chaos-Intervall liegt ein Fenster mit Periode-5-Grenzzyklen (Bild 1, rot).
Die Attraktoren ändern ihre Form und Lage im Raum fast gar nicht (Bilder 2 und 3).
Danach läuft eine Periode-3-Halbierungskaskade ab (Bilder 4 bis 6, purpur).

Beispiel x147 setzt die Betrachtung der chemischen Reaktion in Beispiel x70 (Shabunin et al. [36]) fort. Jetzt aber mit einem kubischen Pendel-Polynom:

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2y^2 + ax(1 - x - y) + (ex - z^3)$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2y^2 - by(1 - x - y)$$
$$\frac{dz}{dt} = f\,(ex - z^3)$$

Das Beispiel hat einen Term 4. Grades, aber nur quadratische Faktoren.
Das System hat 4 stationäre Zustände, davon liegen 3 auf den Achsen.
Auch für den Vierten existieren Formeln, aber wir brauchen alle nicht.

Das Basissystem von Shabunin enthält nur 2 Parameter, a und b. Daher ist die Chance von Chaos gering. Die stationären Zustände sind in großen Parameter-Gebieten stabil. Das erschwert das Auftreten von Grenzzyklen. Und wenn die stationären Zustände instabil sind, streben fast alle Trajektorien in die Unendlichkeit. Das gefundene Chaos-Intervall ist klein und existiert in Koexistenz mit einem stabilen stationären Zustand. Es gibt Feigenbaum-Routen und eine Periode-3-Route. Immerhin.

a	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
0.040	Ein einfacher Grenzzyklus.	
0.060	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
0.068	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
0.070	Ein achtfacher Grenzzyklus.	
0.071	Ein 2-faches Chaos-Band.	0.002
0.072	Ein 12-facher Grenzzyklus.	
0.073	Chaos.	0.004
0.078	Chaos.	0.004
0.082	Ein dreifacher Grenzzyklus.	
0.084	Ein sechsfacher Grenzzyklus.	
0.0846	Ein 12-facher Grenzzyklus.	
0.0848	Ein 6-faches Chaos-Band.	0.001

Ausgewählte stationäre Trajektorien von **Beispiel x147** für $b = 0.082,\ e = 0.075$ $f = 0.34$ und wachsende Werte von a.

Es beginnt mit einem einfachen Grenzzyklus und einer Feigenbaum-Route. Nach Erreichen der Phase der 2-fachen Chaos-Bänder gibt es ein Fenster mit 12-fachen Grenzzyklen, aber letztlich erscheint doch kompaktes ringförmiges Chaos.

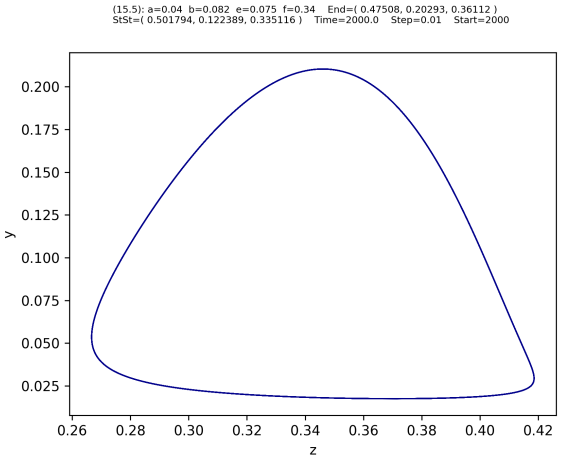
Das Chaos vergeht in einem Periode-3-Grenzzyklus, der eine Periode-3-Route beginnt.

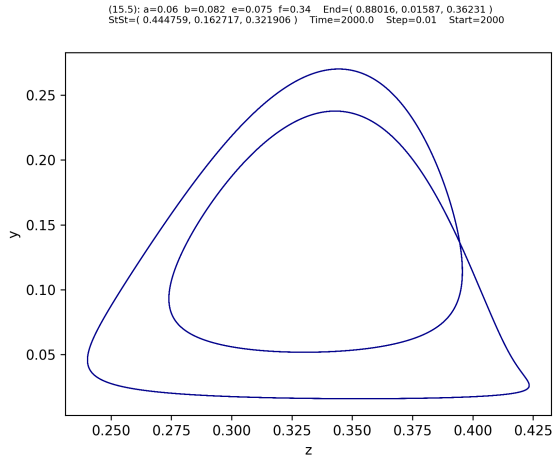
Die Lyapunov-Exponenten sind alle relativ klein, die Attraktoren aber deutlich.

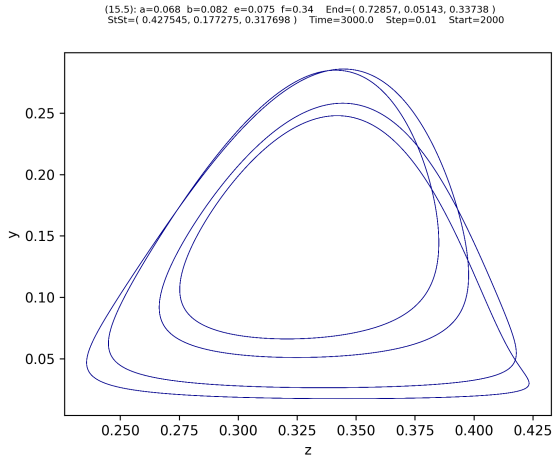
a	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
0.0856	Ein 3-faches Chaos-Band.	0.003
0.086	Chaos.	0.003
0.102	Chaos.	0.005
0.105	Ein 10-facher Grenzzyklus.	
0.1054	Ein 2-faches Chaos-Band.	0.002
0.1057	Ein 12-facher Grenzzyklus.	
0.1058	Ein 4-faches Chaos-Band.	0.001
0.1061	Ein 16-facher Grenzzyklus.	
0.1064	Ein achtfacher Grenzzyklus.	
0.107	Ein vierfacher Grenzzyklus .	
0.111	Ein zweifacher Grenzzyklus	
0.130	Ein einfacher Grenzzyklus.	

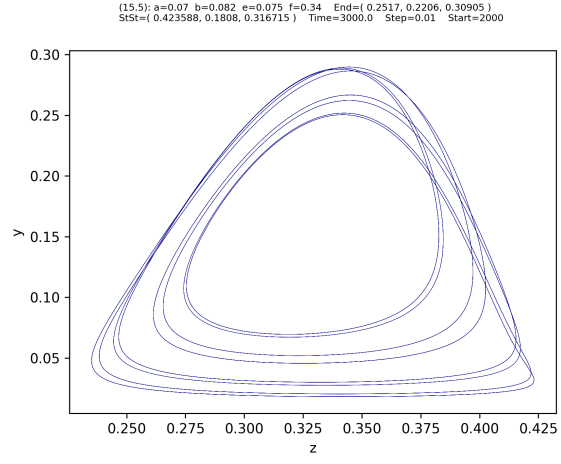
Ausgewählte stationäre Trajektorien von **Beispiel x147** für
$b = 0.082$, $e = 0.075$, $f = 0.34$, und wachsende Werte von a.

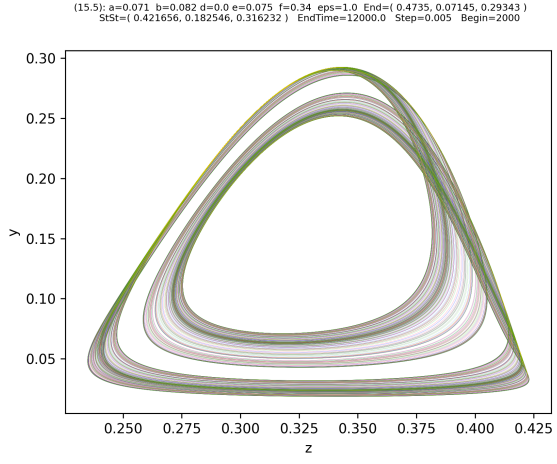
Die Periode-3-Route endet im Chaos. Dann beginnt eine deutliche Feigenbaum-Route rückwärts, zuerst aber Fenster mit 10-fachen und danach mit 12-fachen Grenzzyklen.
Dann der weitere Abbau des Chaos in sich halbierende Grenzzyklen.
Am Ende verbleibt ein einfacher Grenzzyklus. Als wäre nichts geschehen.

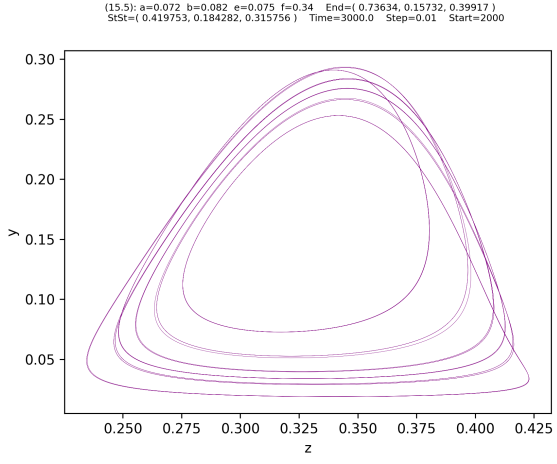






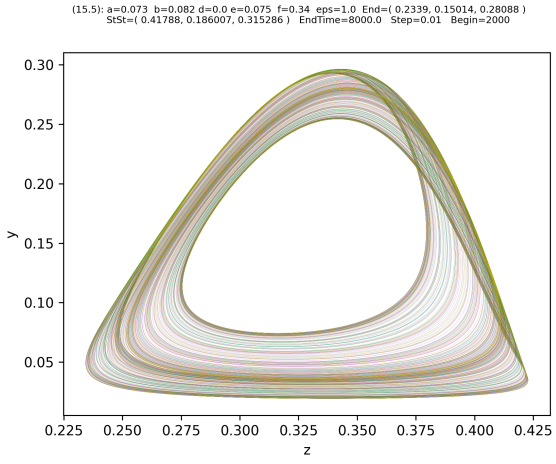


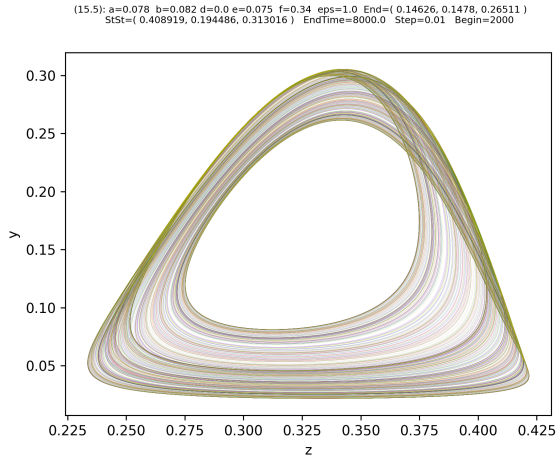


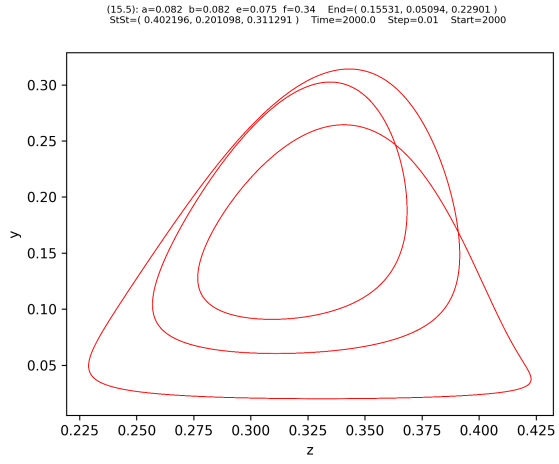


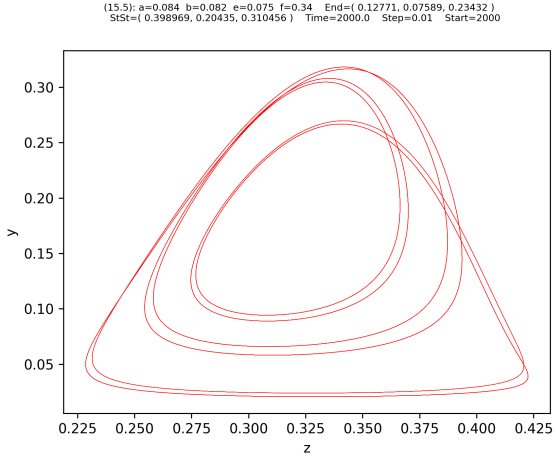
Legende: z-y-Plots zu **Beispiel x147** für $b = 0.82$, $e = 0.075$, $f = 0.34$ und wachsende Werte von a (die oberen sechs Zeilen der ersten Tabelle).

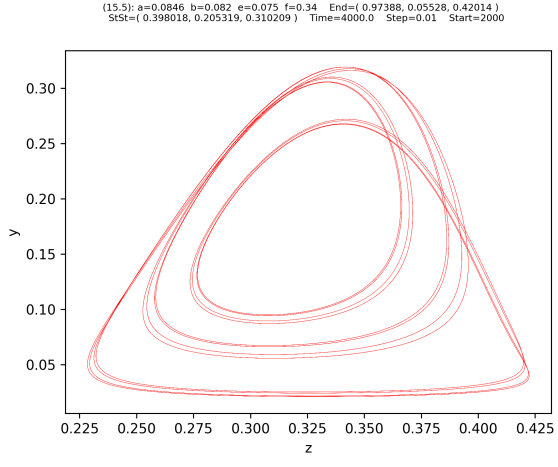
Ein einfacher Grenzzyklus (Bild 1) durchläuft eine Feigenbaum-Route ins Chaos. Gezeigt werden drei Perioden-Verdopplungen (Bilder 1 bis 4). Dann ein 2-faches Chaos-Band (Bild 5) und ein Fenster mit 12-fachen Grenzzyklen (Bild 6).

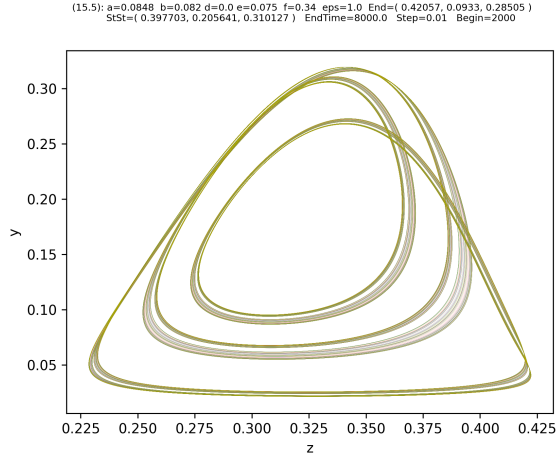






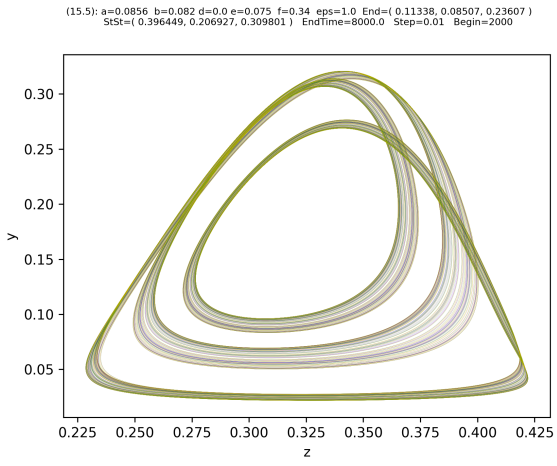


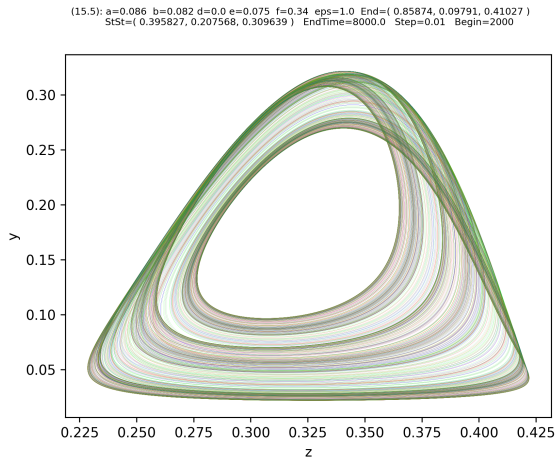


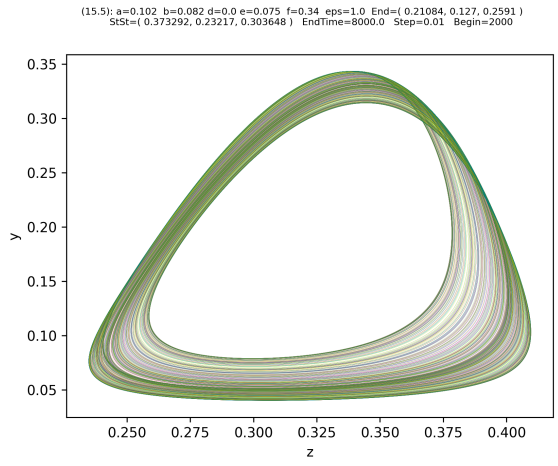


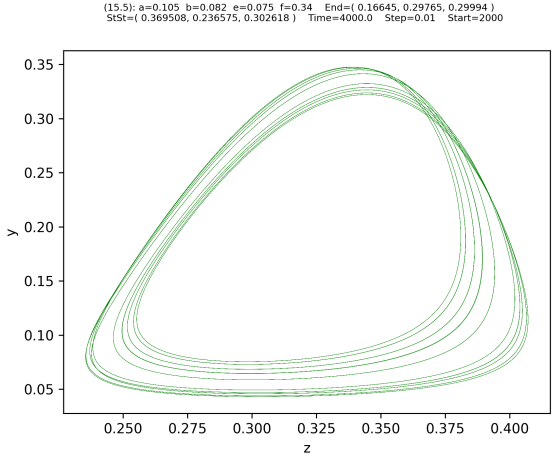
Legende: z-y-Plots zu **Beispiel x147** für $b = 0.82$, $e = 0.075$, $f = 0.34$ und wachsende Werte von a (die unteren sechs Zeilen der ersten Tabelle).

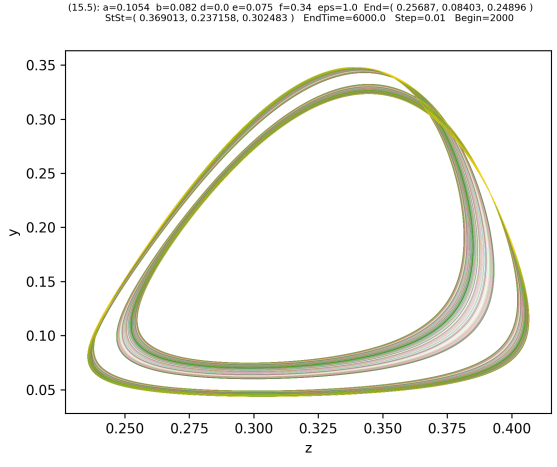
Die Feigenbaum-Route wird beendet (Bilder 1 und 2). Das Chaos bricht zusammen zu einem dreifachen Grenzzyklus (Bild 3). Es beginnt eine Periode-3-Verdopplungskaskade (Bilder 4 und 5) bis zur Phase der 6-fachen Chaos-Bänder (Bild 6).

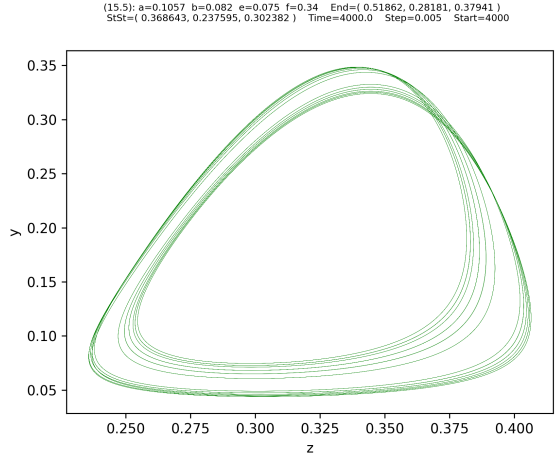






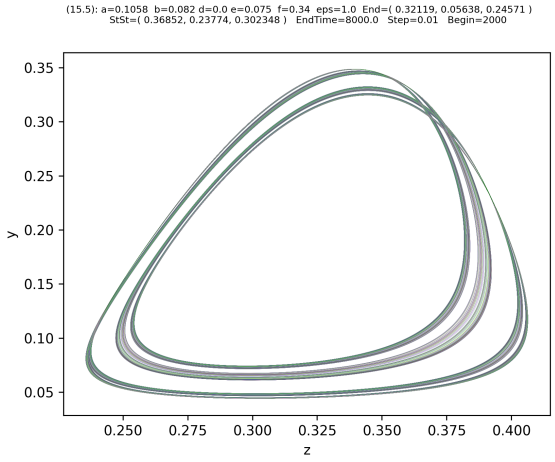


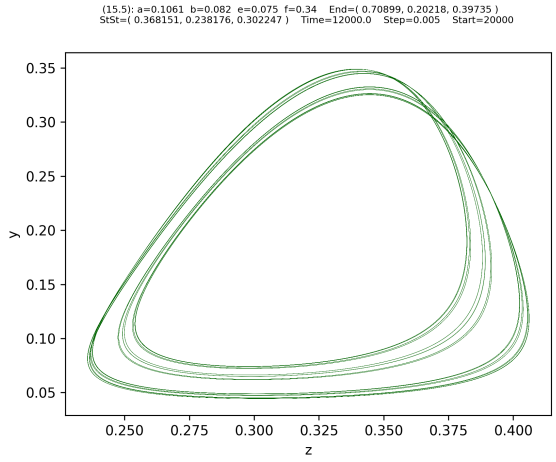


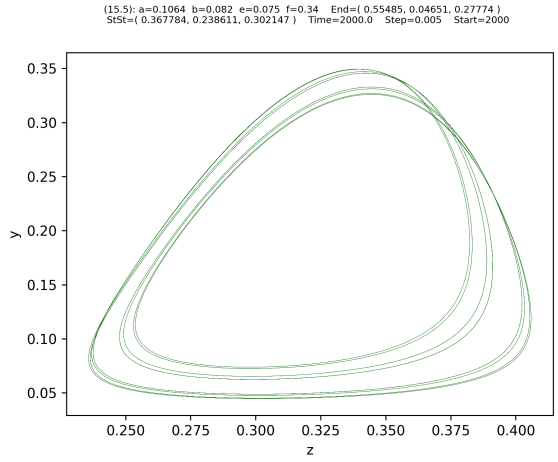


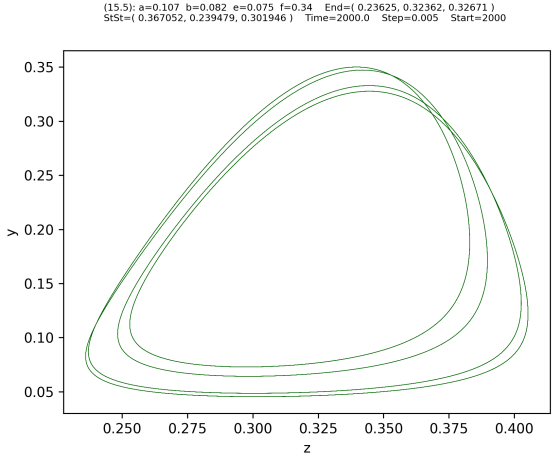
Legende: z-y-Plots zu **Beispiel x147** für $b = 0.82$, $e = 0.075$, $f = 0.34$ und wachsende Werte von a (die oberen sechs Zeilen der zweiten Tabelle).

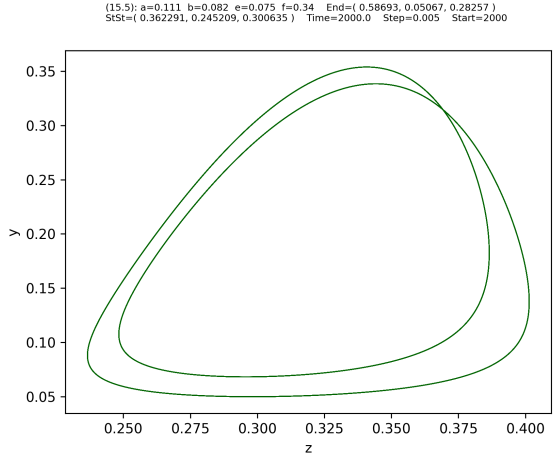
Die Periode-3-Route erreicht die 3-fachen Chaos-Bänder und das Chaos (Bilder 1 bis 3). Es beginnt eine Feigenbaum-Route rückwärts (Bild 5), unterbrochen durch Fenster mit 10-fachen und 12-fachen Grenzzyklen (Bilder 4 und 6).

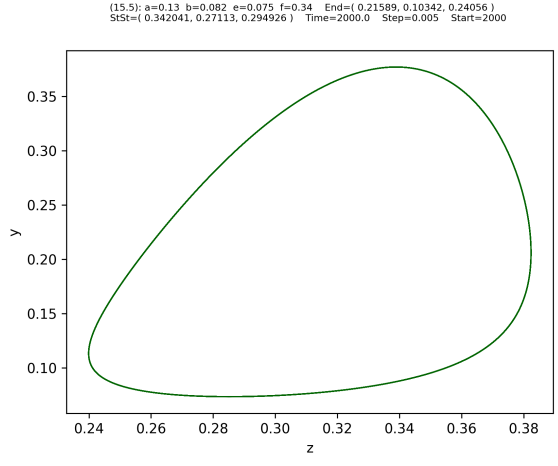












Legende: z-y-Plots zu **Beispiel x147** für $b = 0.82$, $e = 0.075$, $f = 0.34$
und wachsende Werte von a (die unteren sechs Zeilen der zweiten Tabelle).

Die Feigenbaum-Route rückwärts verläuft hier über 4-fache Chaos-Bänder (Bild 1) und sich halbierende Grenzzyklen von Periode 16 bis 1 (Bilder 2 bis 6).

Beispiel x200 setzt die Betrachtung der chemischen Reaktion aus den Beispielen x70 und x147 (Shabunin et al. [36]) mit einem erweiterten und addierten linearen Pendel-Polynom fort:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -2x^2y^2 + ax(1-x-y) + (ex + y - z) \\
\frac{dy}{dt} &= x^2y^2 - by(1-x-y) + d \\
\frac{dz}{dt} &= f\,(ex + y - z)
\end{aligned}$$

Das Beispiel hat ausnahmsweise einen Term 4. Grades, aber nur quadratische Faktoren. Das System hat 4 stationäre Zustände, davon liegen 3 auf den Achsen. Der nicht-triviale Vierte muss numerisch berechnet werden. Aber auch er spielt im Beispiel keine Rolle.

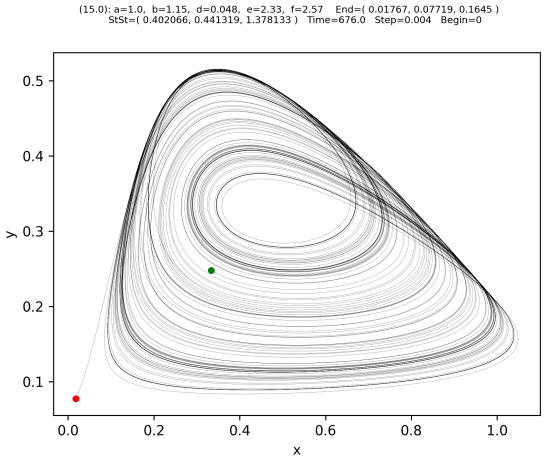
Das Basissystem von Shabunin enthält nur zwei Parameter, a und b. Neu ist d. Die stationären Zustände sind in großen Parameter-Gebieten stabil. Und wenn alle instabil sind, streben fast alle Trajektorien in die Unendlichkeit. Grenzzyklen sind selten. Und damit auch ein Anfang von Chaos. Schwer zu finden.
Es gibt eine Feigenbaum-Route und darin eine Periode-6-Route.

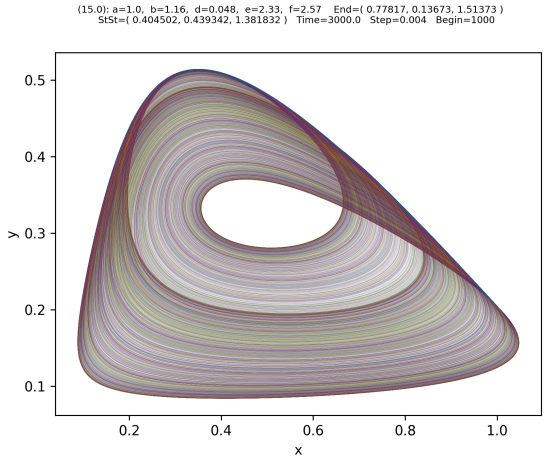
Die Lyapunov-Exponenten sind gut zu berechnen. Ein schönes Beispiel.

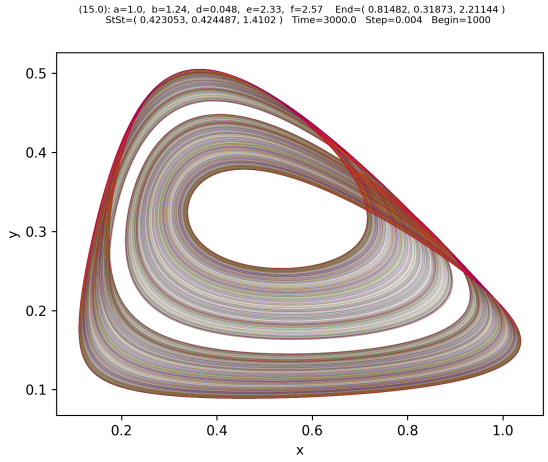
b	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
1.15	Eine Chaos-Ruine.	
1.16	Chaos.	0.070
1.24	Ein 2-faches Chaos-Band.	0.043
1.26	Ein 6-faches Chaos-Band.	0.016
1.2624	Ein 12-facher Grenzzylus.	
1.264	Ein 6-facher Grenzzyklus .	
1.29	Ein 2-faches Chaos-Band.	0.028
1.31	Ein 4-faches Chaos-Band.	0.017
1.32	Ein 8-faches Chaos-Band.	0.007
1.33	Ein achtfacher Grenzzylus.	
1.40	Ein vierfacher Grenzzylus.	
2.00	Ein zweifacher Grenzzylus.	
2.5	Ein einfacher Grenzzylus (ohne Bild).	

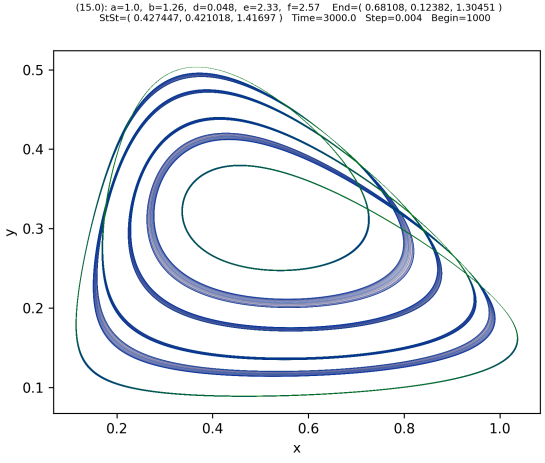
Ausgewählte stationäre Trajektorien von **Beispiel x200** für
$a = 1.0$, $d = 0.048$, $e = 2.33$, $f = 2.57$, und wachsende Werte von b.

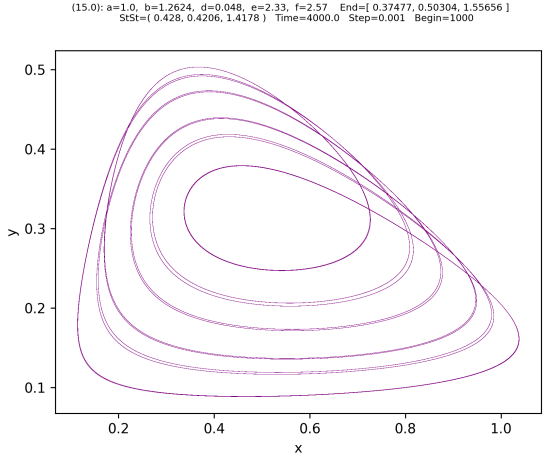
Aus einer Chaos-Ruine entsteht schlagartig Chaos. Das Chaos beginnt eine Feigenbaum-Route rückwärts. In der Etappe der 2-fachen Chaos-Bänder tritt eine Periode-6-Route auf, auch rückwärts. Danach wird die Feigenbaum-Route bis zu einem einfachen Grenzzyklus fortgesetzt. Weitere Fenster sind möglich.

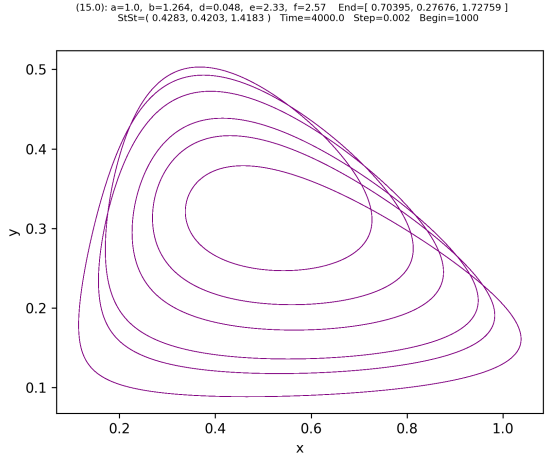






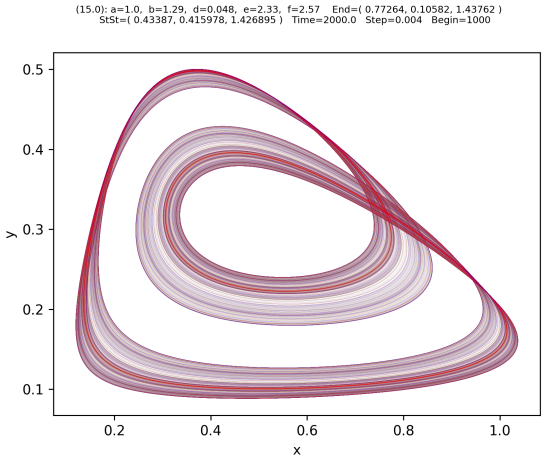


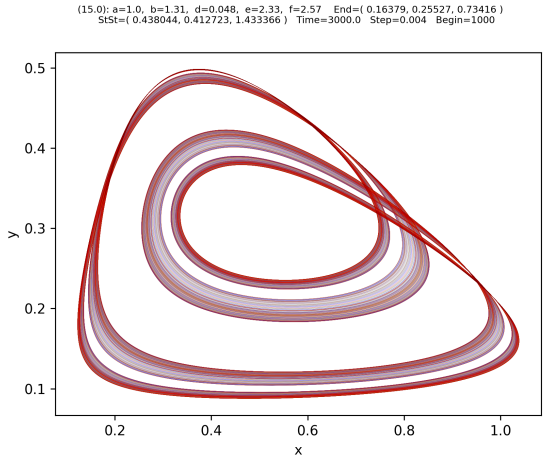


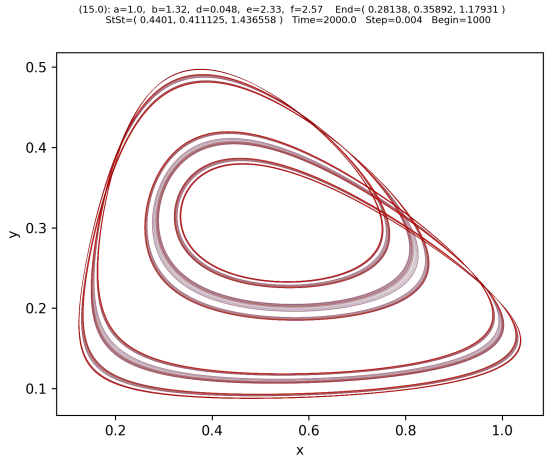


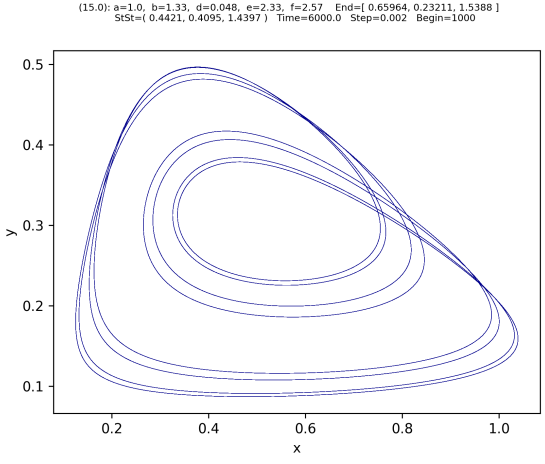
Legende: x-y-Plots zu **Beispiel x200** für $a = 1.0$, $d = 0.048$, $e = 2.33$, $f = 2.57$ und wachsende Werte von b (die oberen sechs Zeilen der Tabelle).

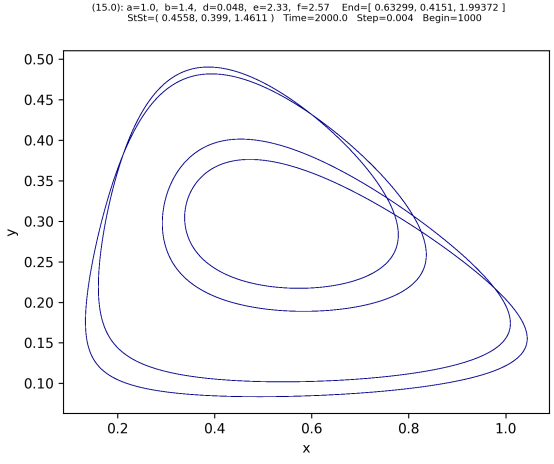
Es beginnt mit einer Chaos-Ruine (Bild 1), die schlagartig Chaos erzeugt (Bild 2). Dann beginnt mit einem 2-fachen Chaos-Band eine Feigenbaum-Route rückwärts (Bild 3). Eine Periode-6-Route rückwärts unterbricht die Route nur kurz (Bilder 4 bis 6).

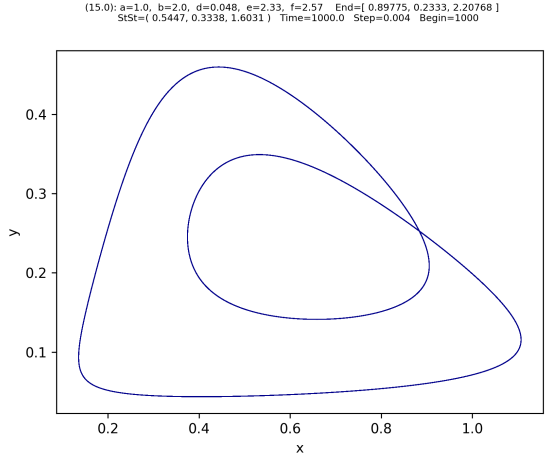












Legende: x-y-Plots zu **Beispiel x200** für $a = 1.0$, $d = 0.048$, $e = 2.33$, $f = 2.57$ und wachsende Werte von b (die unteren sechs Zeilen der Tabelle).

Die Feigenbaum-Route wird bis zum Ende fortgesetzt. Gezeigt werden 2-fache, 4-fache und 8-fache Chaos-Bänder (Bilder 1 bis 3) und achtfache, vierfache und zweifache Grenzzyklen (Bilder 4 bis 6). Der einfache Grenzzyklus am Ende ist weggelassen.

Wie es auch weiter gehen könnte: Chaos in verkoppelten ebenen Systemen

Eine neue Aufgabenklasse entsteht, wenn man Chaos in der Verkopplung von zwei Basissystemen sucht. Zum Beispiel zwei Van der Pol-Oszillatoren oder zwei FitzHugh-Nagumo-Modelle. Oder zwei Lotka-Volterra-Systeme. Oder zwei Brusselatoren. Oder man mischt zwei geeignete ebene Systeme. Alle hier betrachteten Basissysteme eignen sich dazu.

Zugegeben, die Verkopplung von zwei ebenen Systemen mit kompliziertem dynamischen Verhalten ist ein Trick, ein Holzhammer. Sie passt nicht richtig in diese Schrift. Aber ein Chaos-Projekt ist sie allemal.

Wie das geht, zeigt das folgende Beispiel, die lineare Verkopplung von zwei Basissystemen des hier betrachteten Chaossystems. Wir demonstrieren, dass 4-dimensionales Chaos kein Hexenwerk ist. Das können sie auch. Eher besser.

Wegen der vielen Möglichkeiten der Verkopplung wären Hunderte von neuen 4-dimensionalen Systemen auf Chaos zu untersuchen. Ein hartes Stück Arbeit, aber mit guten Erfolgschancen.

Worauf warten sie also noch? Jeder kann auch 4-dimensionales Chaos!
Wie es geht, zeigen die folgenden Beispiele:

Das 4-dimensionale **Beispiel 2xB** benutzt unser Basissystem zweifach:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bv - xy^2$$
$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (xy^2 + d - y)$$
$$\frac{dv}{dt} = 1 - qx - vw^2$$
$$\frac{dw}{dt} = p \cdot (vw^2 + c - w)$$

Wir haben 4 Variablen x, y, v, w und 6 Parameter: a, b, d, p, q und c.
Der Tausch der Variablen x und v in den linearen Termen verkoppelt die beiden ebenen Systeme. Das verändert einiges, aber nicht alles.

Der 4-dimensionale stationäre Zustand muss numerisch bestimmt werden.
Er ist im betrachteten Intervall instabil und hat teilweise einen Grenzzyklus um sich. Die Suche nach Chaos ist nicht trivial. Es gibt Koexistenzen von Grenzzyklen und Grenzzyklen, die in die Unendlichkeit wachsen.

Aber eine Feigenbaum-Route führt uns auch in vier Dimensionen ans Ziel:

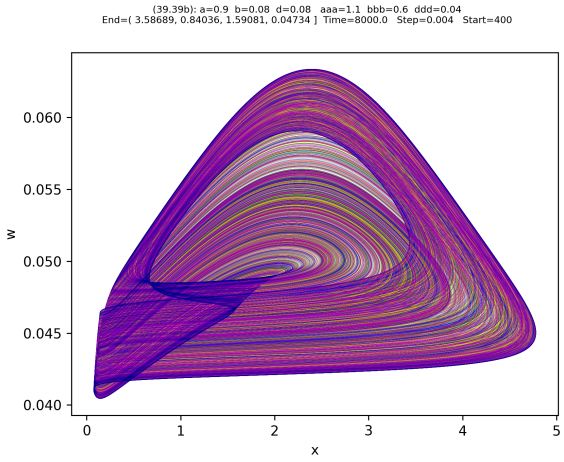
d	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
0.069	Chaos (x-v-Plot in der Gallerie).	0.033
0.080	Chaos.	0.034
0.082	Ein zweifaches Chaos-Band.	0.017
0.0825	Ein vierfaches Chaos-Band.	0.011
0.084	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
0.090	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
0.100	Ein einfacher Grenzzyklus.	

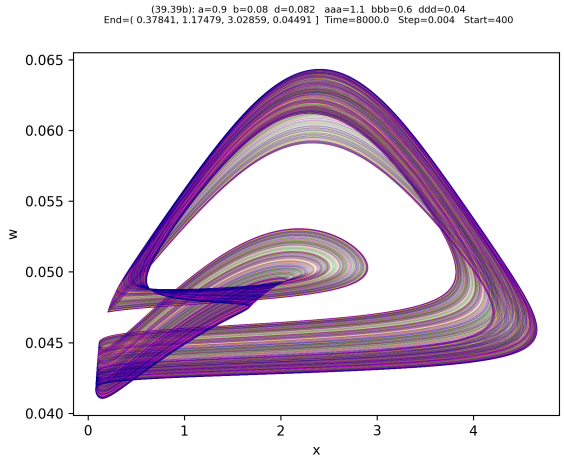
Ausgewählte stationäre Trajektorien von Beispiel **2xB** für $a = 0.9$, $b = 0.08$, $p = 1.1$, $q = 0.6$, $c = 0.04$ und anwachsende Werte von d.

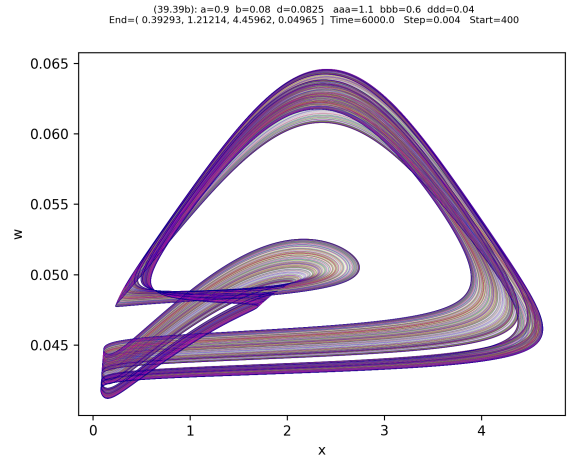
Es beginnt mit einem plötzlich erscheinenden chaotischen Attraktor. Er durchläuft eine Feigenbaum-Route rückwärts. Die Lyapunov-Exponenten sind deutlich positiv und gut berechenbar. Das gilt auch für die stationären Trajektorien im betrachteten Intervall des Parameters d.

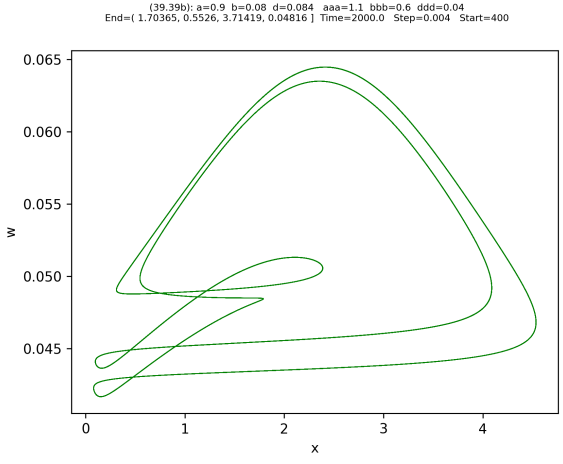
Bei Simulationen mit kleineren Werten von d wachsen die Attraktoren stark an und werden numerisch unbeherrschbar. Eine Chaos-Ruine tritt auf.

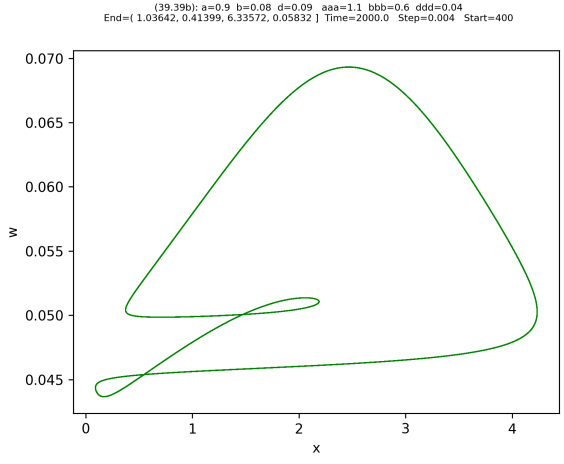
Die Möglichkeiten der Darstellung der stabilen Attraktoren und Grenzzyklen sind in 4 Dimensionen deutlich erhöht. Wir wählen x-w-Plots:

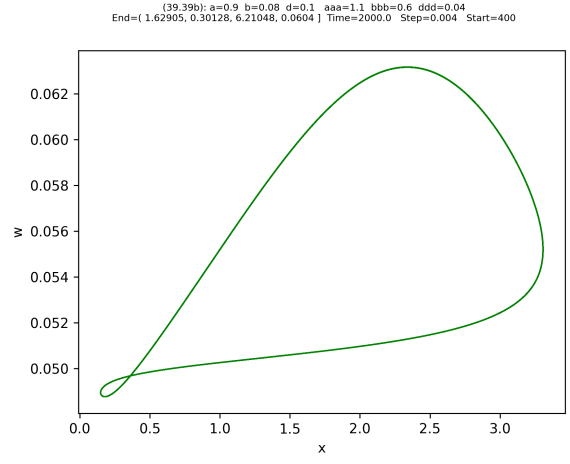












Legende: x-w-Plots zu Beispiel **2xB** für $a = 0.0.9$, $b = 0.08$, $c = 0.04$, $p = 1.1$, $q = 0.6$ und wachsende Werte von d (die sechs Zeilen der Tabelle).

Eine Feigenbaum-Route rückwärts beginnt mit einem kompakten Attraktor, der zu einem Chaos-Band aufreißt (Bild 2). Das Chaos-Band reißt weiter auf zu einem 4-fachen Chaos-Band. Es folgen die üblichen sich halbierenden Grenzzyklen.

Das **Beispiel BxB** benutzt unser Basissystem und den Brusselator ([21], [8]):

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 1 - bv - xy^2 \\
\frac{dy}{dt} &= a \cdot (xy^2 + d - y) \\
\frac{dv}{dt} &= 1 - (q+1)x + pv^2 w \\
\frac{dw}{dt} &= qv - pv^2 w + c
\end{aligned}$$

Wir haben 4 Variablen x, y, v, w und 6 Parameter: a, b, d, p, q und c.
Der Tausch der Variablen x und v in den linearen Termen verkoppelt die beiden ebenen Systeme, die Grundidee dieser Suche nach Chaos-Systemen.

Der 4-dimensionale stationäre Zustand muss numerisch bestimmt werden.
Er ist im betrachteten Intervall instabil. Die Suche nach Chaos ist aufwendiger als im 3-dimensionalen Fall, da die Berechnung des Stabilitätsumschlages eines Sattel-Fokus in einer Hopf-Bifurkation schwieriger zu realisieren ist.

Die Suche nach einem gefalteten Grenzzyklus und damit einer Feigenbaum-Route führt aber auch in vier Dimensionen ans Ziel. Das Chaos-Intervall ist vergleichsweise groß. Die Lyapunov-Exponenten sind gut berechenbar.

a	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
2.54	Eine Chaos-Ruine.	
2.70	Chaos.	0.101
2.82	Ein schmales verdrehtes Chaos-Band.	0.018
2.85	Ein einfacher Grenzzyklus mit Sattel-Fokus.	
2.898	Ein vierfaches Chaos-Band.	0.004
2.904	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
2.91	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
2.92	Großes Chaos.	0.110 ± 0.026
2.96	Kleines Chaos. Lyapunov-Rekordwert.	0.145
3.21	Ein zweifaches Chaos-Band.	0.095
3.247	Ein 6-faches Chaos-Band.	0.020
3.258	Ein sechsfacher Grenzzyklus.	

Ausgewählte stationäre Trajektorien von Beispiel **BxB** für $b = 0.33$, $d = 0.1$, $p = 0.4$, $q = 0.1$, $c = 0.1$ und anwachsende Werte von a.

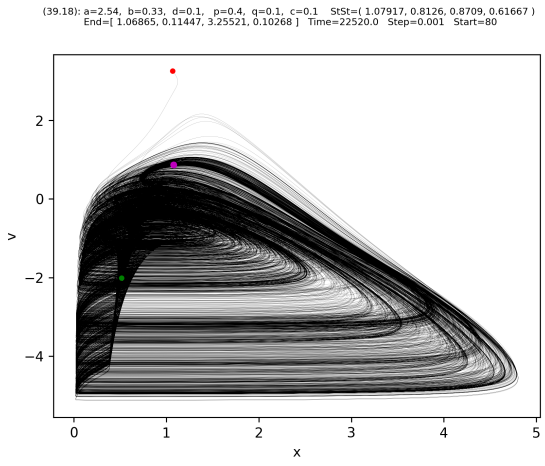
Es beginnt mit einem aus einer Ruine erscheinenden chaotischen Attraktor. Danach finden zahlreiche Bifurkationen statt. Hier sind nur einige Beispiele aufgeführt. Das Chaos startet dann eine Feigenbaum-Route rückwärts.

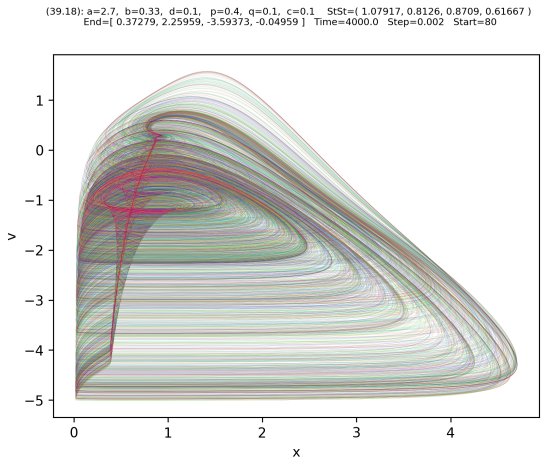
a	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
3.35	Ein 4-faches Chaos-Band.	0.031
3.375	Ein 8-faches Chaos-Band.	0.016
3.385	Ein 16-facher Grenzzyklus.	
3.40	Ein achtfacher Grenzzyklus.	
3.50	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
4.00	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
5.00	Ein einfacher Grenzzyklus (ohne Bild).	

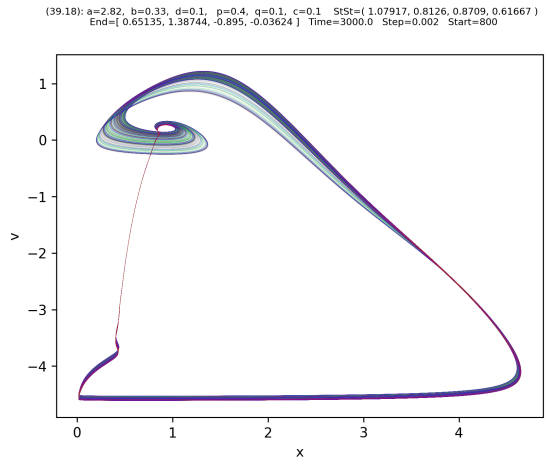
Ausgewählte stationäre Trajektorien von Beispiel **BxB** für $b = 0.33$, $d = 0.1$, $p = 0.4$, $q = 0.1$, $c = 0.1$ und anwachsende Werte von a.

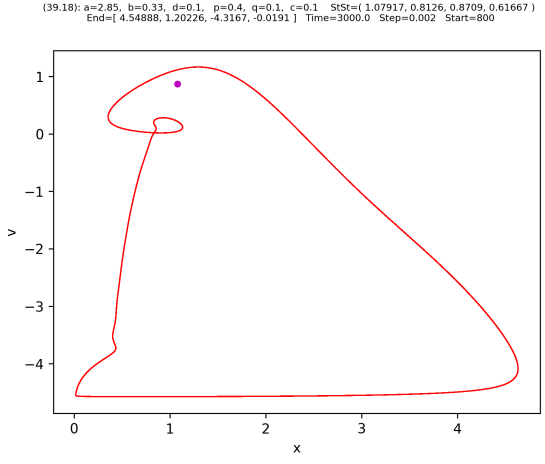
Die Feigenbaum-Route rückwärts wird fortgesetzt. Die Route endet an einem einfachen Grenzzyklus.

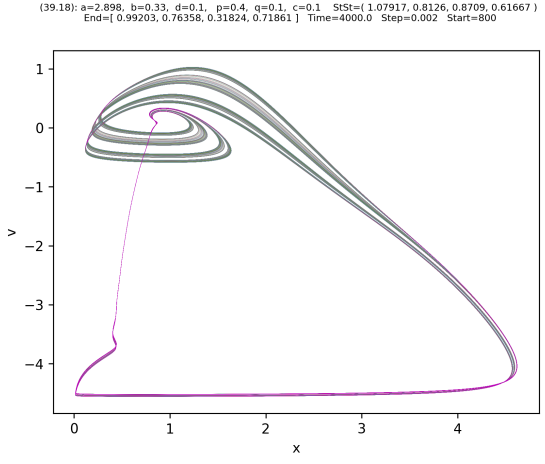
Dieses Beispiel belegt, dass auch die Verkopplung von zwei verschiedenen Basissystemen zur Generierung von Chaos funktioniert. Neben den Pendel-Polynomen also eine zweite Methode dieser Schrift. Es macht Sinn, sich vorher Gedanken über die Auswahl der beteiligten Basissyteme zu machen. Grenzzyklen sollten sie erzeugen können. Und die Kenntnis über entsprechende Parameter-Bereiche kann auch nicht schaden.

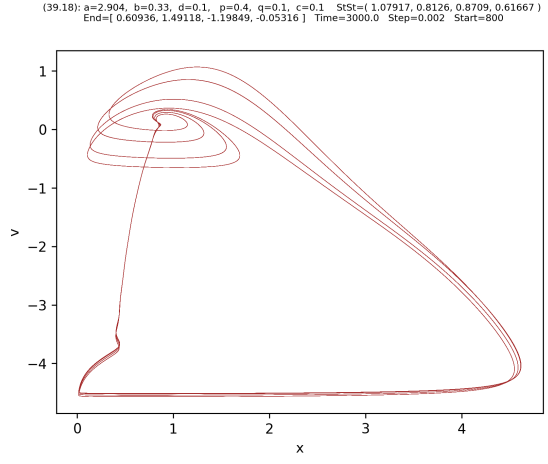






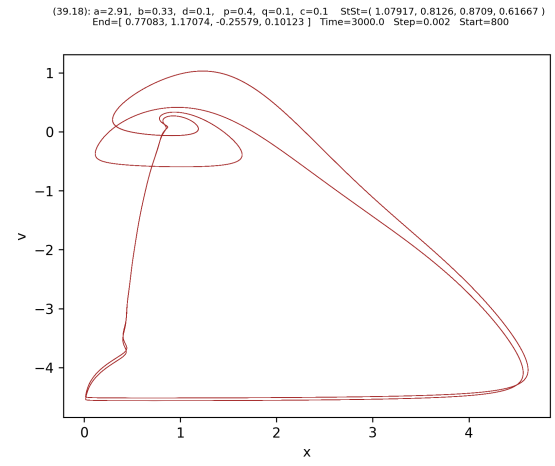


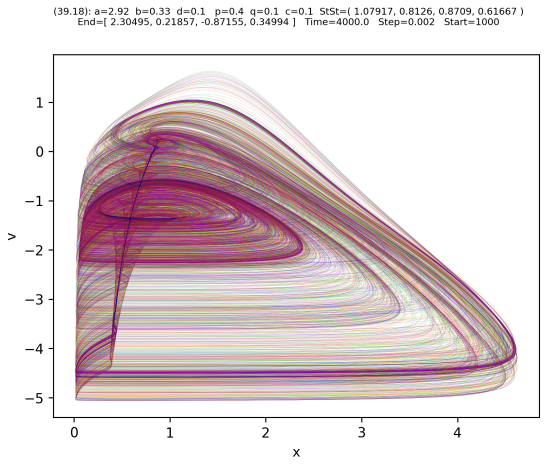


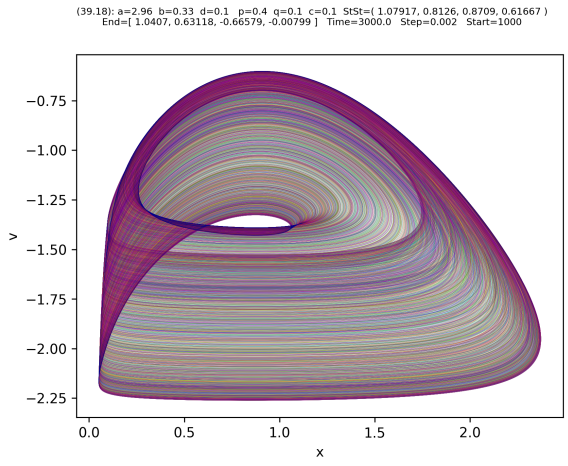


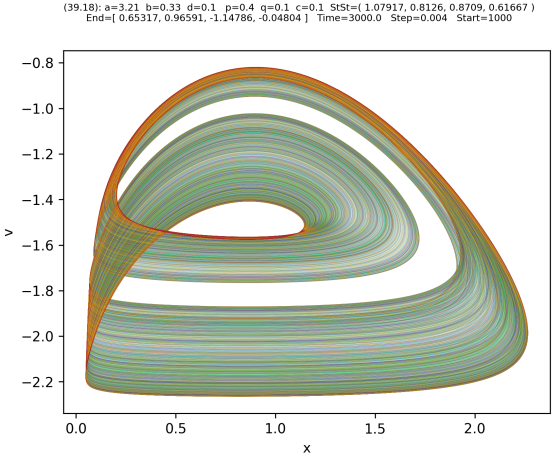
Legende: x-v-Plots zu Beispiel **BxB** für $b = 0.33$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $p = 0.4$, $q = 0.1$ und wachsende Werte von a (die oberen sechs Zeilen der ersten Tabelle).

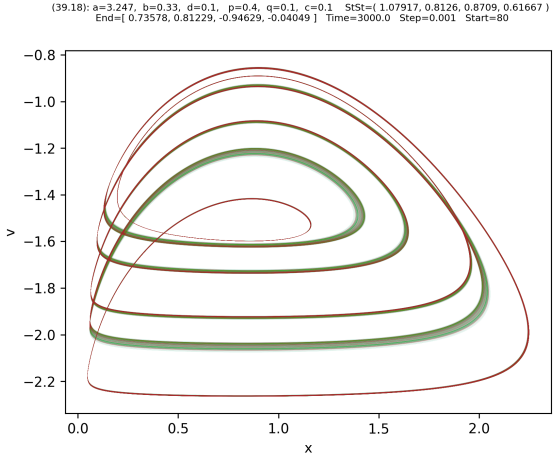
Es beginnt mit einer Chaos-Ruine (Bild 1) aus der schlagartig Chaos entsteht (Bild 2). Das Chaos erleidet zahlreiche Bifurkationen zu Chaos-Bändern (Bilder 3 und 5) und Fenstern mit Grenzzyklen (Bilder 4 und 6). Kleine Routen ins Chaos treten dabei auf.

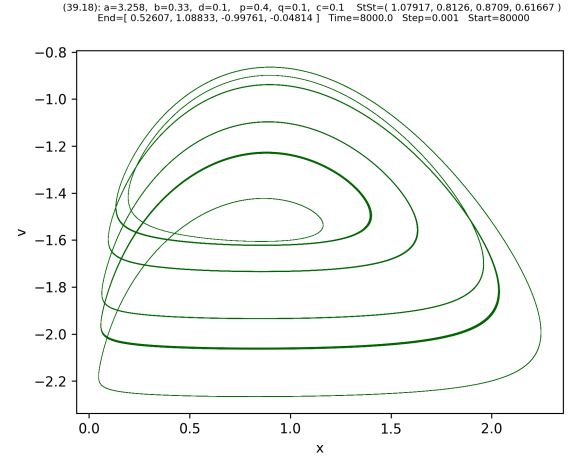






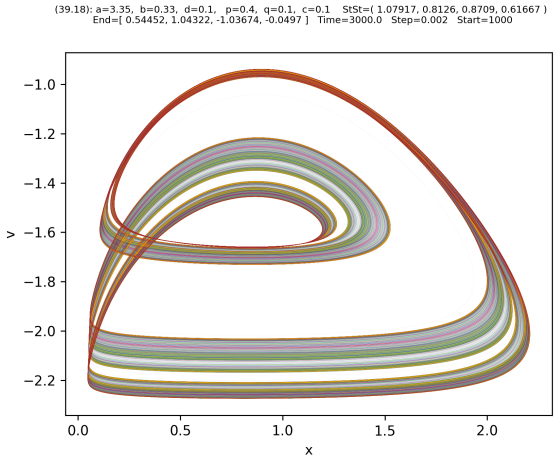


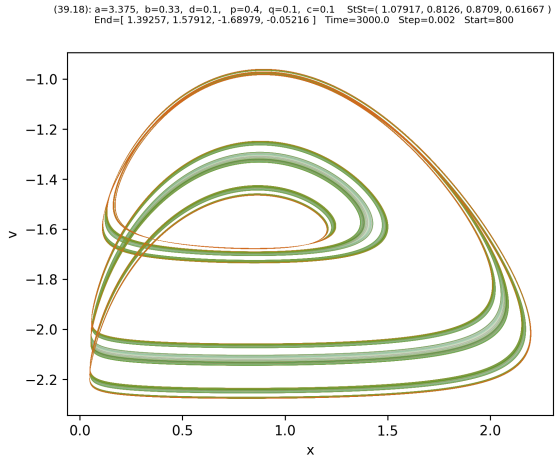


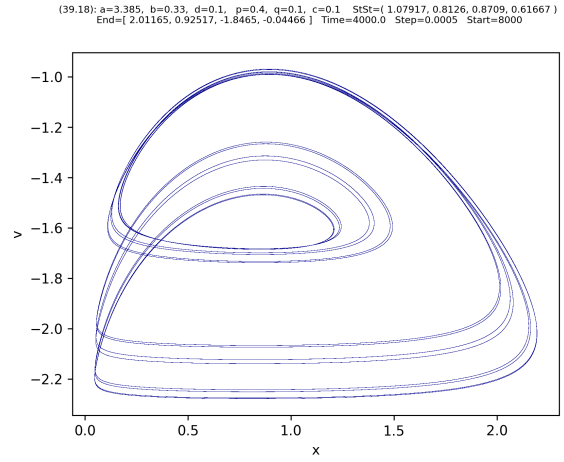


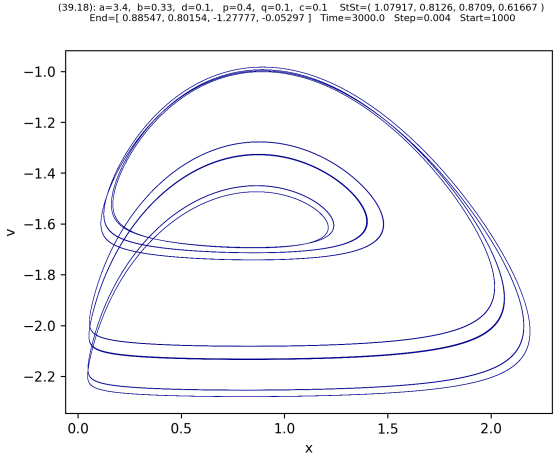
Legende: x-v-Plots zu Beispiel **BxB** für $b = 0.33$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $p = 0.4$, $q = 0.1$ und wachsende Werte von a (die unteren sechs Zeilen der ersten Tabelle).

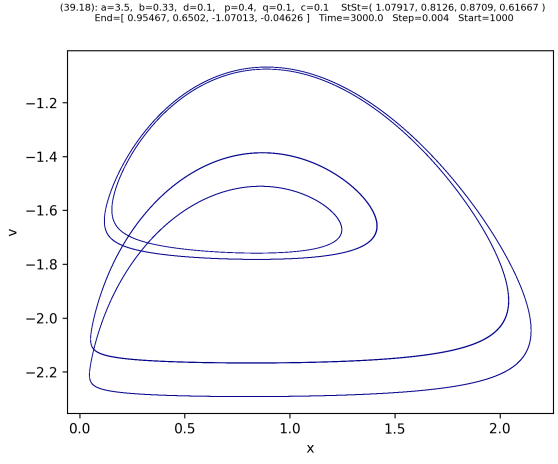
Ein Fenster mit zweifachen Grenzzyklen (Bild 1) führt wieder ins große Chaos (Bild 2). Der Attraktor schrumpft (Bild 3) und eine Feigenbaum-Route rückwärts beginnt (Bild 4), unterbrochen durch Fenster mit 6-fachen Chaos-Bändern und Grenzzyklen (Bild 5 und 6).

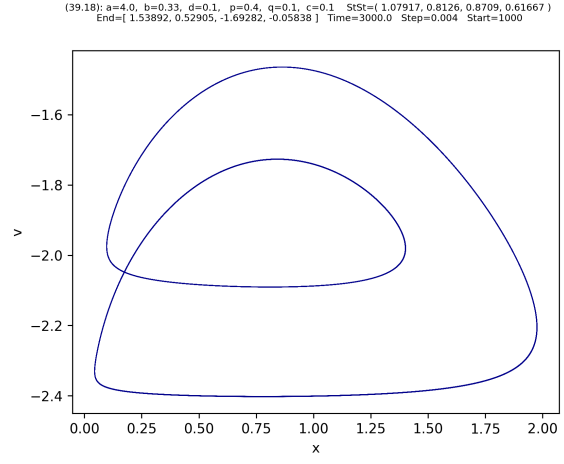












Legende: x-v-Plots zu Beispiel **BxB** für $b = 0.33$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $p = 0.4$, $q = 0.1$ und wachsende Werte von a (die sechs Zeilen der zweiten Tabelle).

Die Feigenbaum-Route rückwärts wird fortgesetzt und beendet. Erst 4-fache und 8-fache Chaos-Bänder (Bilder 1 und 2), dann 16-fache, achtfache, vierfache und zweifache Grenzzyklen (Bilder 3 bis 6). Das Bild des einfachen Grenzzyklus ist weggelassen.

Beispiel 2DEP modelliert das Basissystem mit Depots am Substrat und am Produkt:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bv - xy^2 - exy + z$$
$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (xy^2 + d - y) - gy + w$$
$$\frac{dv}{dt} = f \cdot (exy - z)$$
$$\frac{dw}{dt} = h \cdot (gy - w)$$

Wir haben 4 Variablen x, y, z, w und 7 Parameter: a, b, d, e, f, g und h.
Es handelt sich um die Erweiterung des Chaossystems um ein weiteres Depot.

Die stationären Zustände sind die vom Chaossystem. Bei der Suche nach Chaos kann man sich an den Resultaten des Chaossystems orientieren.
Das Pendel-Polynom ist in diesem ersten Beispiel erst einmal linear.

Man beginnt auch hier mit der Suche nach einem gefalteten Grenzzyklus und damit einer Feigenbaum-Route. Das Chaos-Intervall ist vergleichsweise groß.
Die Lyapunov-Exponenten sind gut berechenbar.

e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
1.10	Ein einfacher, leicht verdrehter Grenzzyklus.	
1.12	Streuendes Chaos.	0.007
2.52	Schönes kompaktes Chaos.	0.077
2.542	Ein dreifaches Chaos-Band.	0.023
2.545	Ein sechsfaches Chaos-Band.	0.007
2.55	Ein sechsfacher Grenzzyklus.	
2.555	Ein dreifacher Grenzzyklus.	
2.58	Großes Chaos.	0.075
2.64	Ein sechsfacher Grenzzyklus.	
2.6545	Ein zweifaches Chaos-Band.	0.030
2.659	Ein 4-faches Chaos-Band.	0.021
2.66	Ein 24-facher Grenzzyklus.	

Ausgewählte stationäre Trajektorien von Beispiel **2DEP** für $a = 7.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $f = 0.2$, $g = 0.1$, $h = 1.33$ und anwachsende Werte von e.

Es beginnt mit einem aus einem Grenzzyklus schlagartig erscheinenden Chaos. Das Chaos wird in einer Periode-3-Route rückwärts abgebaut. Schlagartig bildet sich neues Chaos, das in einer Feigenbaum-Route abgebaut wird. Es treten Fenster im Chaos auf.

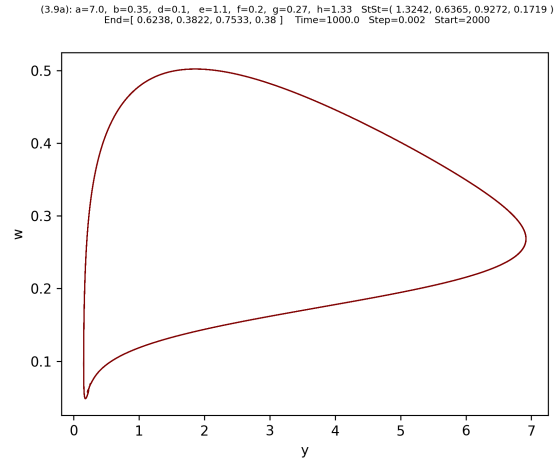
e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	$\lambda_1 > 0$
2.665	Ein 8-faches Chaos-Band.	0.031
2.666	Ein 16-facher Grenzzyklus.	
2.67	Ein achtfacher Grenzzyklus.	
2.69	Ein vierfacher Grenzzyklus.	
2.85	Ein zweifacher Grenzzyklus.	
2.95	Ein einfacher Grenzzyklus.	

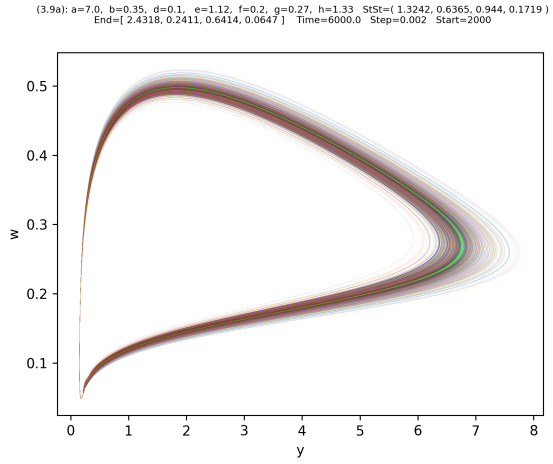
Ausgewählte stationäre Trajektorien von Beispiel **2DEP** für $a = 7.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $f = 0.2$, $g = 0.1$, $h = 1.33$ und anwachsende Werte von e.

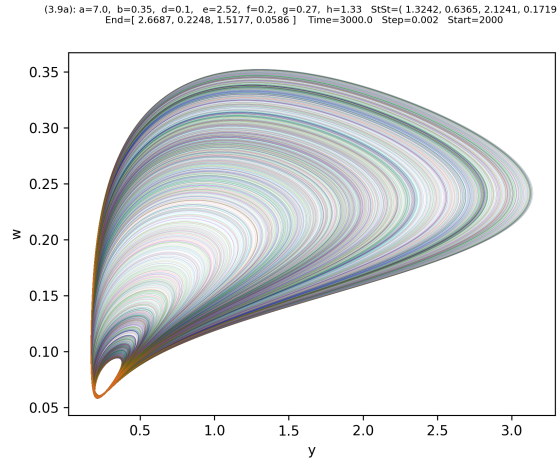
Die Feigenbaum-Route rückwärts wird fortgesetzt und beendet. Die Route endet an einem einfachen Grenzzyklus.

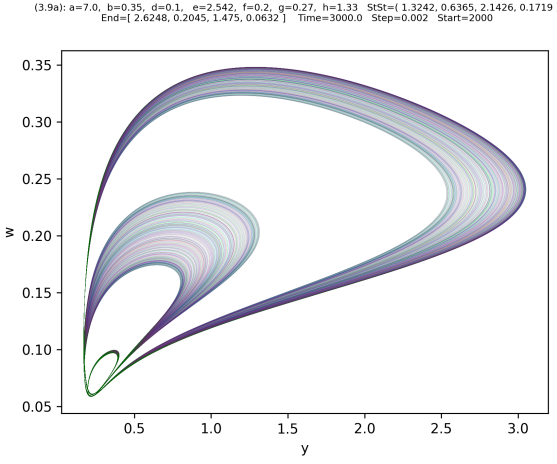
Dieses Beispiel illustriert, dass die Hinzunahme eines zweiten Pendel-Polynoms zur weiteren Generierung von Chaos funktioniert. Wir haben also eine weitere Methode zur Erzeugung von Chaos in dieser Schrift.

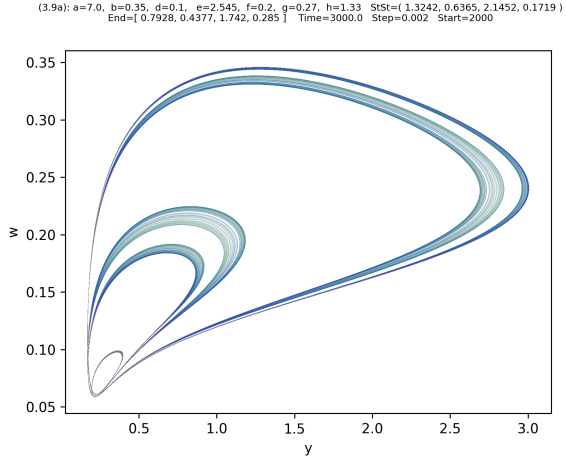
Es macht Sinn, sich Gedanken über die Form des zweiten Pendel-Polynoms zu machen. Mindestens Grenzzyklen sollte es erzeugen können. Die Anzahl der Parameter, hier sieben, stellt nämlich ein Problem dar. Kenntnis über sinnvolle Parameter-Bereiche ist eigentlich kaum möglich.

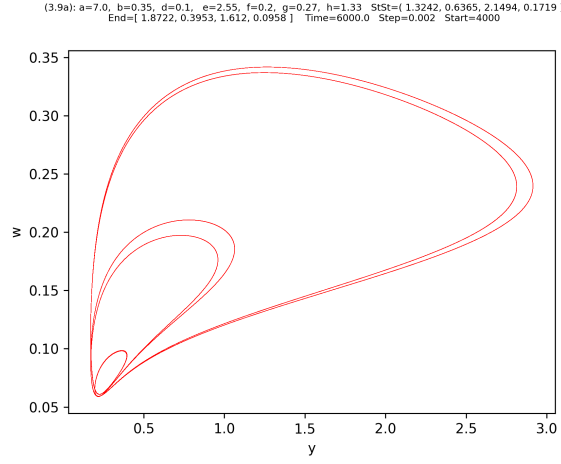






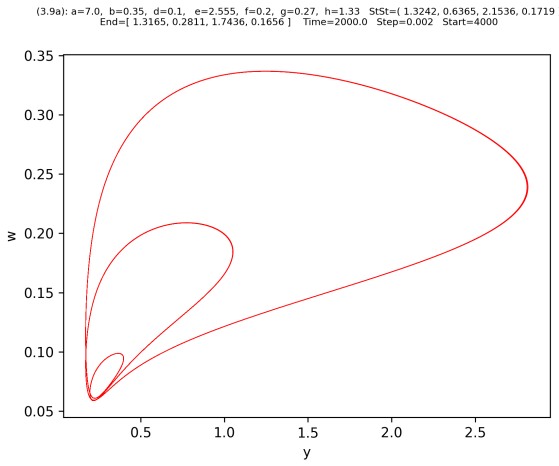


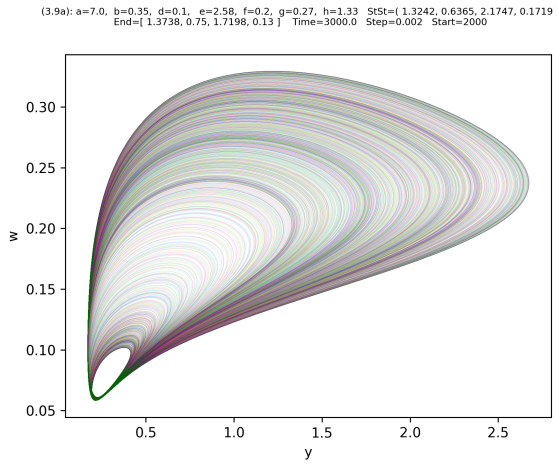


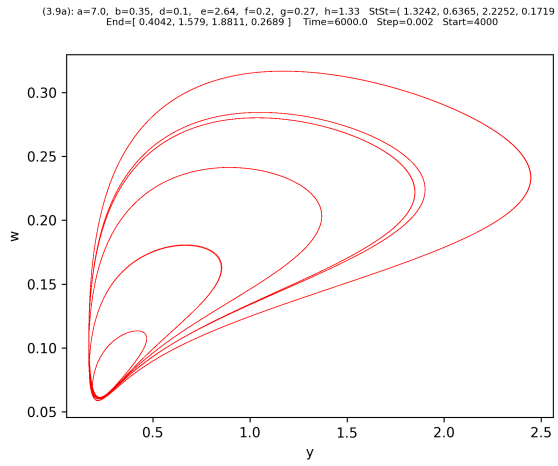


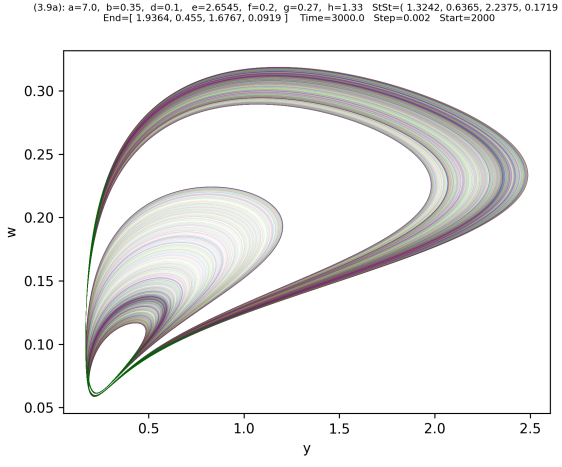
Legende: y-w-Plots zu Beispiel **2DEP** für $a = 7.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $f = 0.2$, $g = 0.27$, $h = 1.33$ und wachsende Werte von e (die oberen sechs Zeilen der ersten Tabelle).

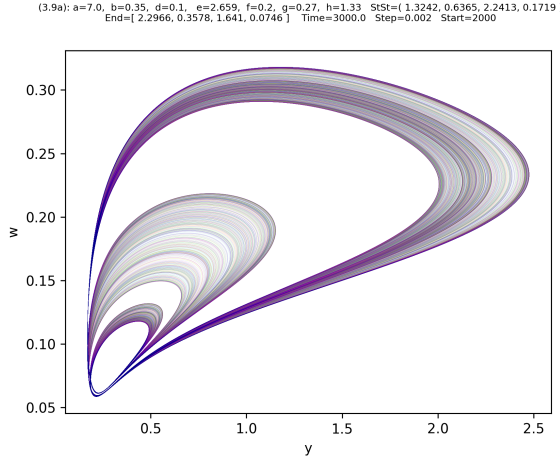
Es beginnt mit ungutem Chaos (Bild 2), das schlagartig aus einem Grenzzyklus (Bild 1) entsteht. Das Chaos wird kompakt (Bild 3) und beginnt den Rückbau in einer Periode-3-Route. Dreifache (Bild 4) und 6-fache (Bild 5) Chaos-Bänder treten auf.

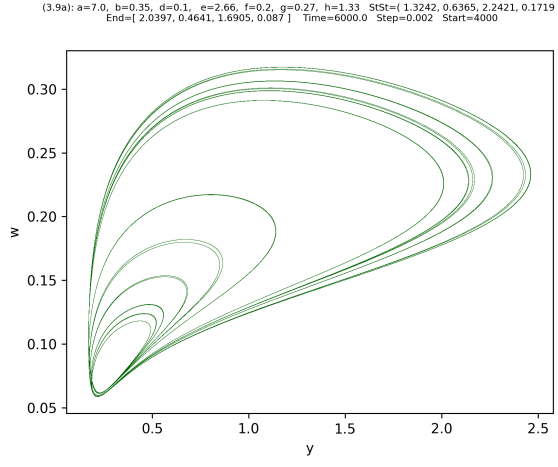






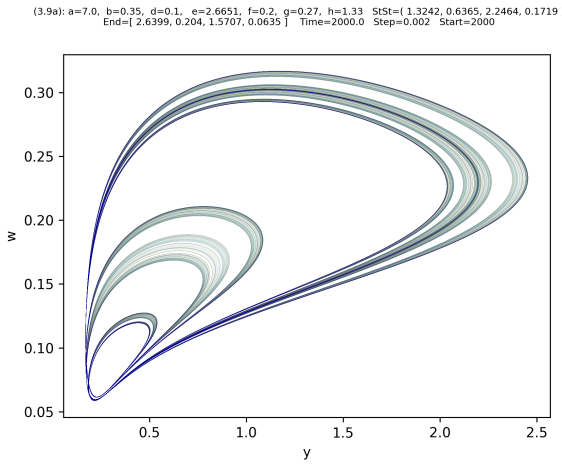


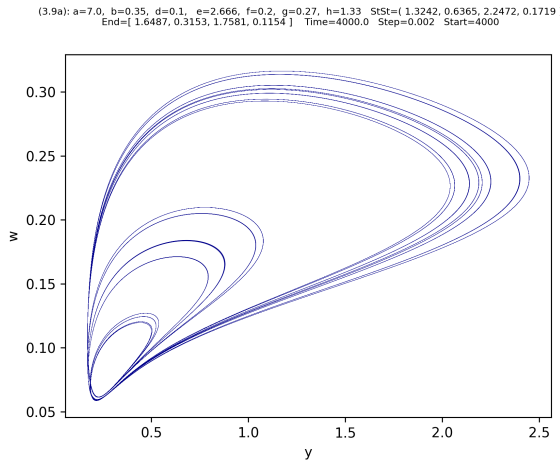


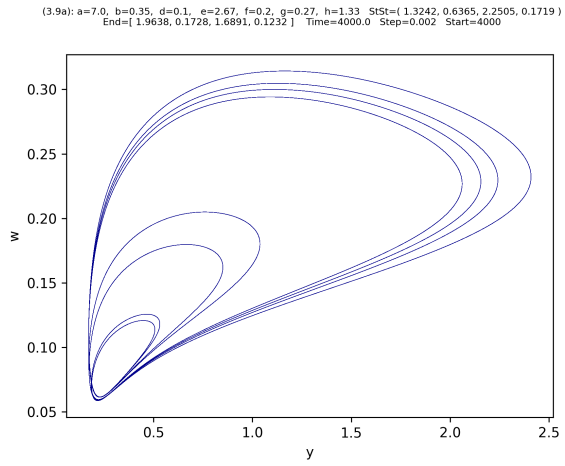


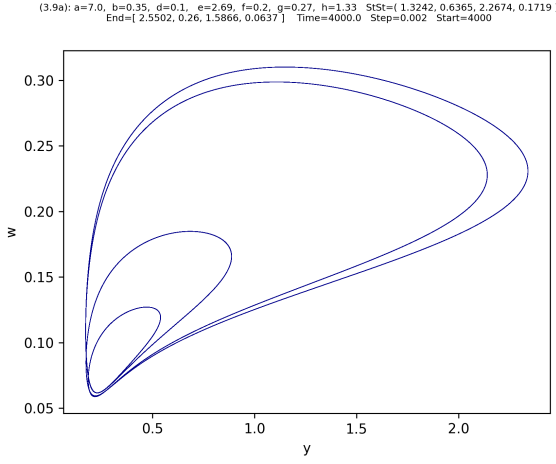
Legende: y-w-Plots zu Beispiel **2DEP** für $a = 7.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $f = 0.2$, $g = 0.27$, $h = 1.33$ und wachsende Werte von e (die unteren sechs Zeilen der ersten Tabelle).

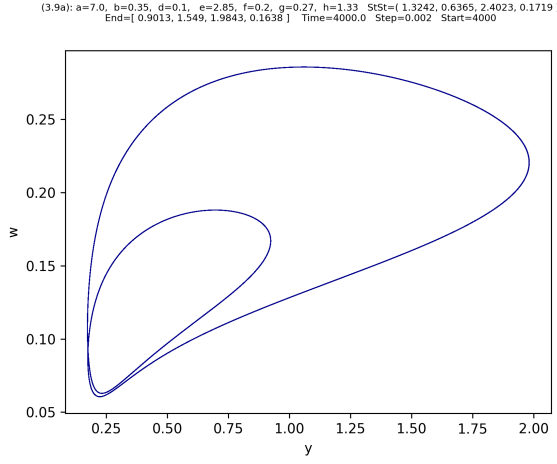
Ein dreifacher Grenzzyklus (Bild 1) wird schlagartig zu Chaos (Bild 2). Dann ein Fenster mit sechsfachen Grenzzyklen (Bild 3) und eine Feigenbaum-Route mit 2-fachen (Bild 4) und 4-fachen (Bild 5) Chaos-Bändern und ein Fenster mit 24-fachen Grenzzyklen.

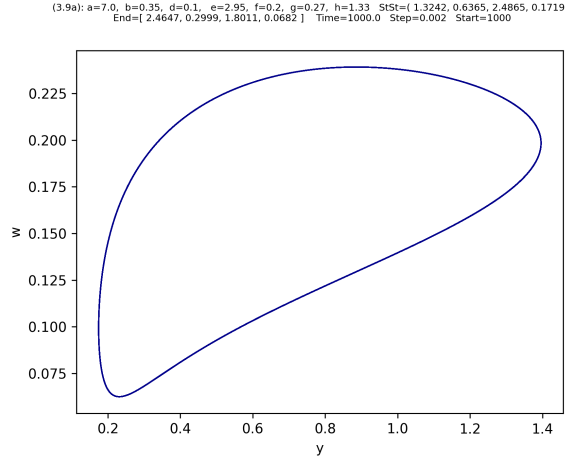












Legende: y-w-Plots zu Beispiel **2DEP** für $a = 7.0$, $b = 0.35$, $d = 0.1$, $f = 0.2$, $g = 0.27$, $h = 1.33$ und wachsende Werte von e (die sechs Zeilen der zweiten Tabelle).

Die Feigenbaum-Route rückwärts wird fortgesetzt und beendet. Erst 8-fache Chaos-Bänder (Bild 1), dann 16-fache, achtfache, vierfache, zweifache und einfache Grenzzyklen (Bilder 2 bis 6).

Beispiel PROD modelliert das Chaossystem mit einem zusätzlichen linearen Depot am Produkt:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - bv - xy^2 - exy + z$$
$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (xy^2 + d - w) - y + w$$
$$\frac{dv}{dt} = f \cdot (exy - z)$$
$$\frac{dw}{dt} = y - w$$

Wir haben 4 Variablen x, y, z, w und die 5 Parameter: a, b, d, e, und f.
Es handelt sich um eine spezielle Erweiterung des Chaossystems um ein Produkt-Depot, das den Abbau des Produktes triggert.

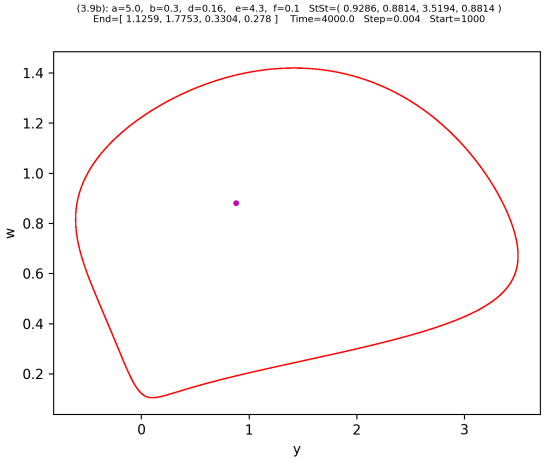
Die stationären Zustände sind die vom Basissystem. Bei der Suche nach Chaos kann man mit Werten des Chaossystems beginnen.

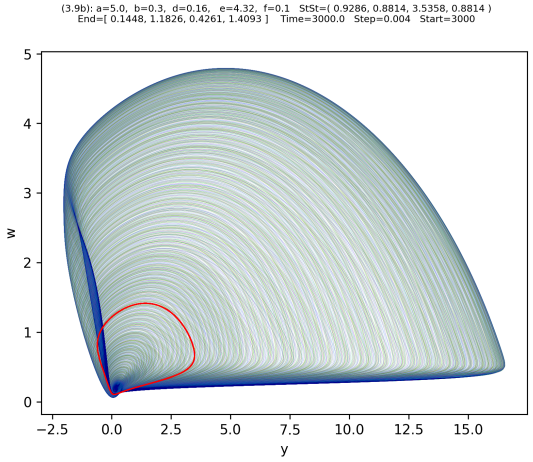
Das zusätzliche Pendel-Polynom ist das einfachste überhaupt. Das Besondere am Beispiel sind die quasi-periodischen Lösungen vor und neben dem Chaos. Das Chaos-Intervall ist relativ groß. Die Bestimmung der Lyapunov-Exponenten ist wegen der Koexistenzen mit zusätzlichem Aufwand verbunden.

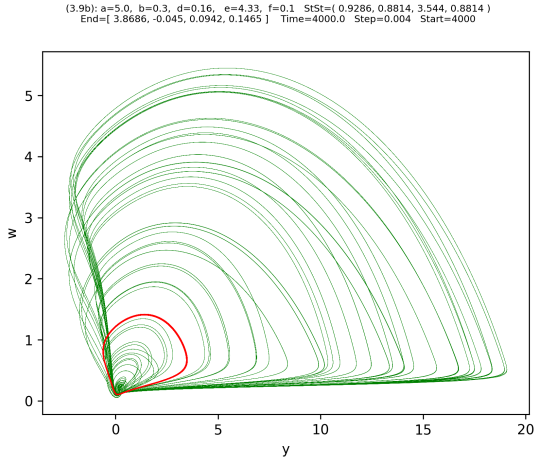
e	Dynamik (stationäre Trajektorien)	λ_1
4.30	Ein einfacher Grenzzyklus.	
4.32	Ein einfacher Grenzzyklus und schwaches Chaos.	0.003
4.33	Ein einfacher und ein vielfacher Grenzzyklus.	
4.40	Ein fünffacher Grenzzyklus und quasi-periodische Trajektorien.	0.0
4.405	Ein 10-facher Grenzzyklus und quasi-periodische Trajektorien.	0.0
4.42	Quasi-periodische Trajektorien und ein vielfaches Chaos-Band.	0.0, 0.022
4.43	Quasi-periodische Trajektorien und Chaos in Koexistenz.	0.0, 0.020
4.442	Quasi-periodische Trajektorien (und Chaos, ohne Bild).	0.0
4.45	Quasi-periodische Trajektorien und ein 12-facher Grenzzyklus.	0.0
4.455	Chaos.	0.022
4.48	Ein 16-facher Grenzzyklus.	
5.00	Anwachsendes Chaos.	0.062

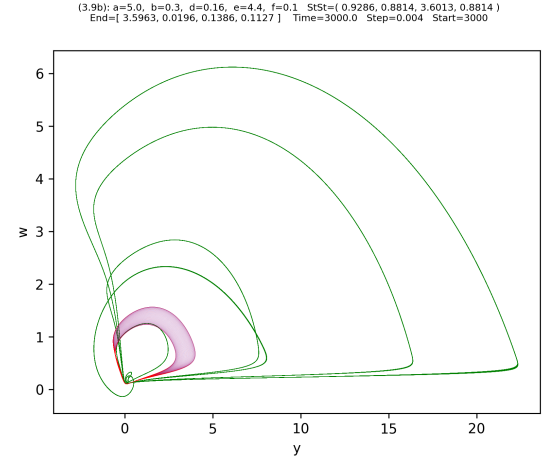
Ausgewählte stationäre Trajektorien von Beispiel **PROD** für $a = 5.0$, $b = 0.3$, $d = 0.16$, $f = 0.1$ und anwachsende Werte von e.

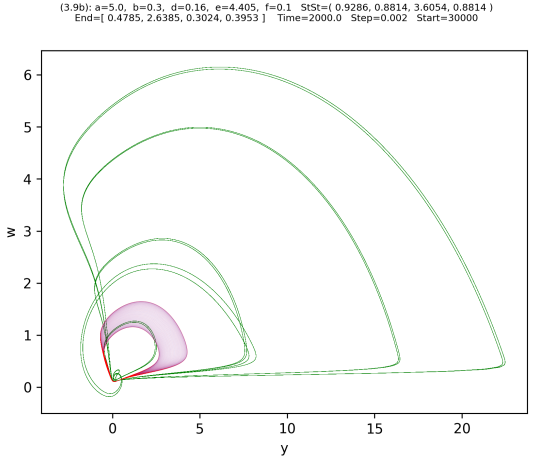
Es beginnt mit einem einfachen Grenzzyklus und schlagartig dazu kommendes Chaos. Das Chaos vergeht in stark gefalteten Grenzzyklen und der Grenzzyklus erleidet eine verallgemeinerte Hopf-Bifurkation zu einem Torus. Der große etwa fünffache Grenzzyklus beginnt eine Verdopplungskaskade ins Chaos.
Der Torus wächst dem Chaos bis zur Verschmelzung ins Chaos entgegen.

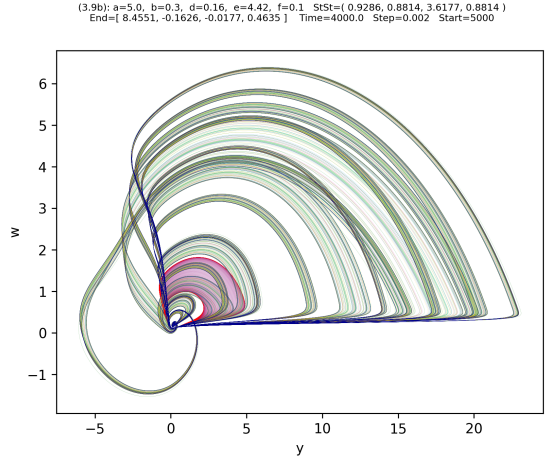






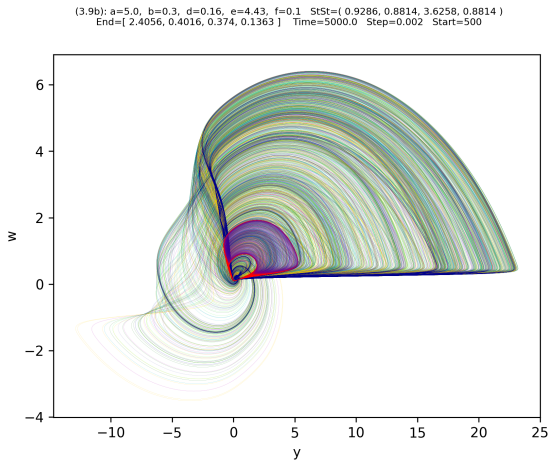


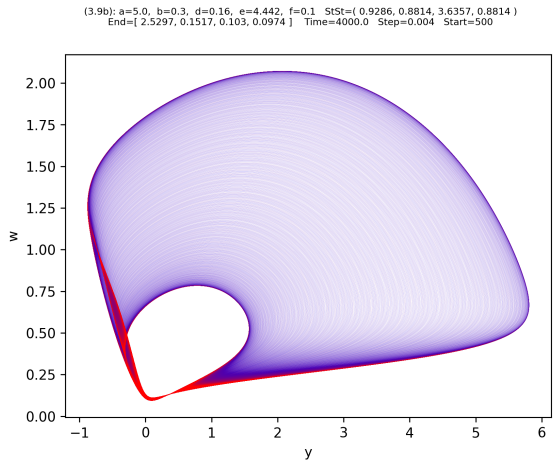


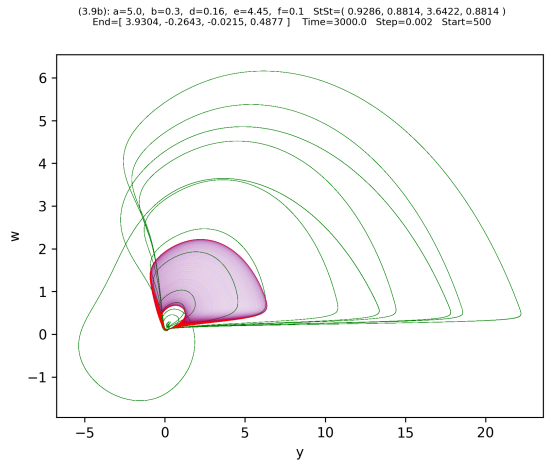


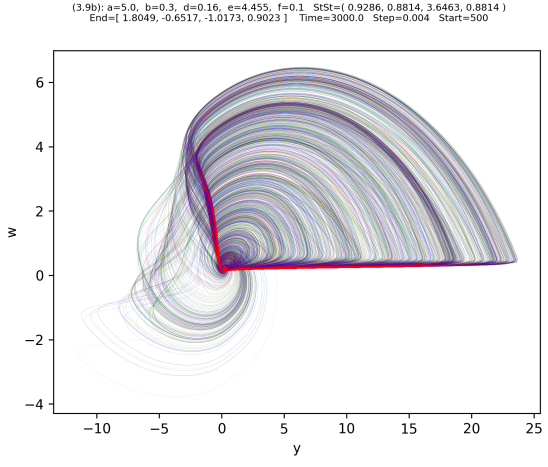
Legende: y-w-Plots zu Beispiel **PROD** für $a = 5.0$, $b = 0.3$, $d = 0.16$, $f = 0.1$ und wachsende Werte von e (die oberen sechs Zeilen der Tabelle).

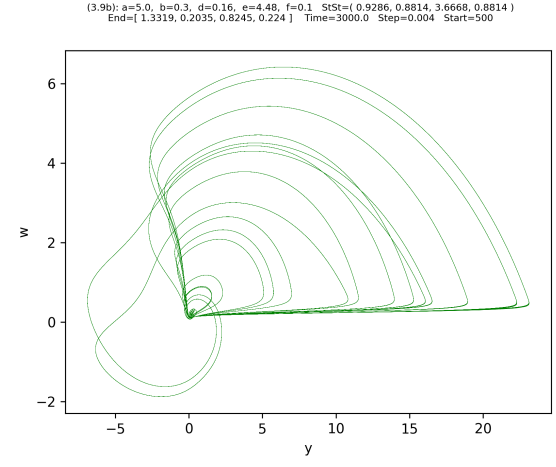
Es beginnt mit einem einfachen Grenzzyklus (Bild 1). Schlagartig kommt Chaos dazu (Bild 2). Das Chaos wird in Grenzzyklen abgebaut und der Grenzzyklus wird durch die verallgemeinerte Hopf-Bifurkation zum Torus (Bilder 3 bis 5). Der Grenzzyklus beginnt eine Feigenbaum-Route bis zur Chaos-Band-Phase (Bilder 4 bis 6).

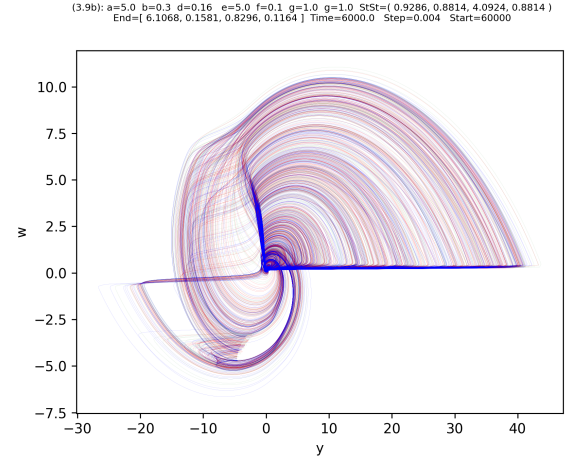












Legende: y-w-Plots zu Beispiel **PROD** für $a = 5.0$, $b = 0.3$, $d = 0.16$, $f = 0.1$ und wachsende Werte von e (die unteren sechs Zeilen der Tabelle).

Chaos und Torus existieren in Koexistenz (Bild 1). Bild 2 zeigt einen Ausschnitt.
Es gibt Fenster im Chaos (Bild 3). Der Torus wächst mit dem Chaos zusammen (Bild 4).
Es gibt weitere Fenster im Chaos (Bild 5). Das Chaos bläht sich immer weiter auf (Bild 6).

Versionsgeschichte

Datum	Anzahl der Chaos-Beispiele
16.09.2022	1
01.01.2024	65
19.05.2024	106
06.10.2024	128
01.01.2025	146
02.06.2025	167
10.08.2025	187
04.01.2026	205
22.02.2026	225
21.04.2026	241
23.08.2026	271
29.09.2026	284

Datum und Umfang der Veröffentlichungen dieser Sammlung im Internet.
Hinzu kommen die Beispiele vom Grad 4 und die 4-dimensionalen Beispiele.

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis I

[1] A.A. Andronov et al. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. New York: Wiley, 1967.

[2] N.N. Bautin and E.A. Leontovich. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh system na ploskosti (Russ.)* Moskva: Nauka, 1976.

[3] G. Benettin et al. “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them.”. In: *Meccanica* 15 (1980), pp. 9–30.

[4] A.M. Blokh and O.M. Sharkovsky. *Sharkovsky Ordering*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2022.

[5] A. Borzì. *Modelling with Ordinary Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall, 2020. Chap. 6.5-6.8.

Literaturverzeichnis II

[6] R. Capeáns, J. Sabuco, and M.A.F. Sanjuán. “Partial Control of Chaos: How to avoid undesirable behaviours with small controls in presence of noise”. In: *Discrete Continuous Dynamical Systems Series B* 23 (2018), p. 323.

[7] J. Crutchfield. *LorenzODELCE.py*. University of California, Dept. of Physics and Astronomy. 2010. URL: https://csc.ucdavis.edu/~chaos/courses/nlp/Software/PartH_Code/LorenzODELCE.py.

[8] G. Datseris and U. Parlitz. *Nonlinear Dynamics, A Concise Introduction Interlaced with Code*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2022.

[9] N. Desprez. *CHAOSCOPE*. Chaoscope.org. 2010. URL: https://www.chaoscope.org/doc/attractors.html.

[10] R.H. Enns. *It’s a Nonlinear World*. New York: Springer, 2011.

[11] M.J. Feigenbaum. “Universal behavior in nonlinear systems”. In: *Los Alamos. Sci.* 1 (1980), pp. 4–27.

Literaturverzeichnis III

[12] Python Software Foundation. *lyapynov 1.0.1*. Sept. 2023. URL: https://pypi.org/project/lyapynov/.

[13] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos, 3rd.* Amsterdam: Elsevier, 2013.

[14] A. Hurwitz. "Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt". In: *Mathematische Annalen* 46 (1895), pp. 273–285.

[15] Wikimedia Foundation Inc. *List of chaotic maps*. Sept. 2025. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_chaotic_maps.

[16] Y.A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory, 4th.* New York: Springer, 2023.

[17] E.N. Lorenz. "Deterministic nonperiodic flow". In: *J. Atmos. Sci.* 26 (1963), pp. 130–141.

Literaturverzeichnis IV

[18] N.A. Magnitskii. “Bifurcation Theory of Dynamical Chaos”. In: *Chaos Theory*. Ed. by K.A.M. Al Naimee. 2018. Chap. 11. URL: https://www.intechopen.com/chapters/57243.

[19] N.A. Magnitskii and S.V. Sidorov. *New Methods for Chaotic Dynamics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.

[20] T. Matsumoto. “A chaotic attractor from Chua’s circuit”. In: *IEEE Transactions on Circuits & Systems* 31 (1984), pp. 1055–1058.

[21] J.D. Murray. *Mathematical Biology I. An Introduction, 3rd.* Berlin: Springer, 2002. Chap. 3.

[22] T.S. Parker and L.O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York: Springer, 1989.

[23] A. Pikovsky and A. Politi. *Lyapunov Exponents, A Tool to Explore Complex Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

Literaturverzeichnis V

[24] H.A. Posch, W.G. Hoover, and F.J. Vesely. “Canonical dynamics of the Nosé oscillator: Stability, order, and chaos”. In: *Physical Review A* 33 (1986), pp. 4253–4265.

[25] M.I. Rabinovich and A.L. Fabrikant. “Stochastic self-modulation of waves in non equilibrium environments”. In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz. (Russ.)* 77 (1979), pp. 617–629.

[26] T. Rikitake. “Oscillations of a System of Disc Dynamos”. In: *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 54 (1958), p. 89.

[27] O.E. Rössler. “An equation for continuous chaos”. In: *Phys. Lett. A57,* 5 (1976), pp. 397–398.

[28] O.E. Rössler and C. Letellier. *Chaos, The World of Nonperiodic Oscillations*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020.

[29] J. Schnakenberg. “Simple Chemical Reaction Systems with Limit Cycle Behaviour”. In: *J. theor. Biol.* 81 (1979), pp. 389–400.

Literaturverzeichnis VI

[30] Th. Schulmeister. “Chaos in a Lotka-Scheme with Depot”. In: *studia biophysica* 72 (1978), 205–206 and M3/14-28.

[31] Th. Schulmeister. “Non-Linear Effects of a Generalized Lotka-Mechanism”. In: *studia biophysica* 68 (1978), 81–82 and M1/19-32.

[32] Th. Schulmeister. *Untersuchungen zur Theorie der komplizierten Bewegungen im Stoffwechsel der Zelle, Dissertation*. Berlin: Akademie der Wissenschaften der DDR, 1979.

[33] Th. Schulmeister and H. Herzel. “Chaos in Forced Selkov Systems”. In: *Z. angew. Math. Mech.* 66 (1986), pp. 375–378.

[34] U. Schwarz. *Non-linear Dynamics, Chapter 7*. Heidelberg University, Institute for Theoretical Physics. 2017. URL: https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~biophys/PDF/Skripte/NonlinearDynamics.pdf.

[35] E.E. Sel’kov. “Self-oscillations in glycolysis”. In: *Eur. J. Biochem.* 4 (1968), pp. 79–86.

Literaturverzeichnis VII

[36] A. Shabunin et al. “Modeling chemical reactions by forced limit-cycle oscillator. Synchronization phenomena and transient to chaos”. In: *Chaos, Solitons and Fractals* 15 (2003), pp. 395–405.

[37] R. Shaw. “Strange attractor, chaotic behavior and information flow”. In: *Zeitschrift für Naturforschung A* 36 (1981), pp. 80–112.

[38] L. Shilnikov. “On the question of the structure of an extended neighborhood of a structurally stable state of equilibrium of saddle-focus type”. In: *Mat. Sb.* 81 (1970), pp. 92–103.

[39] L.P. Shilnikov et al. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics, Part 1 & 2*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.

[40] T. Shimizu and N. Morioka. “On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model”. In: *Physics Letters A* 76 (1980), pp. 201–204.

[41] J.C. Sprott. “A dynamical system with a strange attractor and invariant tori”. In: *Phys. Lett. A* 378 (2014), pp. 1361–1363.

Literaturverzeichnis VIII

[42] J.C. Sprott. “Do We Need More Chaos Examples”. In: *Chaos Theory and Applications* 2 (2020), pp. 49–51.

[43] J.C. Sprott. *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ldt., 2010.

[44] J.C. Sprott. “Some simple chaotic flows”. In: *Physical Review E* 50 (1994), pp. 647–650.

[45] J.C. Sprott, W.G. Hoover, and C.G. Hoover. *Elegant Simulations: From Simple Oscillators to Many-Body Systems*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2023.

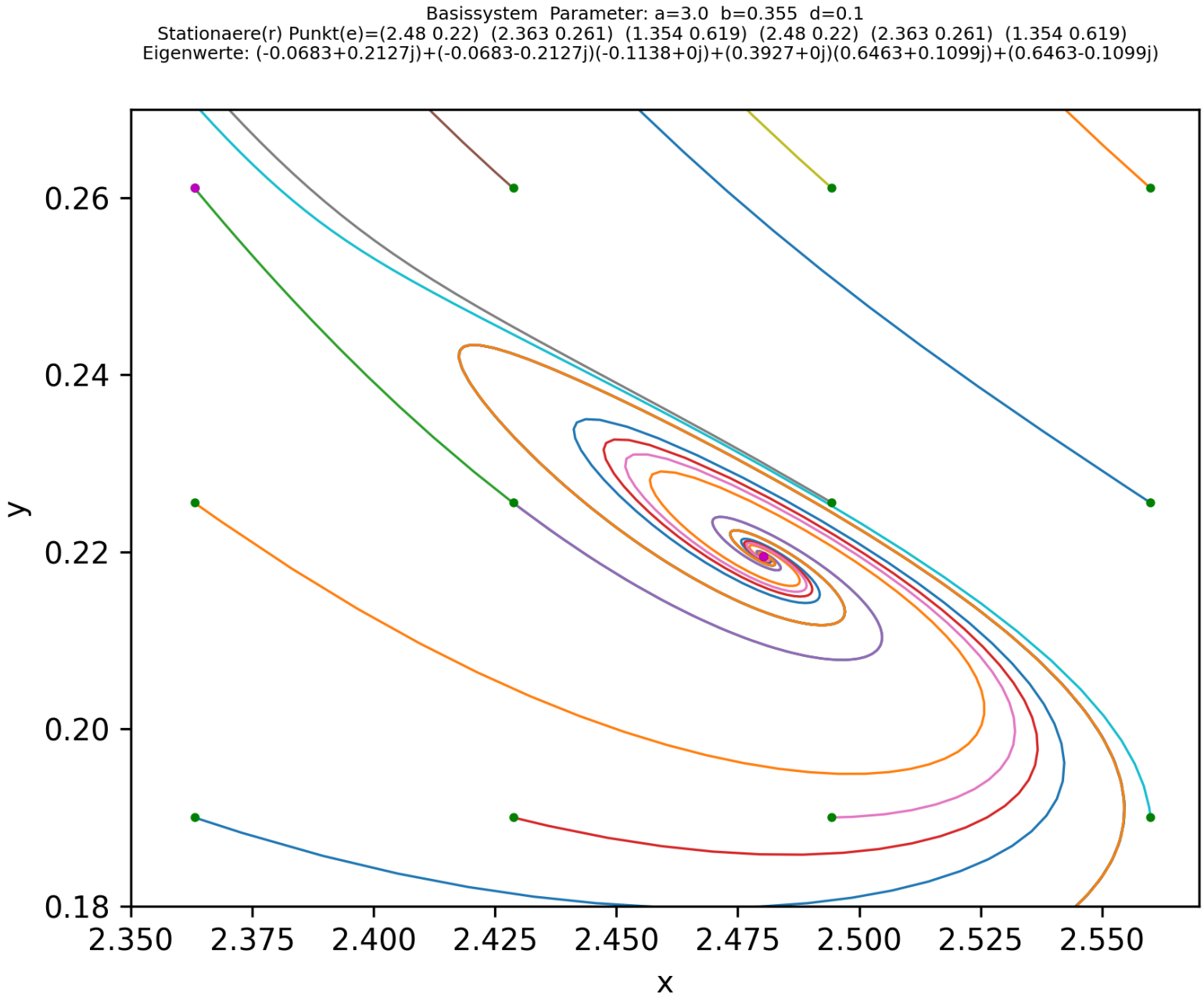
[46] J.C. Sprott and W.J. Thio. *Elegant Circuits, Simple Chaotic Oscillators*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2022.

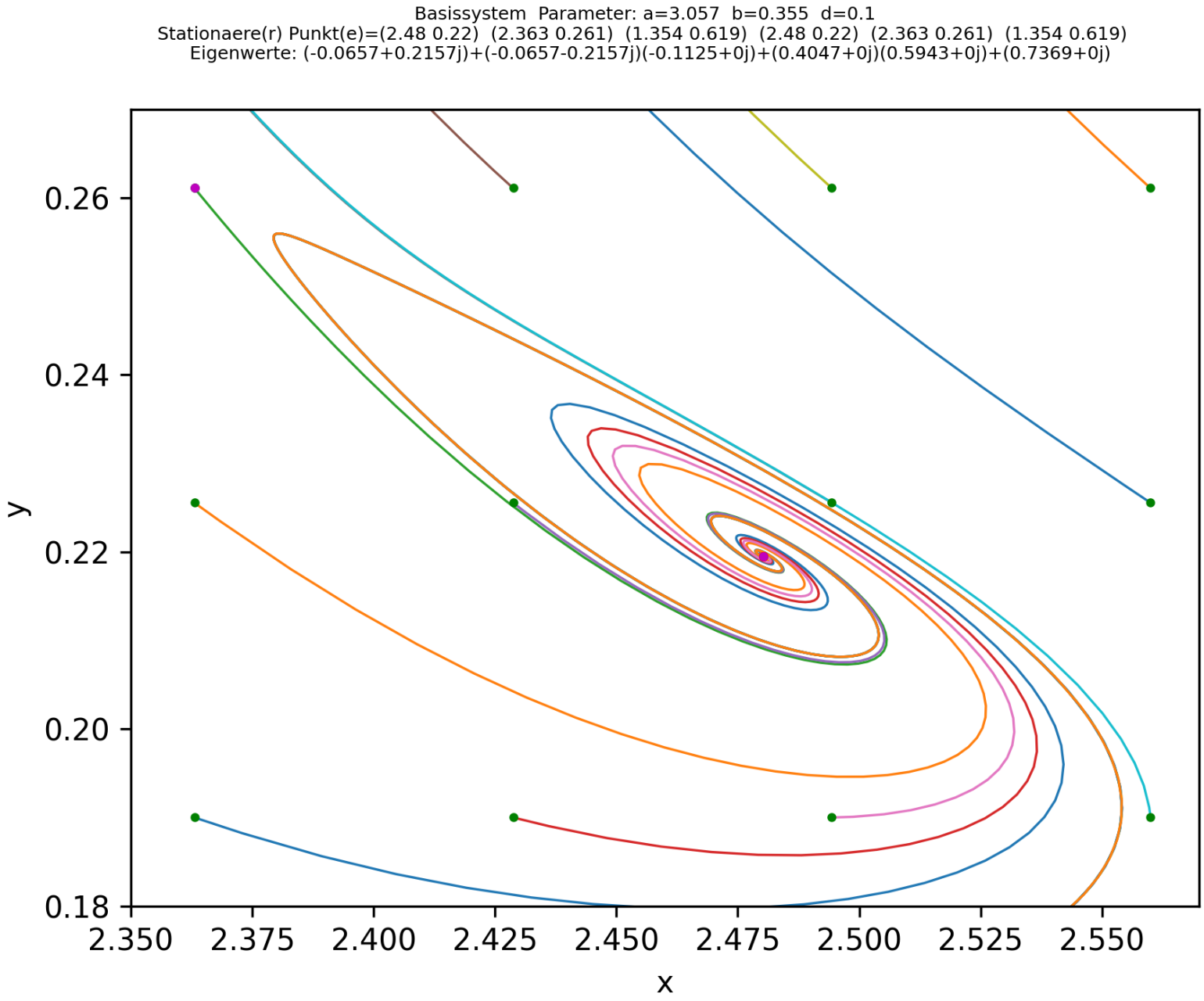
[47] J.C. Vallejo and M.A.F. Sanjuan. *Predictability of Chaotic Dynamics, A Finite-time Lyapunov Exponents Approach*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2017.

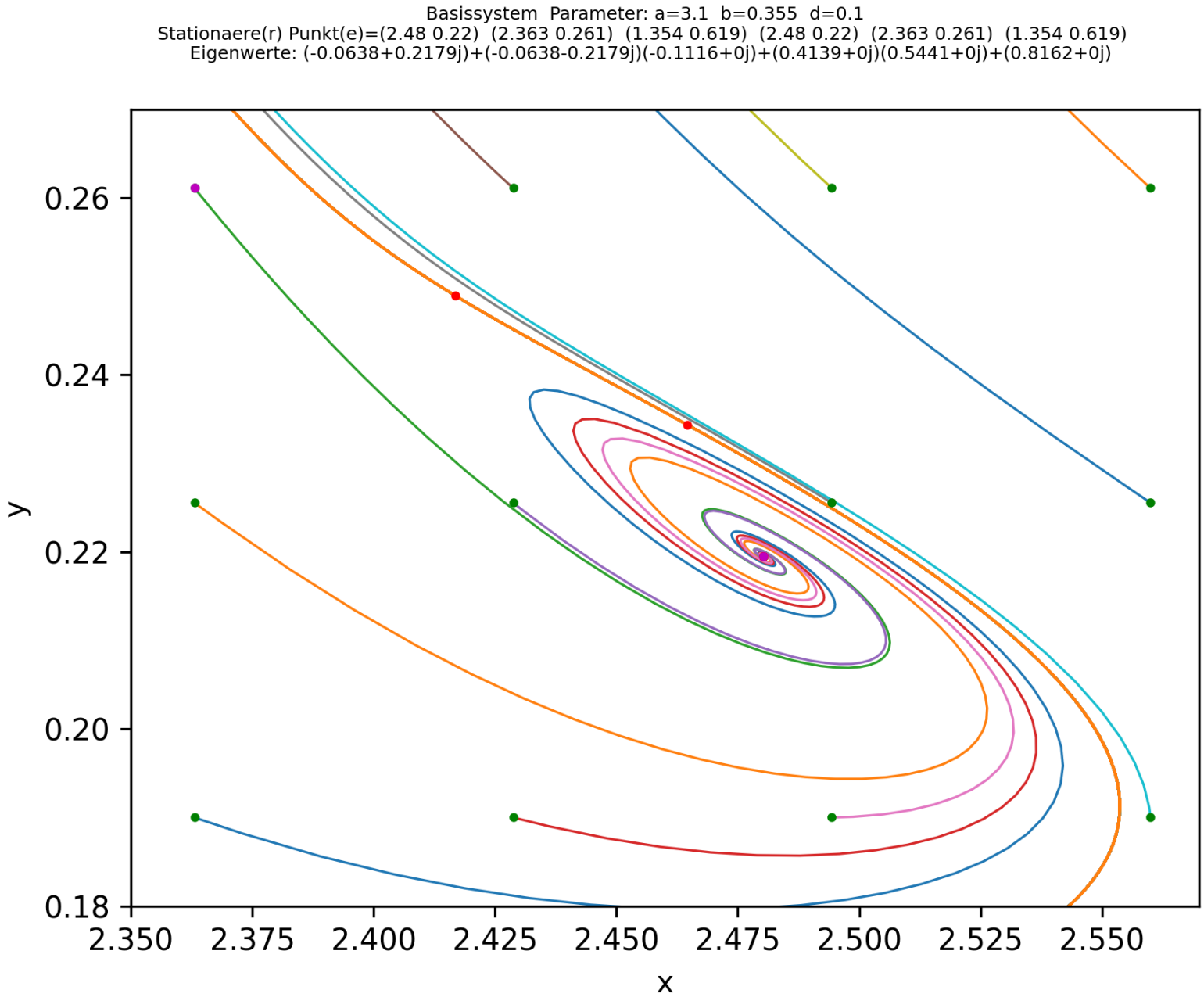
[48] T. Vialar. *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*. Berlin: Springer, 2009.

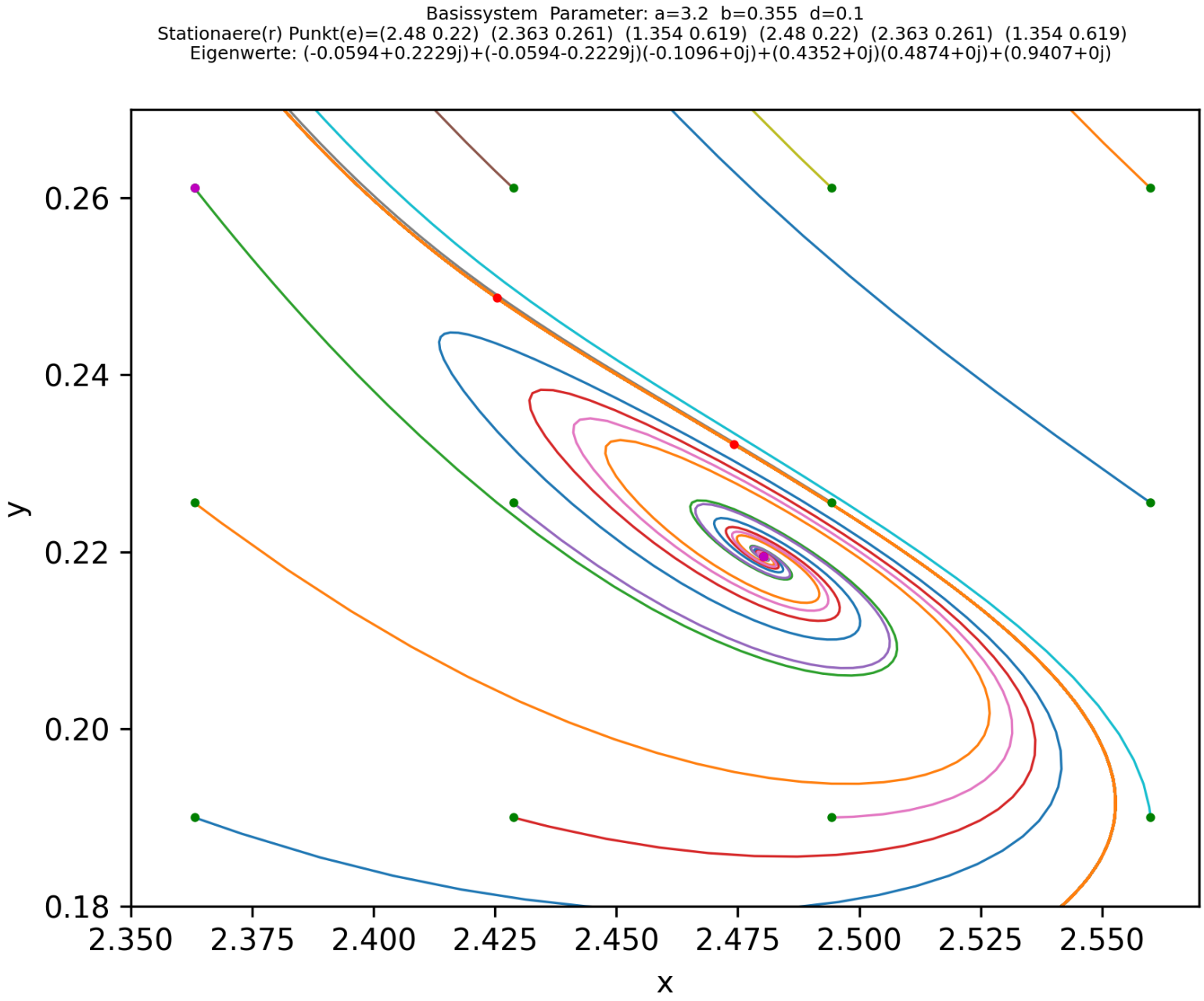
ENDE

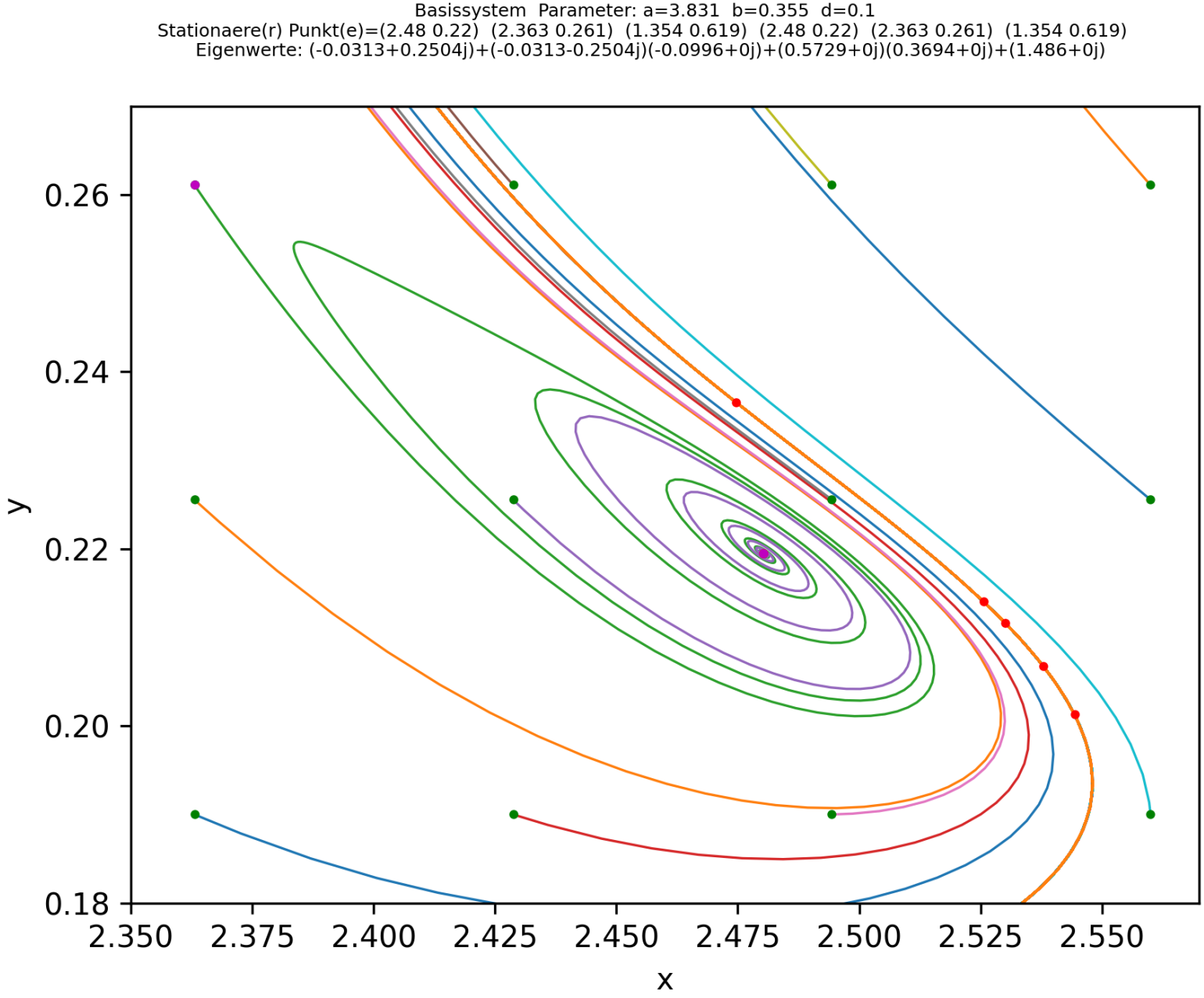
Es folgen die Vergrößerungen der kleinen Bilder des Textes.
Duch einen Mausklick ins Bild springt man zur zugehörigen Textseite.

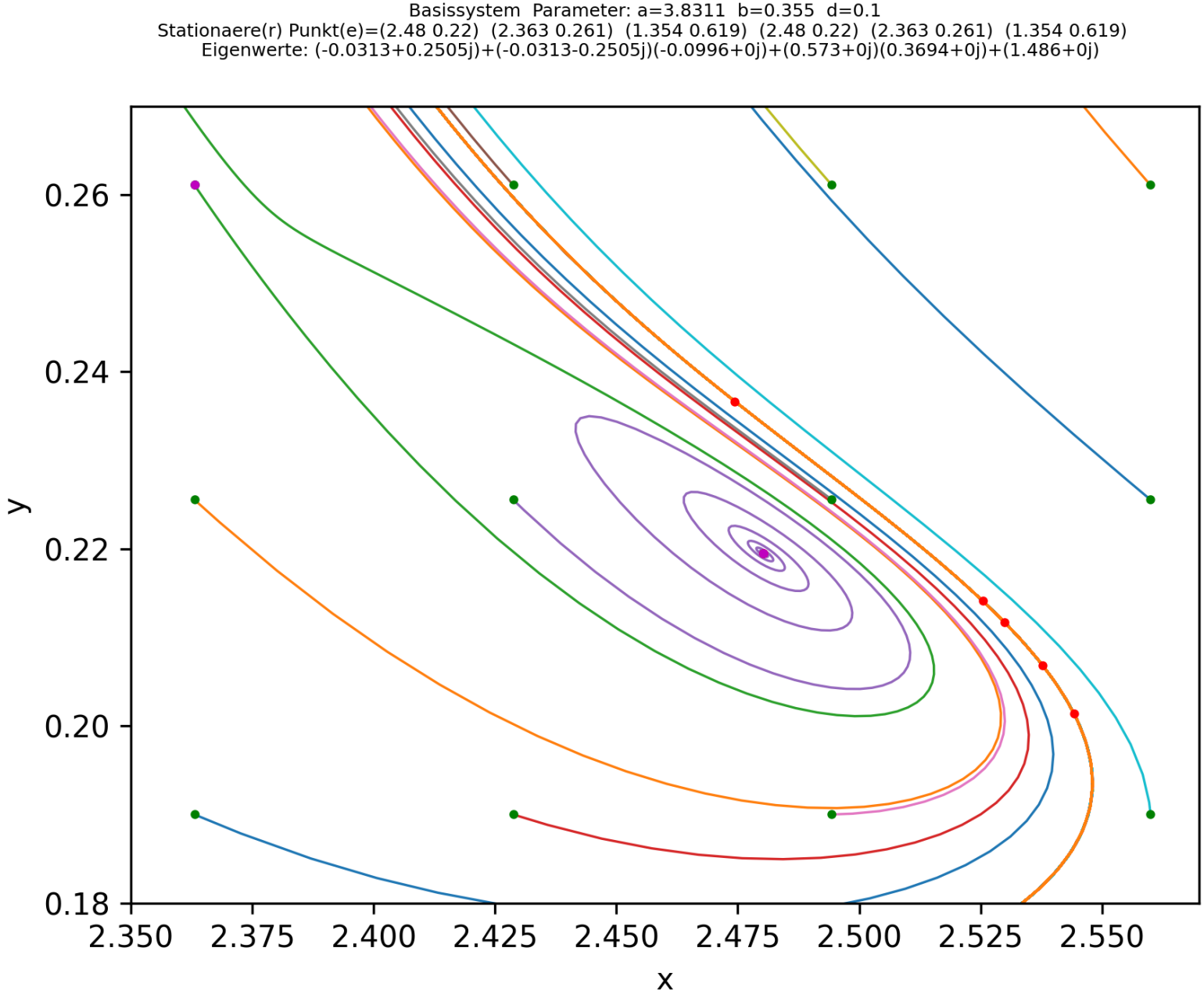

Basissystem Parameter: a=3.0 b=0.355 d=0.1
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619) (2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619)
Eigenwerte: (-0.0683+0.2127j)+(-0.0683-0.2127j)(-0.1138+0j)+(0.3927+0j)(0.6463+0.1099j)+(0.6463-0.1099j)
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
y
2.350
2.375
2.400
2.425
2.450
2.475
2.500
2.525
2.550
x

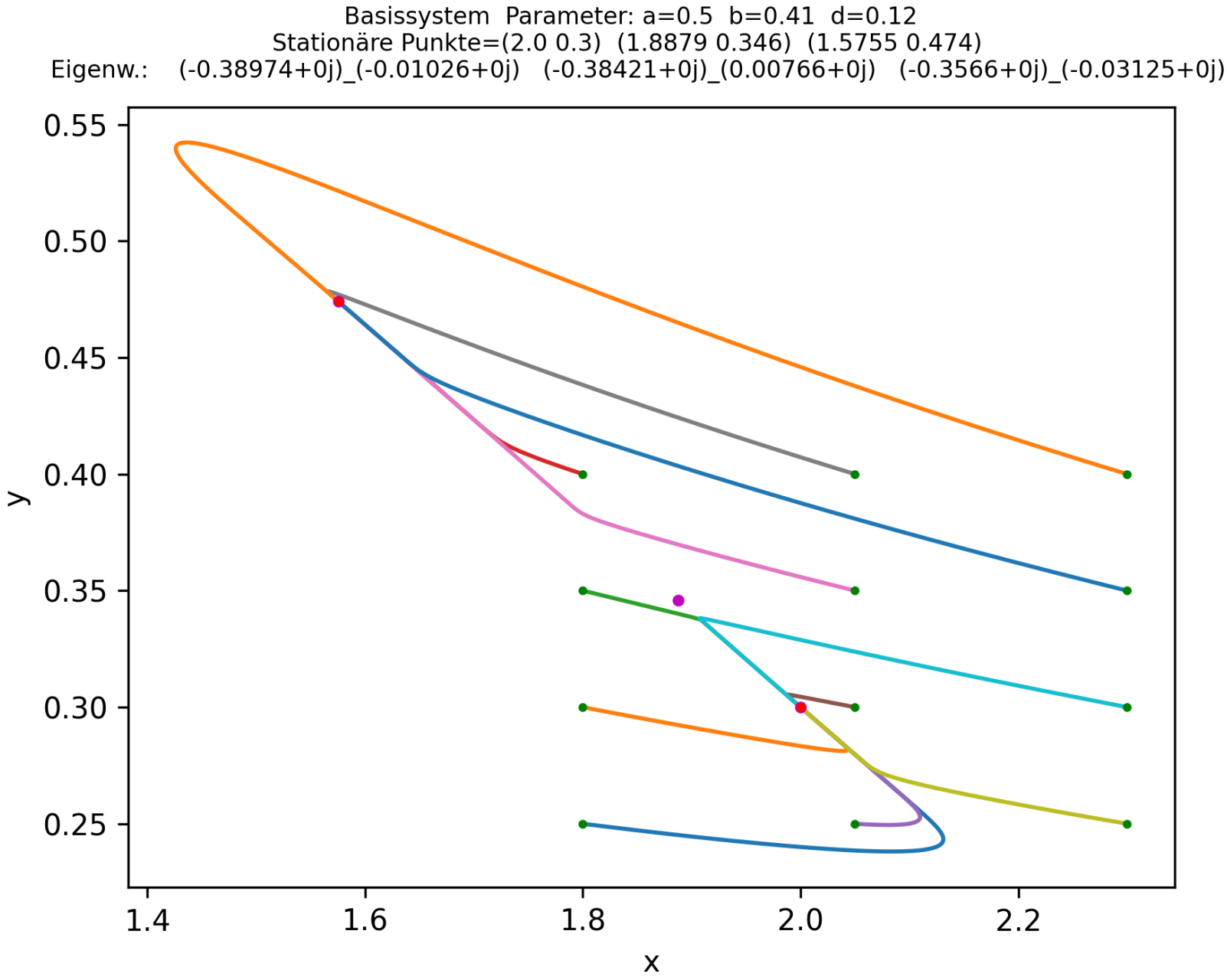

Basissystem Parameter: a=3.057 b=0.355 d=0.1
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619) (2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619)
Eigenwerte: (-0.0657+0.2157j)+(-0.0657-0.2157j)(-0.1125+0j)+(0.4047+0j)(0.5943+0j)+(0.7369+0j)
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
y
2.350
2.375
2.400
2.425
2.450
2.475
2.500
2.525
2.550
x

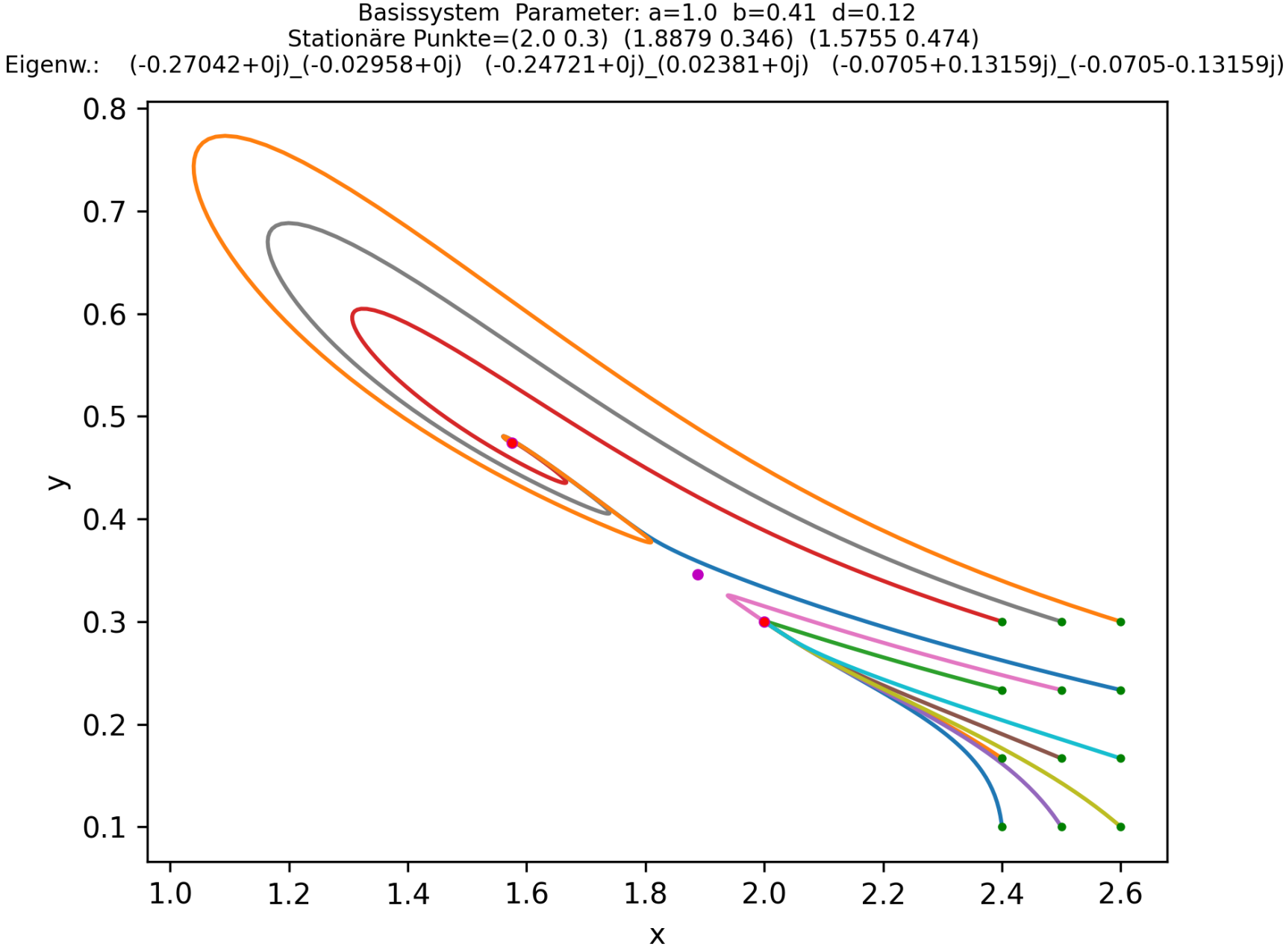

Basissystem Parameter: a=3.1 b=0.355 d=0.1
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619) (2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619)
Eigenwerte: (-0.0638+0.2179j)+(-0.0638-0.2179j)(-0.1116+0j)+(0.4139+0j)(0.5441+0j)+(0.8162+0j)
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
y
2.350
2.375
2.400
2.425
2.450
2.475
2.500
2.525
2.550
x

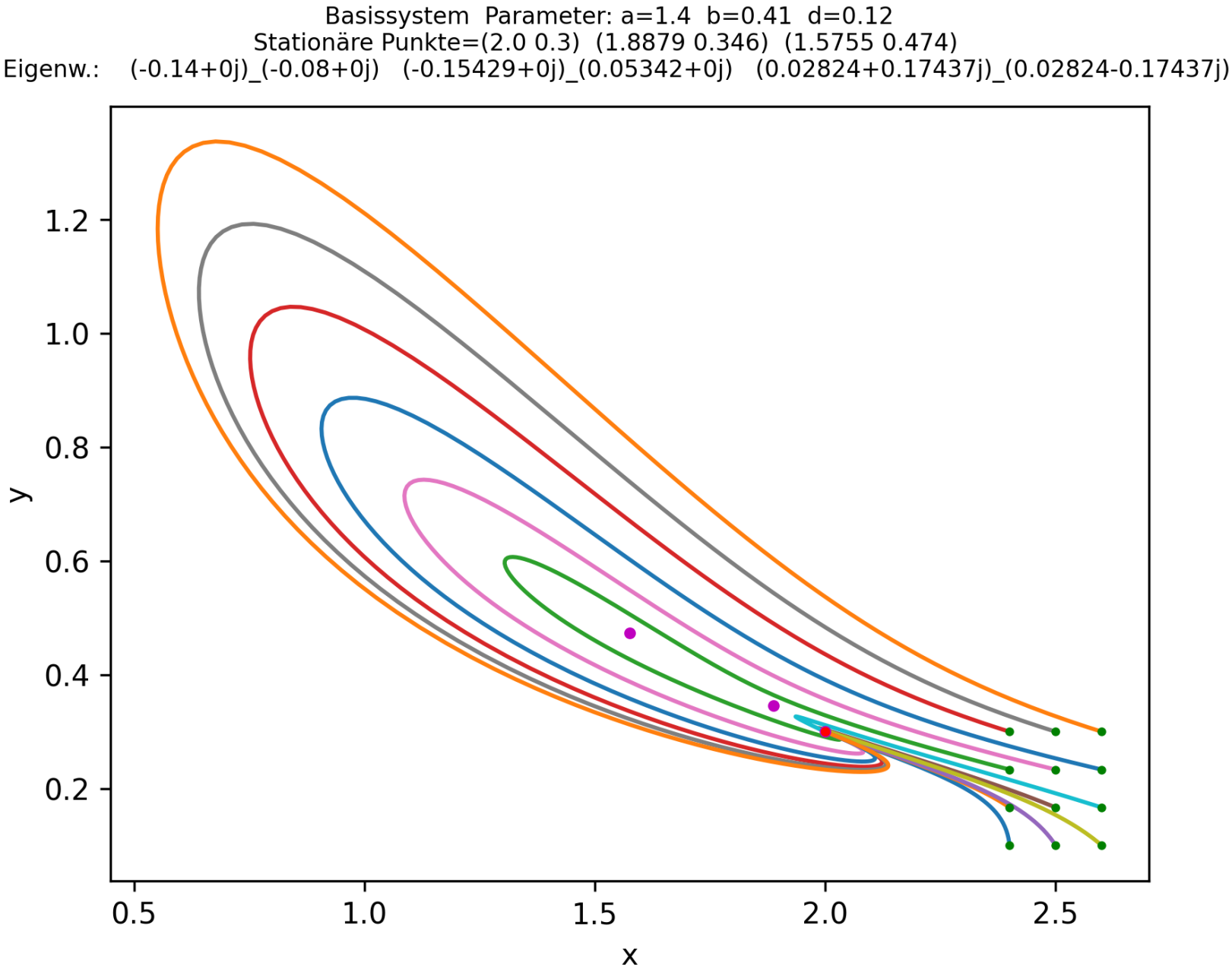

Basissystem Parameter: a=3.2 b=0.355 d=0.1
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619) (2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619)
Eigenwerte: (-0.0594+0.2229j)+(-0.0594-0.2229j)(-0.1096+0j)+(0.4352+0j)(0.4874+0j)+(0.9407+0j)
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
y
2.350
2.375
2.400
2.425
2.450
2.475
2.500
2.525
2.550
x

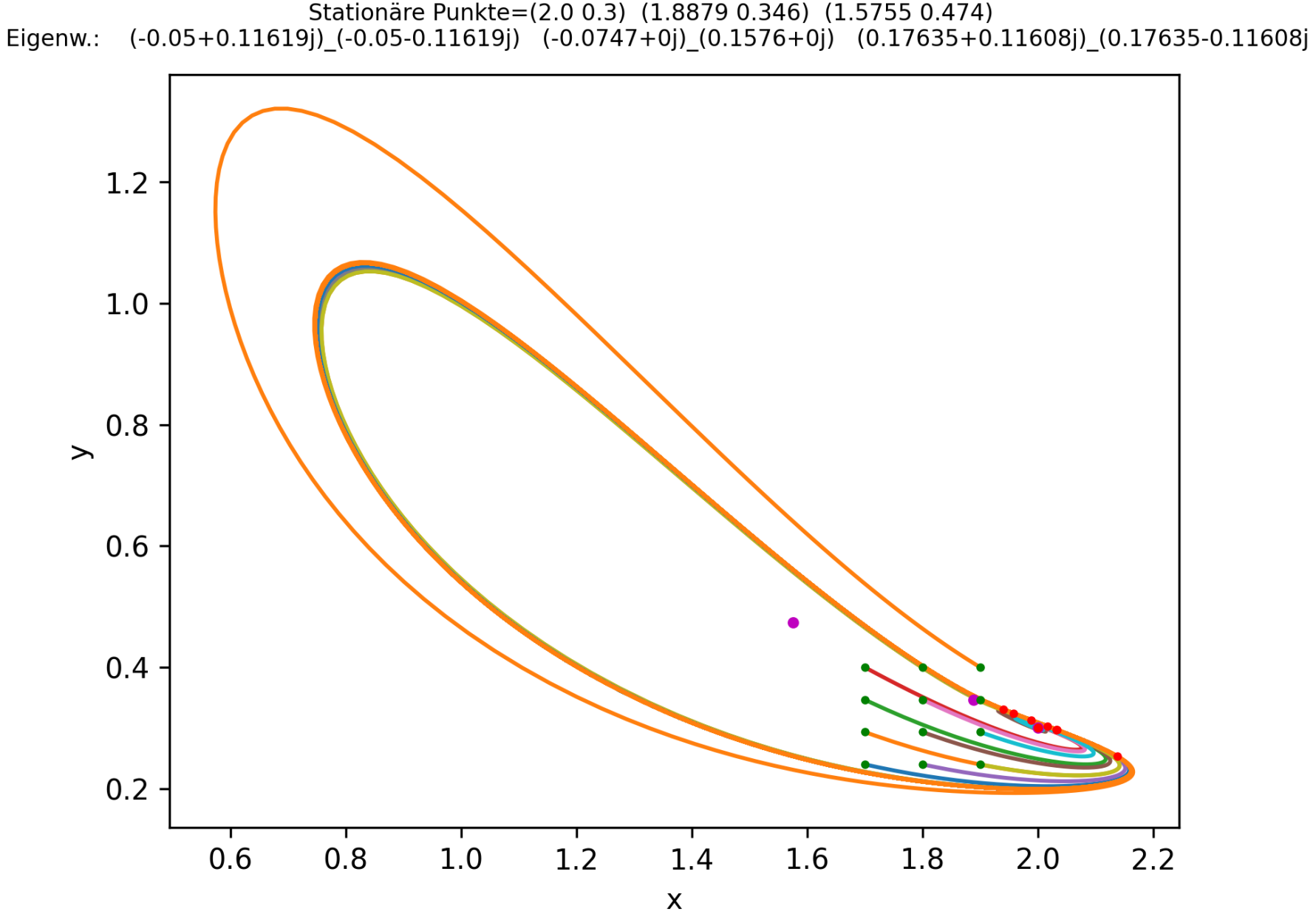

Basissystem Parameter: a=3.831 b=0.355 d=0.1
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619) (2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619)
Eigenwerte: (-0.0313+0.2504j)+(-0.0313-0.2504j)(-0.0996+0j)+(0.5729+0j)(0.3694+0j)+(1.486+0j)
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
y
2.350
2.375
2.400
2.425
2.450
2.475
2.500
2.525
2.550
x

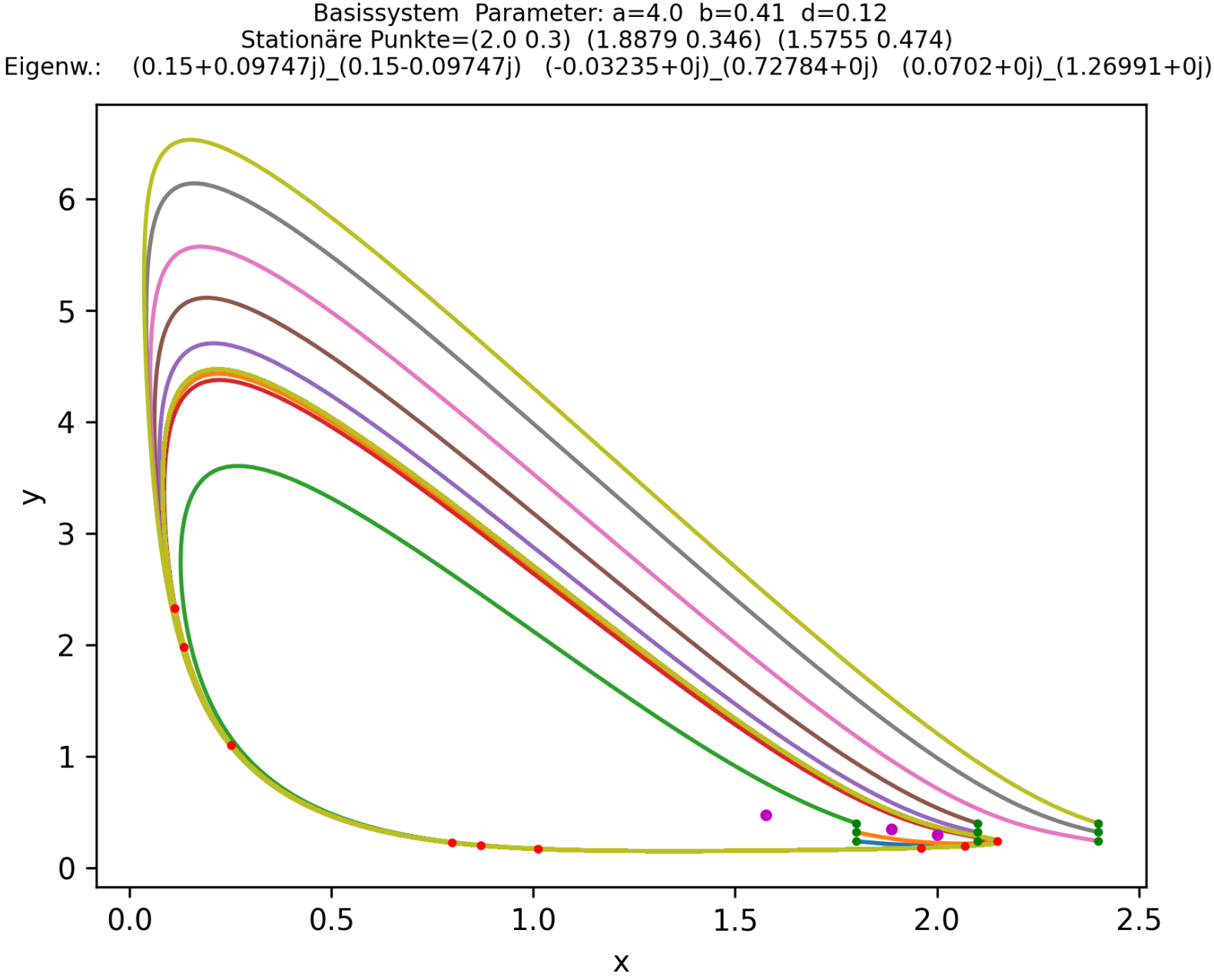

Basissystem Parameter: a=3.8311 b=0.355 d=0.1
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619) (2.48 0.22) (2.363 0.261) (1.354 0.619)
Eigenwerte: (-0.0313+0.2505j)+(-0.0313-0.2505j)(-0.0996+0j)+(0.573+0j)(0.3694+0j)+(1.486+0j)
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
y
2.350
2.375
2.400
2.425
2.450
2.475
2.500
2.525
2.550
x

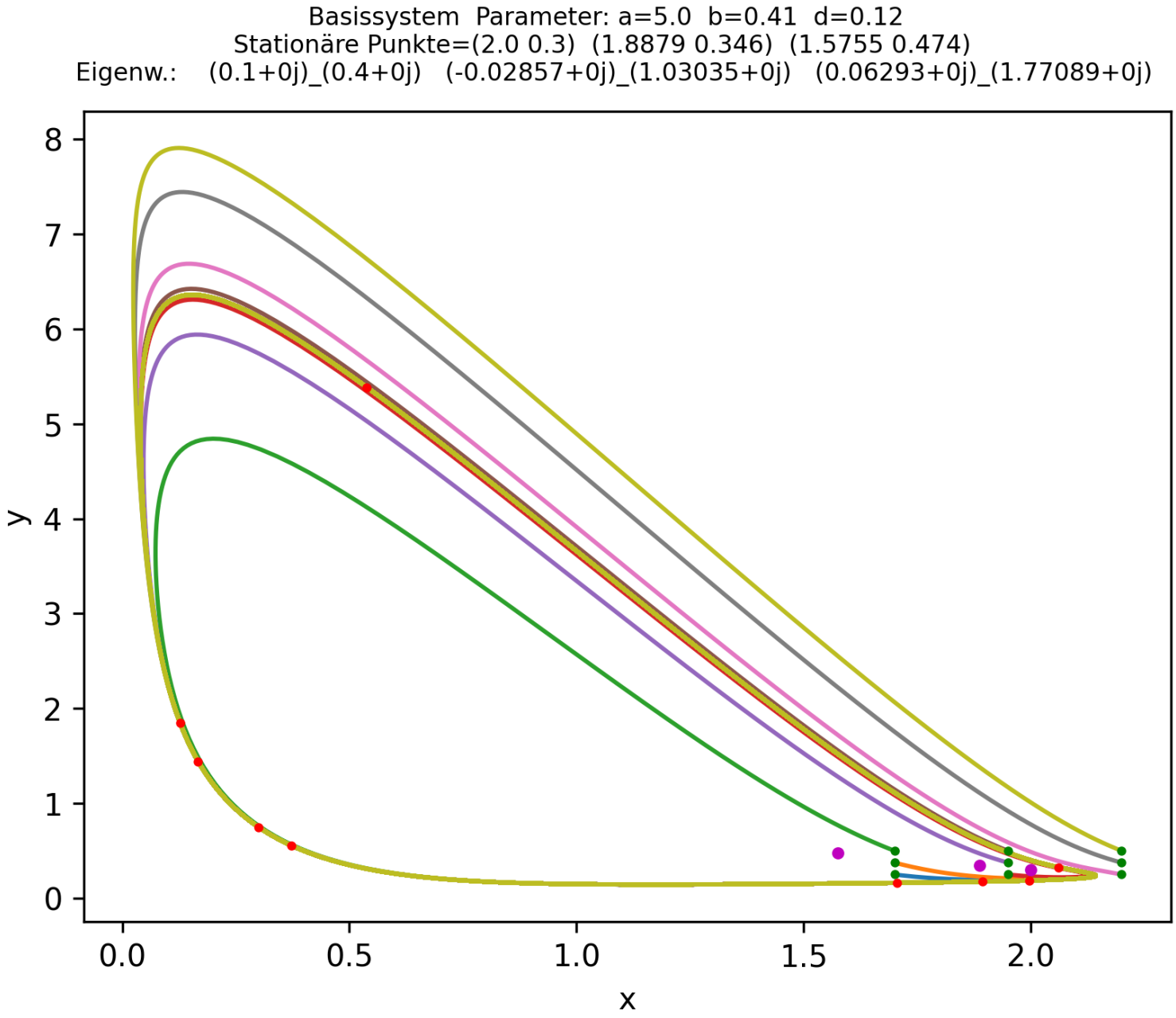

Basissystem Parameter: a=0.5 b=0.41 d=0.12
Stationäre Punkte=(2.0 0.3) (1.8879 0.346) (1.5755 0.474)
Eigenw.: (-0.38974+0j)_(-0.01026+0j) (-0.38421+0j)_(0.00766+0j) (-0.3566+0j)_(-0.03125+0j)
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
y
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
x

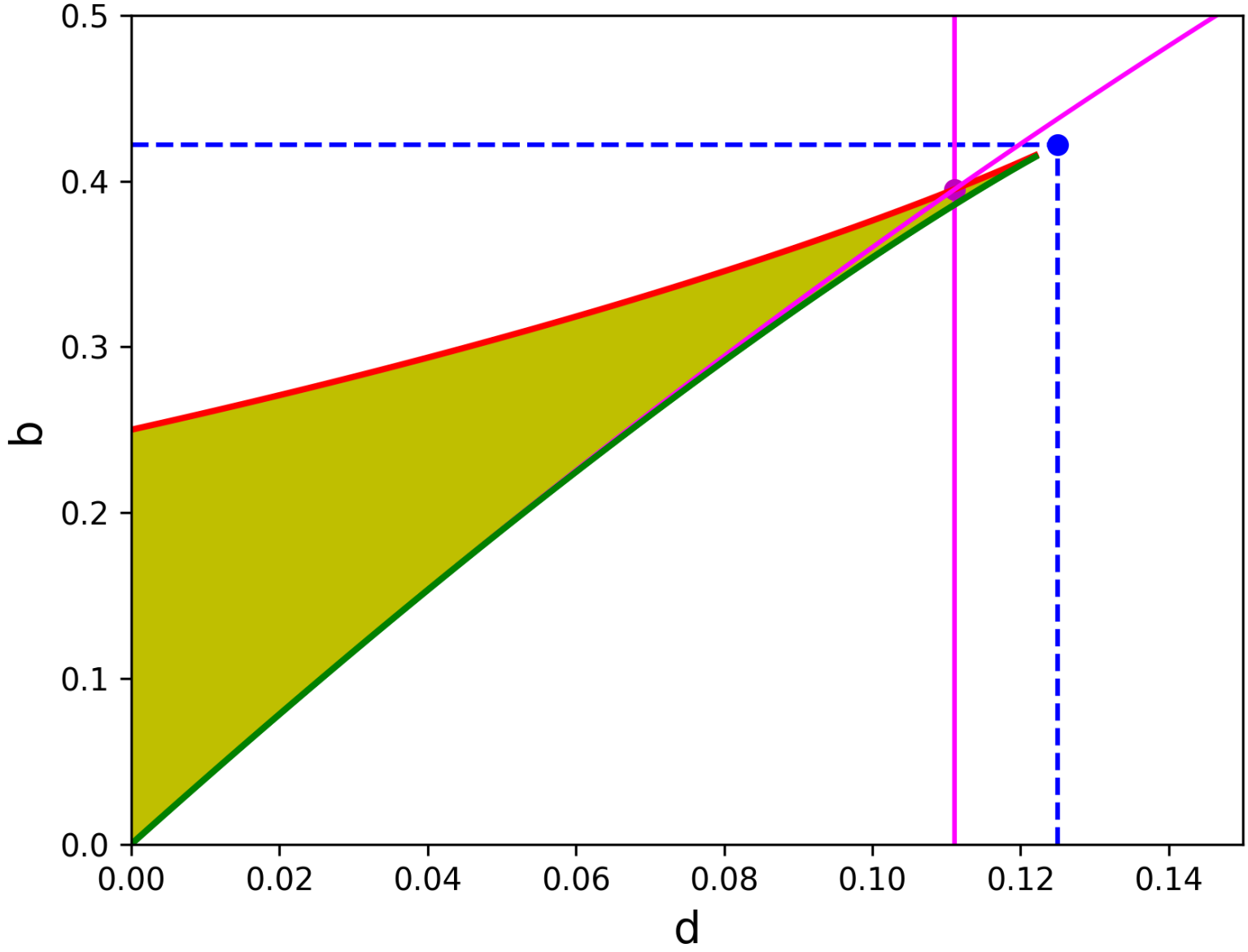

Basissystem Parameter: a=1.0 b=0.41 d=0.12
Stationäre Punkte=(2.0 0.3) (1.8879 0.346) (1.5755 0.474)
Eigenw.: (-0.27042+0j)_(-0.02958+0j) (-0.24721+0j)_(0.02381+0j) (-0.0705+0.13159j)_(-0.0705-0.13159j)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
y
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
x

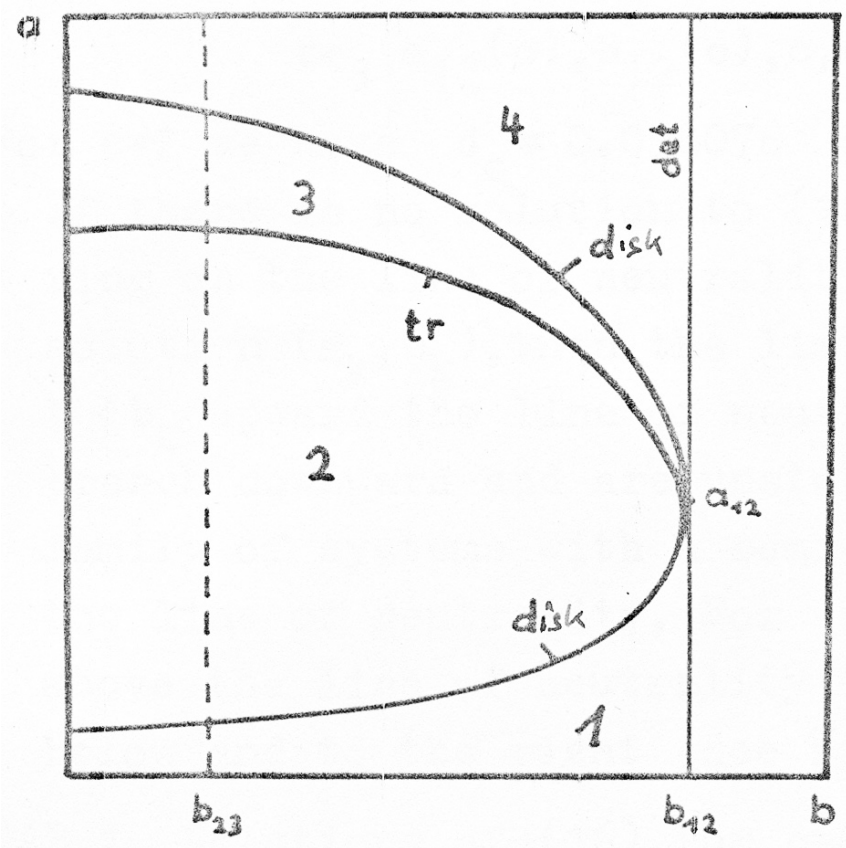

Basissystem Parameter: a=1.4 b=0.41 d=0.12
Stationäre Punkte=(2.0 0.3) (1.8879 0.346) (1.5755 0.474)
Eigenw.: (-0.14+0j)_(-0.08+0j) (-0.15429+0j)_(0.05342+0j) (0.02824+0.17437j)_(0.02824-0.17437j)
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

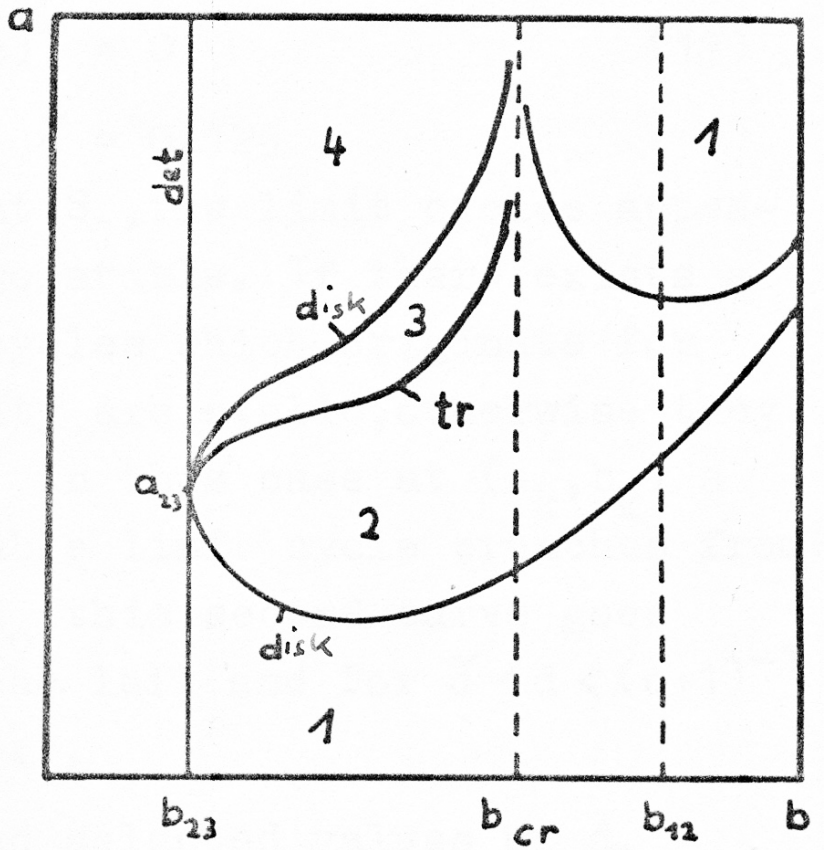

Basissystem Parameter: a=2.0 b=0.41 d=0.12
Stationäre Punkte=(2.0 0.3) (1.8879 0.346) (1.5755 0.474)
Eigenw.: (-0.05+0.11619j)_(-0.05-0.11619j) (-0.0747+0j)_(0.1576+0j) (0.17635+0.11608j)_(0.17635-0.11608j
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
x

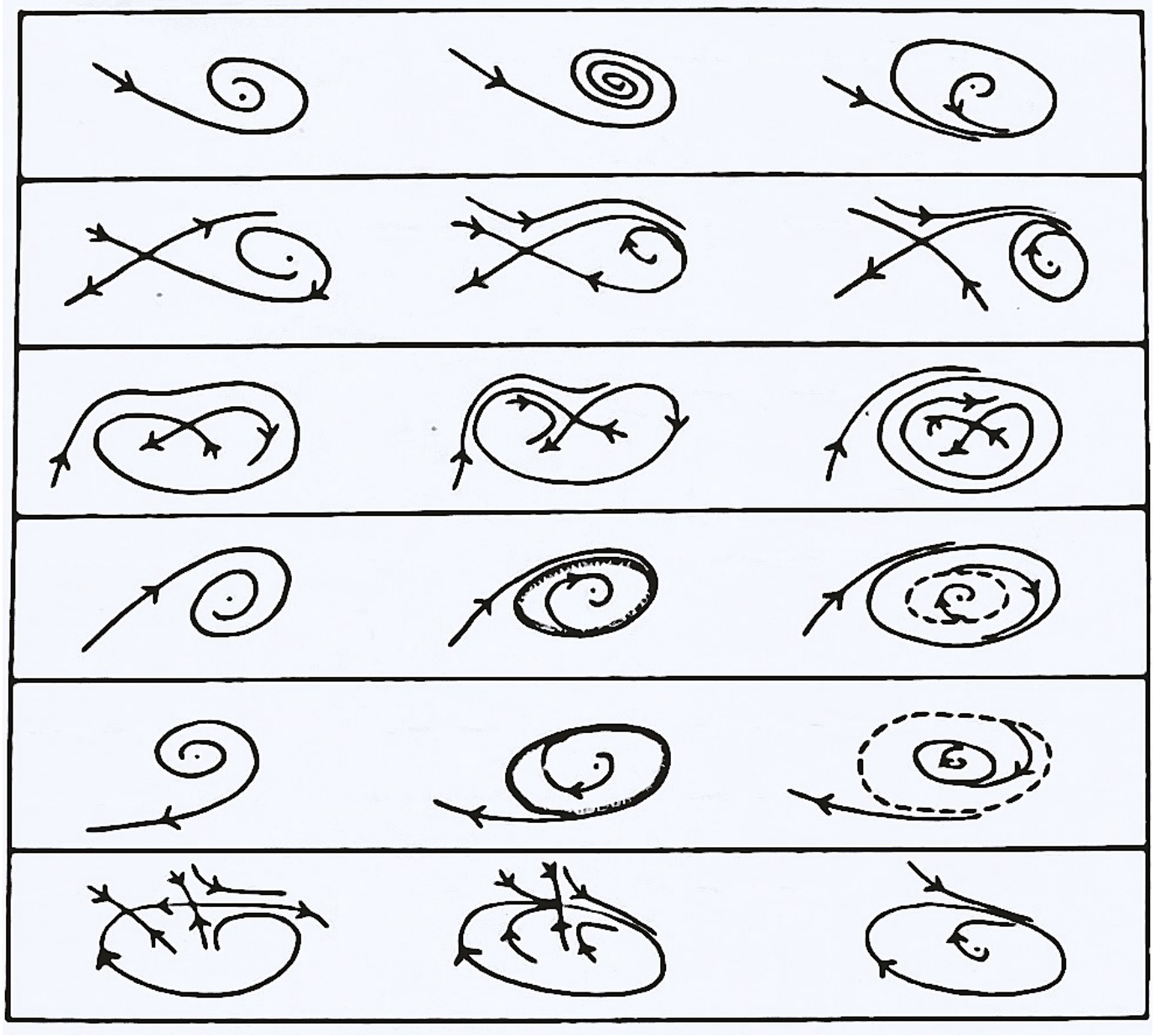

Basissystem Parameter: a=4.0 b=0.41 d=0.12
Stationäre Punkte=(2.0 0.3) (1.8879 0.346) (1.5755 0.474)
Eigenw.: (0.15+0.09747j)_(0.15-0.09747j) (-0.03235+0j)_(0.72784+0j) (0.0702+0j)_(1.26991+0j)
y
x
0
1
2
3
4
5
6
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

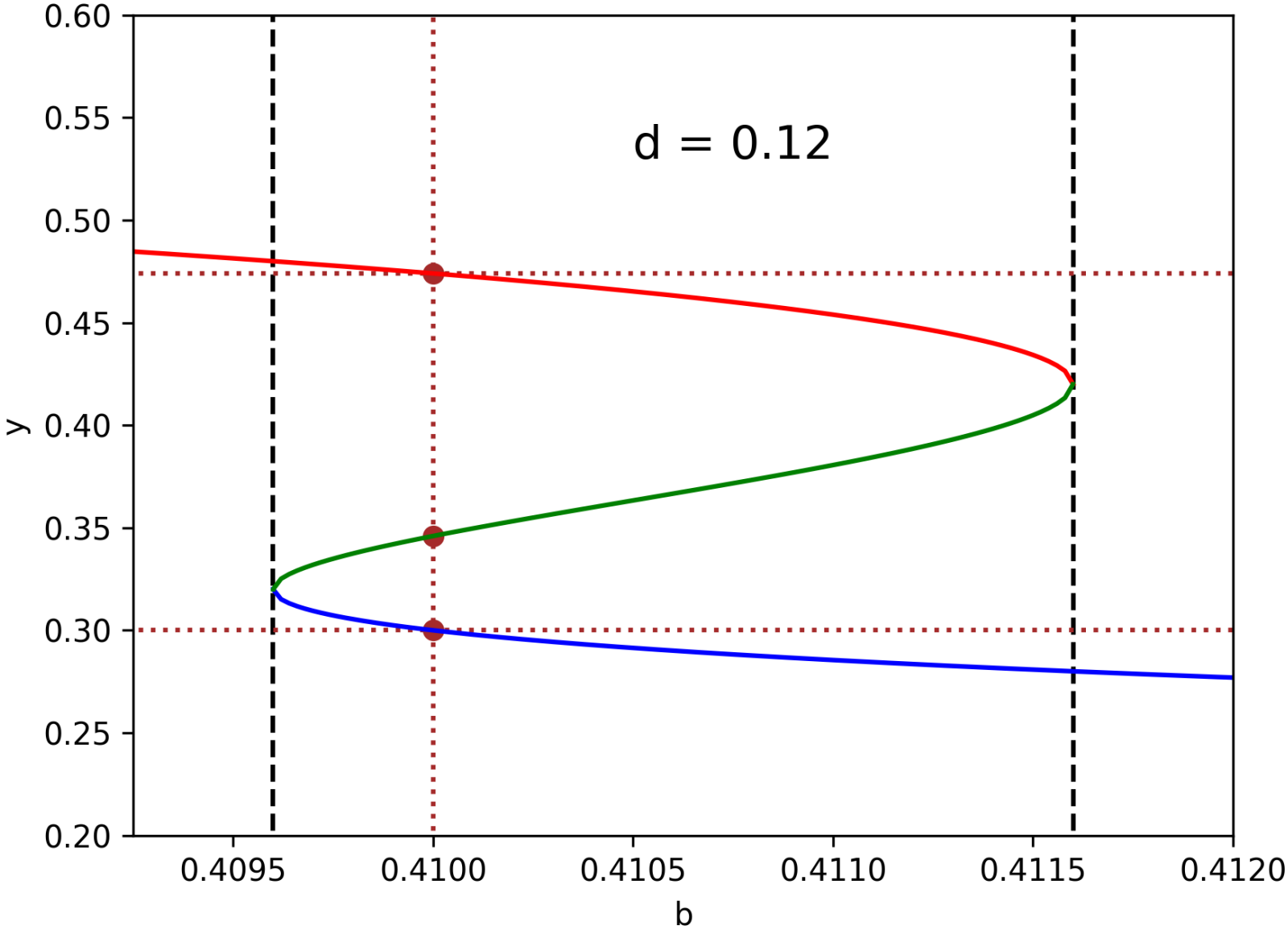

Basissystem Parameter: a=5.0 b=0.41 d=0.12
Stationäre Punkte=(2.0 0.3) (1.8879 0.346) (1.5755 0.474)
Eigenw.: (0.1+0j)_(0.4+0j) (-0.02857+0j)_(1.03035+0j) (0.06293+0j)_(1.77089+0j)
y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

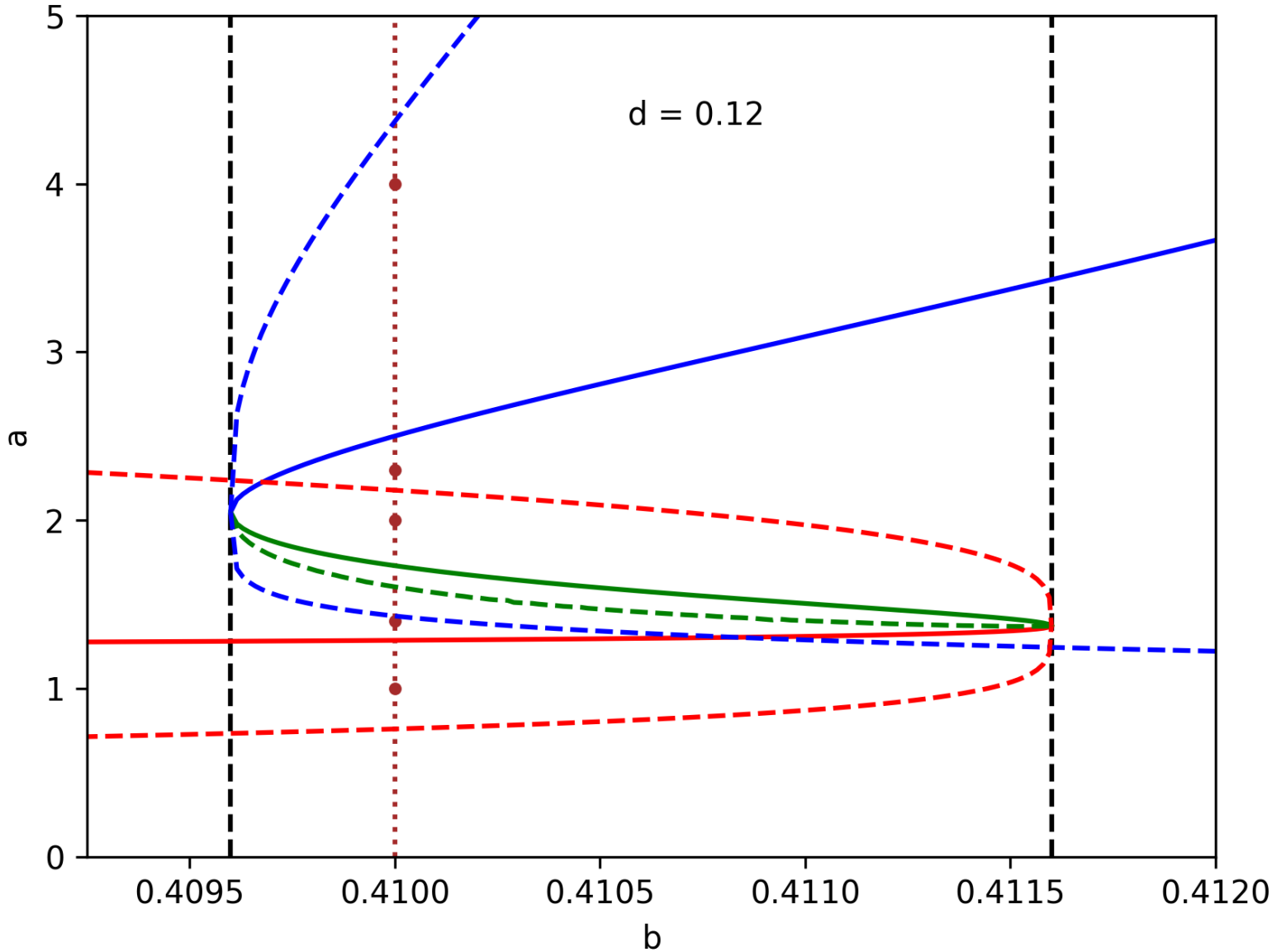

0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
b
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
d

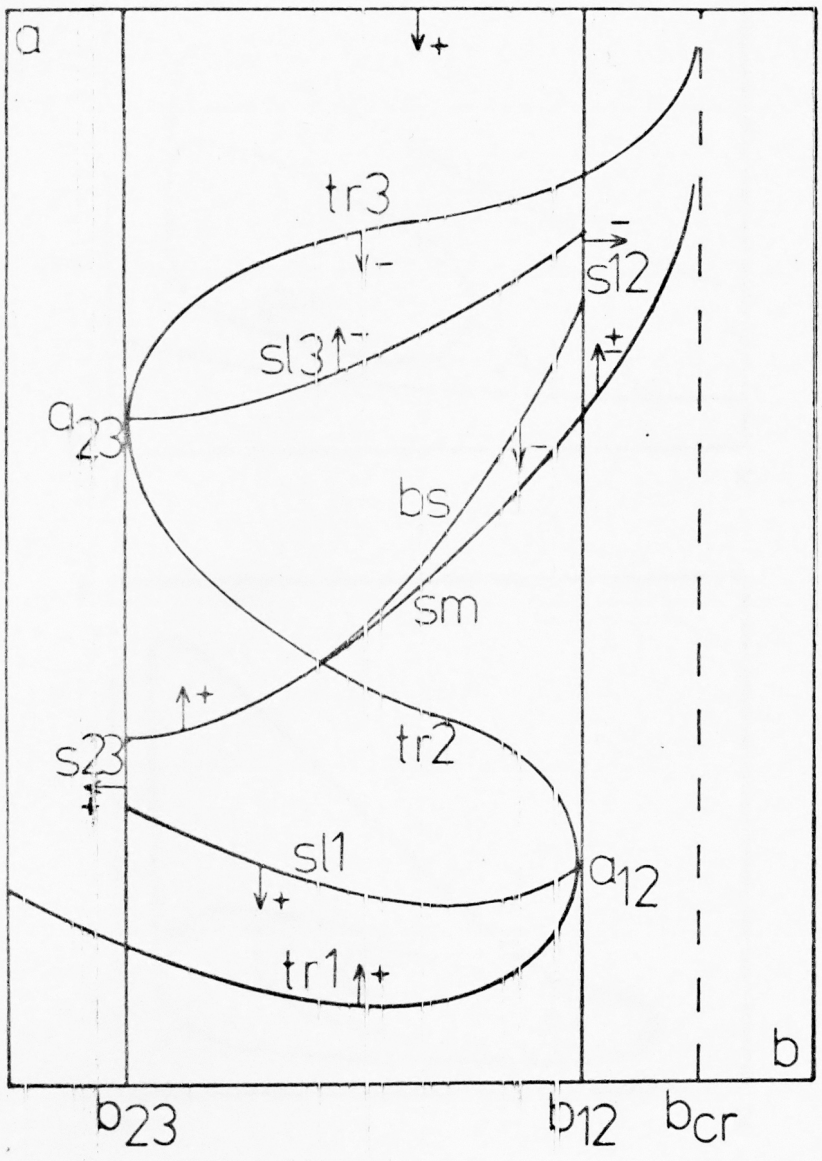

a
4
3
2
1
det
disk
tr
disk
a_{12}
b_{23}
b_{12}
b

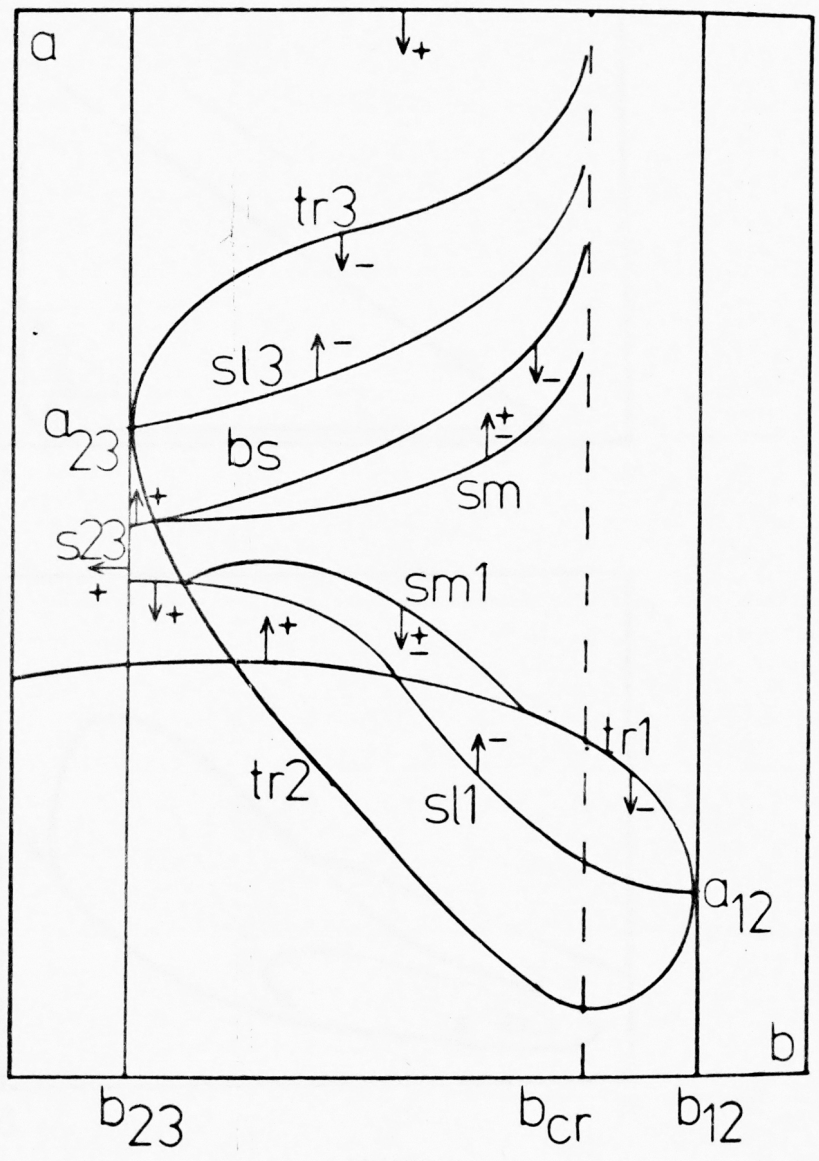

a
4
1
3
2
1
det
disk
tr
disk
a_{23}
b_{23}
b_{cr}
b_{12}
b

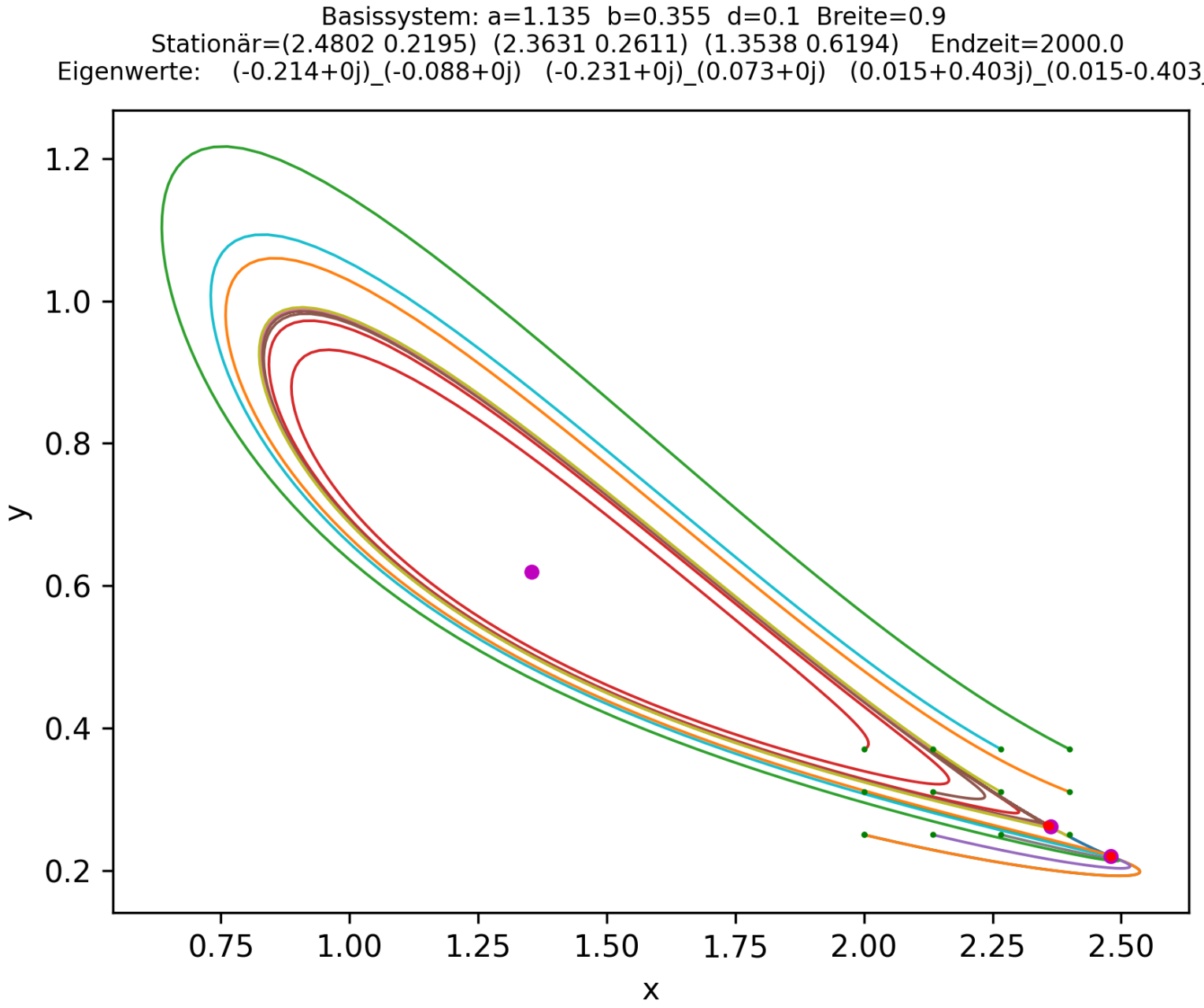


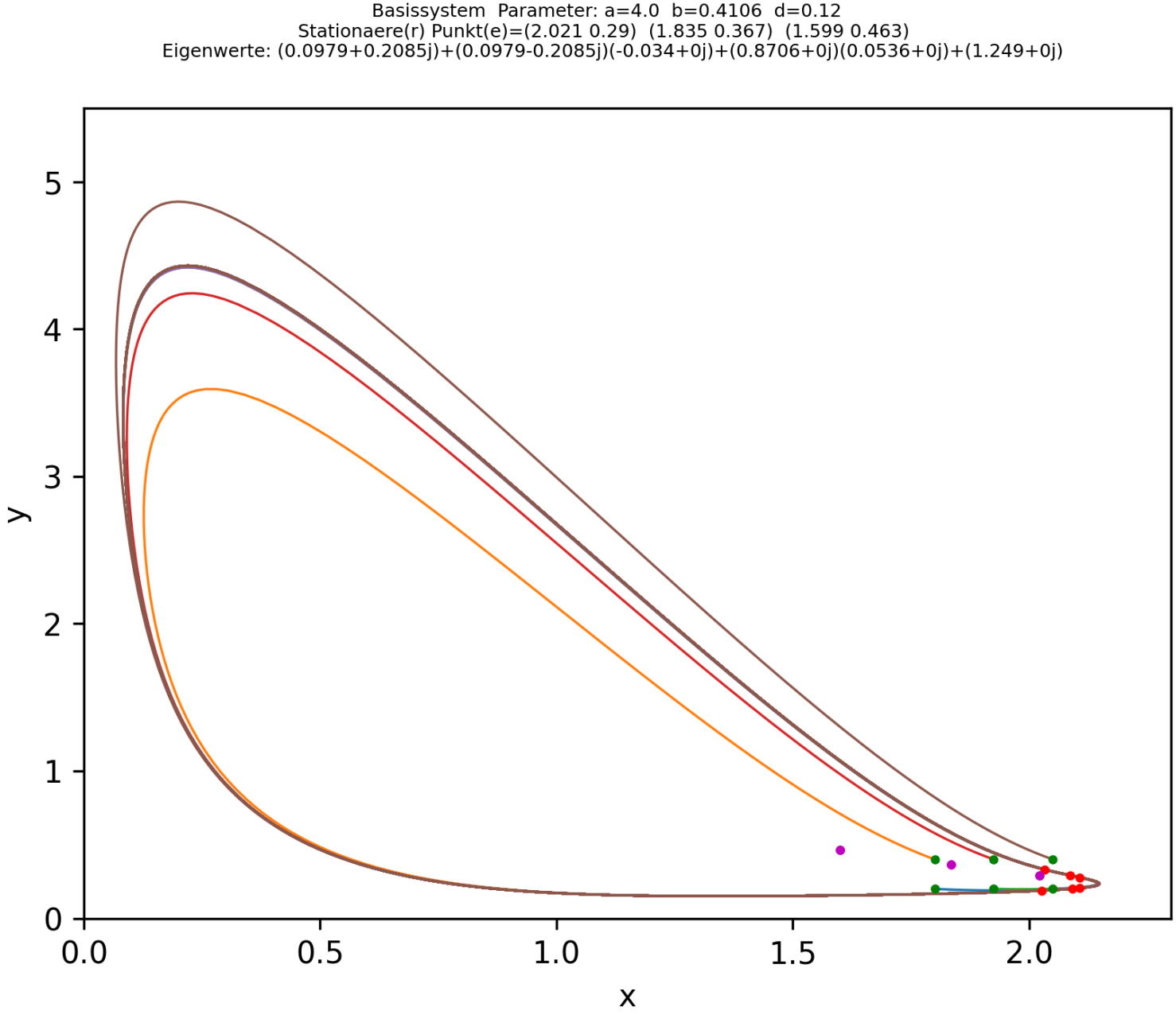

d = 0.12
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
y
0.4095
0.4100
0.4105
0.4110
0.4115
0.4120
b

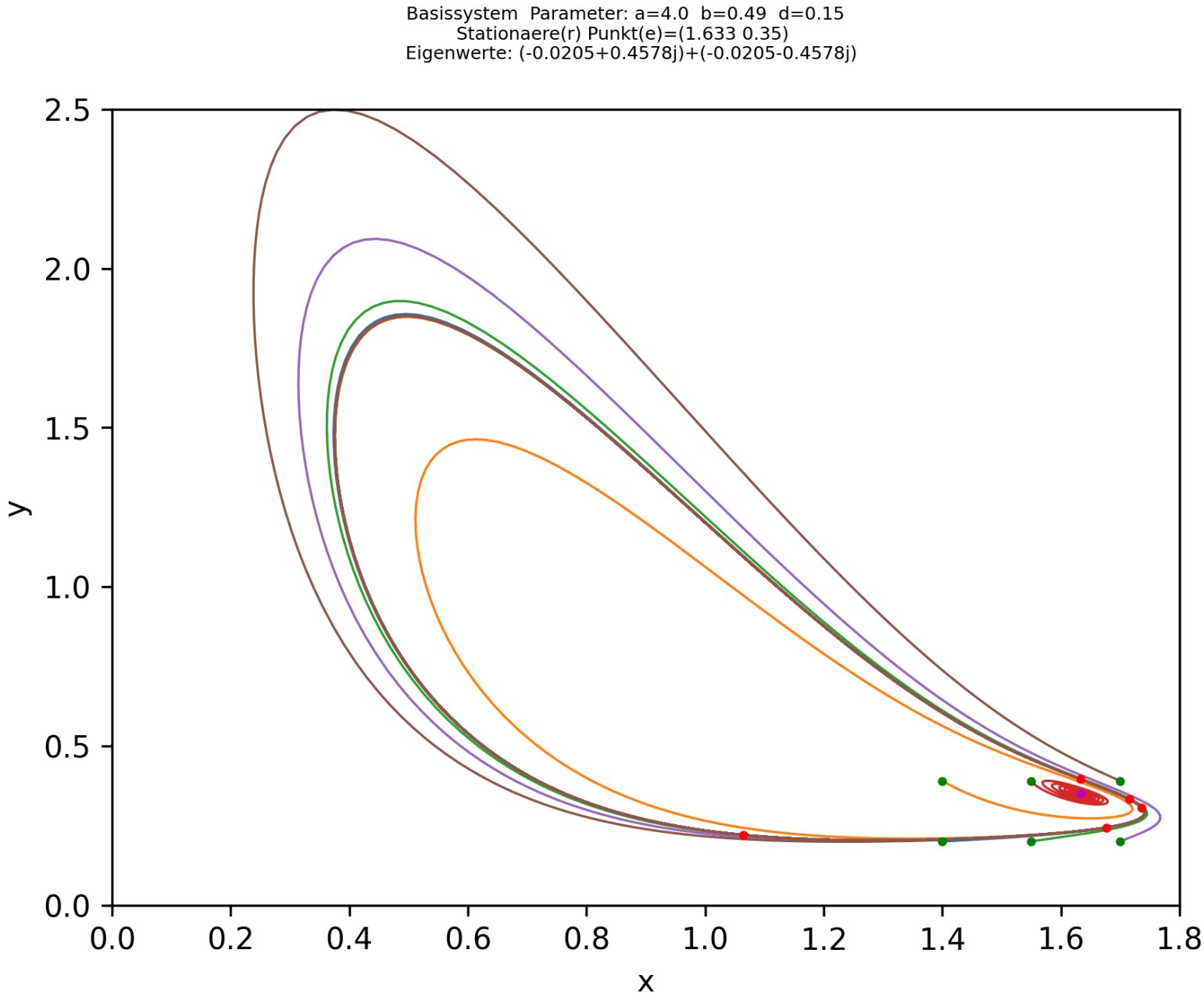

d = 0.12
a
b
0
1
2
3
4
5
0.4095
0.4100
0.4105
0.4110
0.4115
0.4120


a
tr3
sl3
a23
bs
sm
s12
s23
tr2
sl1
a12
tr1
b
b23
b12
bcr

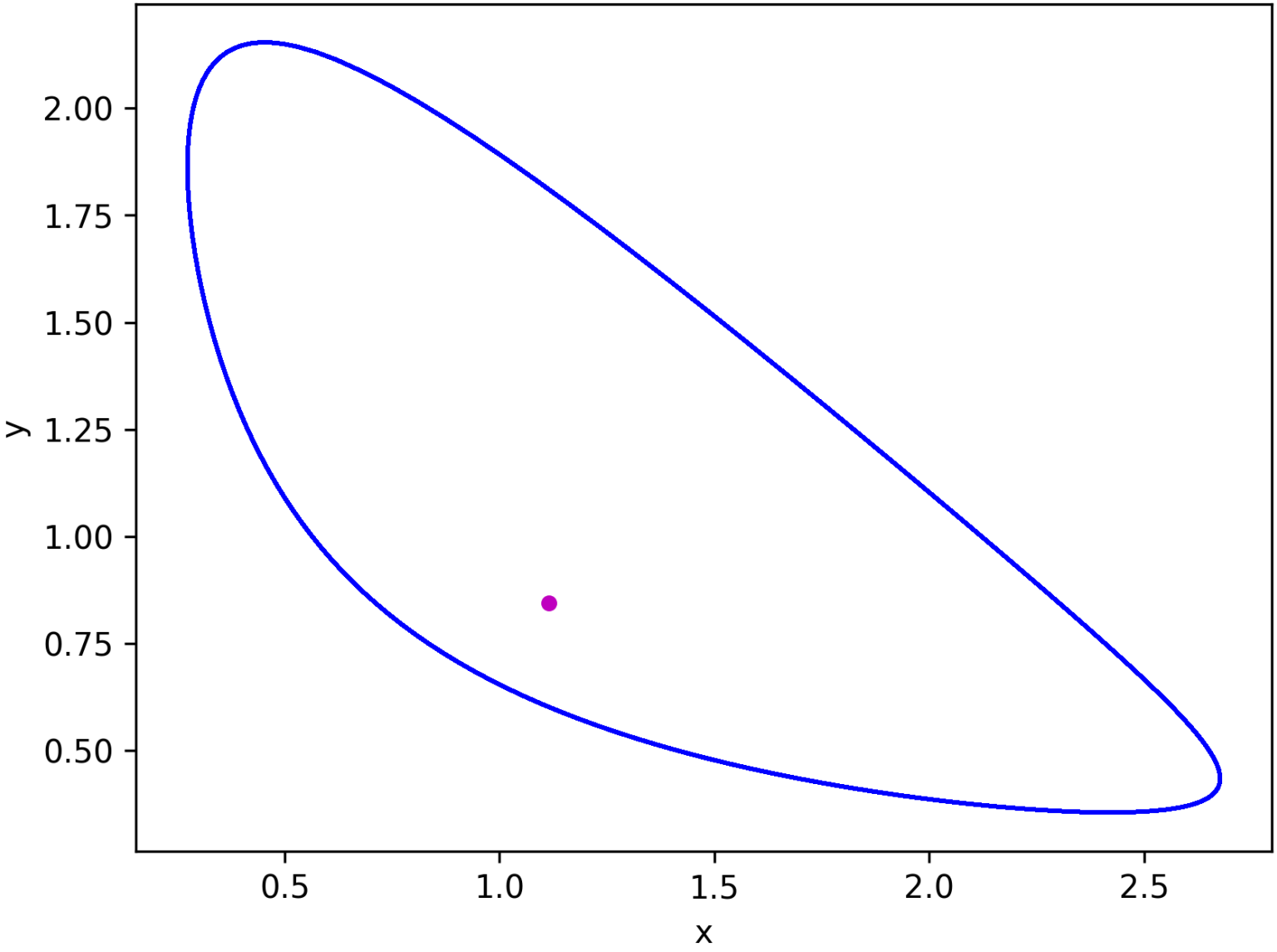

a
tr3
sl3
a23
bs
sm
s23
sm1
tr1
tr2
sl1
a12
b
b23
bcr
b12

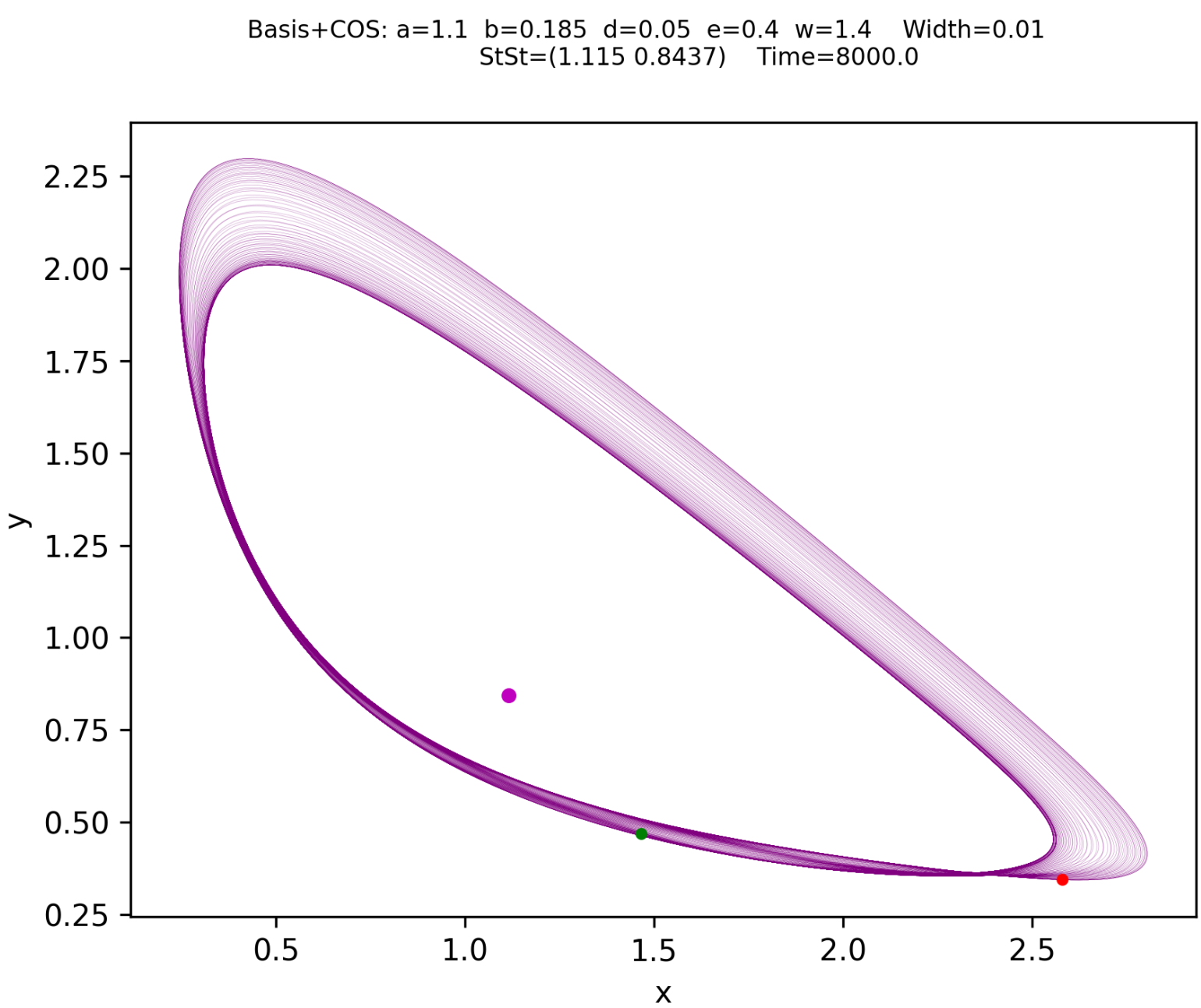

Basissystem: a=1.135 b=0.355 d=0.1 Breite=0.9
Stationär=(2.4802 0.2195) (2.3631 0.2611) (1.3538 0.6194) Endzeit=2000.0
Eigenwerte: (-0.214+0j)_(-0.088+0j) (-0.231+0j)_(0.073+0j) (0.015+0.403j)_(0.015-0.403j)
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
2.25
2.50
x

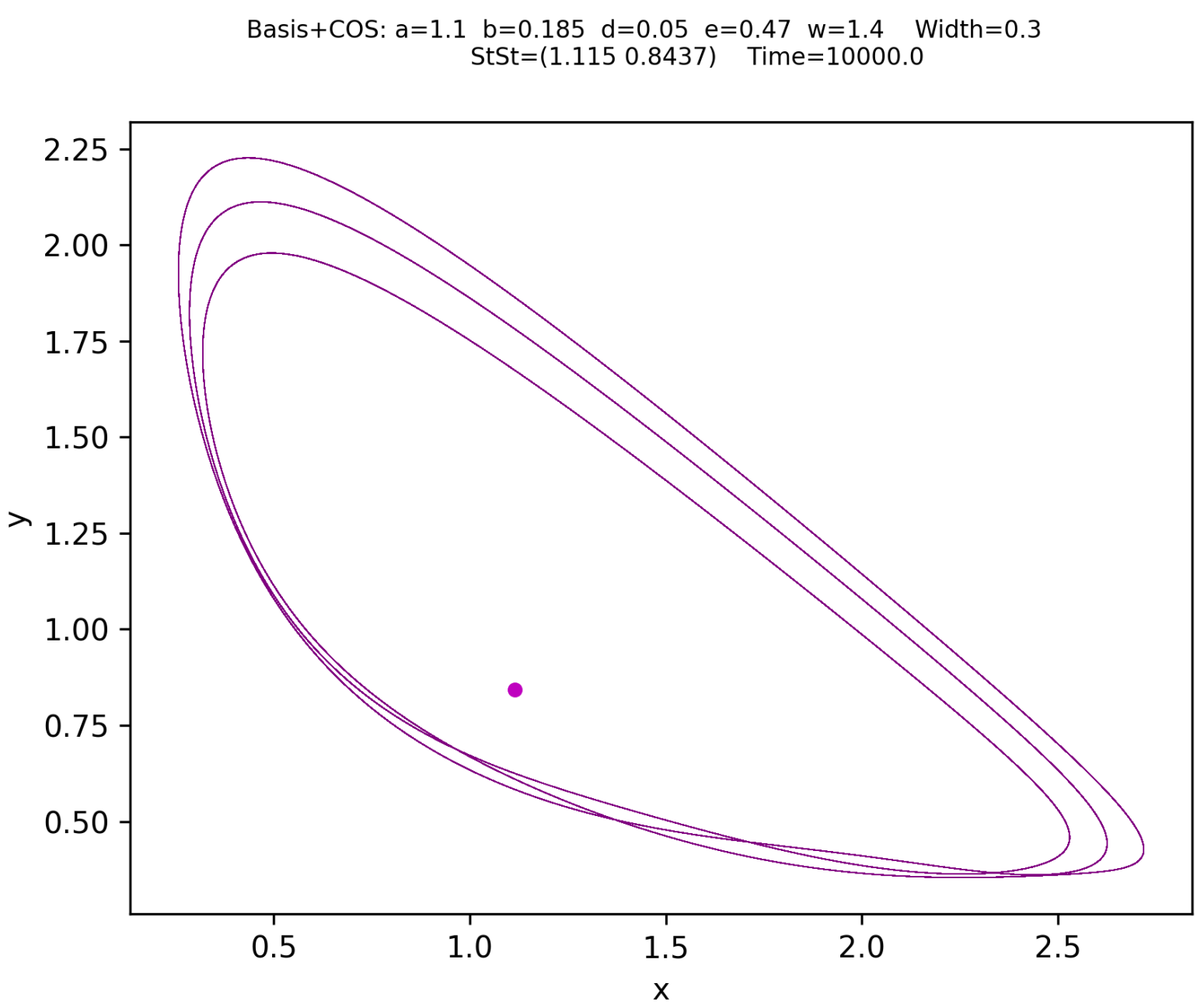

Basissystem Parameter: a=4.0 b=0.4106 d=0.12
Stationaere(r) Punkt(e)=(2.021 0.29) (1.835 0.367) (1.599 0.463)
Eigenwerte: (0.0979+0.2085j)+(0.0979-0.2085j)(-0.034+0j)+(0.8706+0j)(0.0536+0j)+(1.249+0j)
y
x
0
1
2
3
4
5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

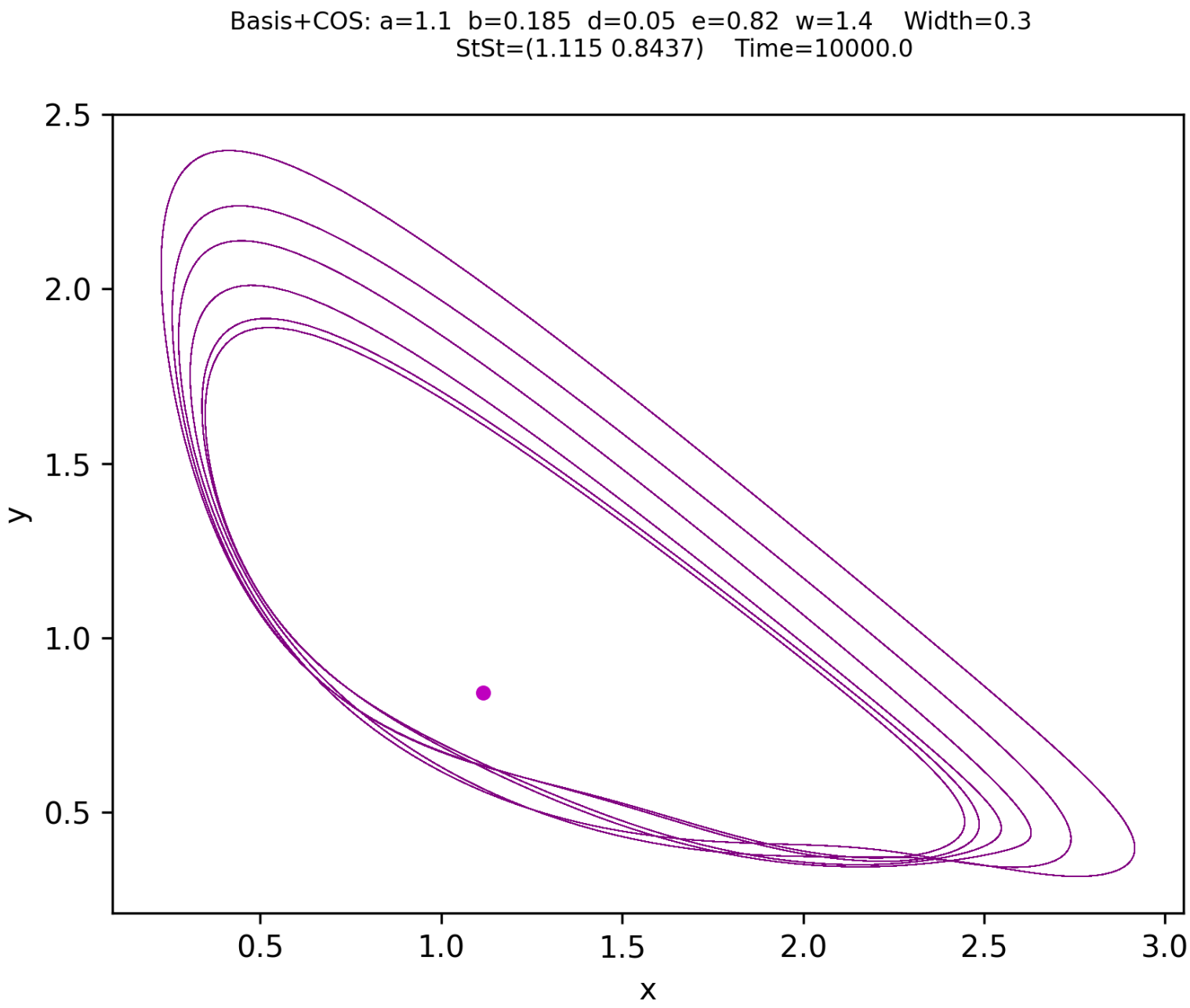

Basissystem Parameter: a=4.0 b=0.49 d=0.15
Stationaere(r) Punkt(e)=(1.633 0.35)
Eigenwerte: (-0.0205+0.4578j)+(-0.0205-0.4578j)
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
x

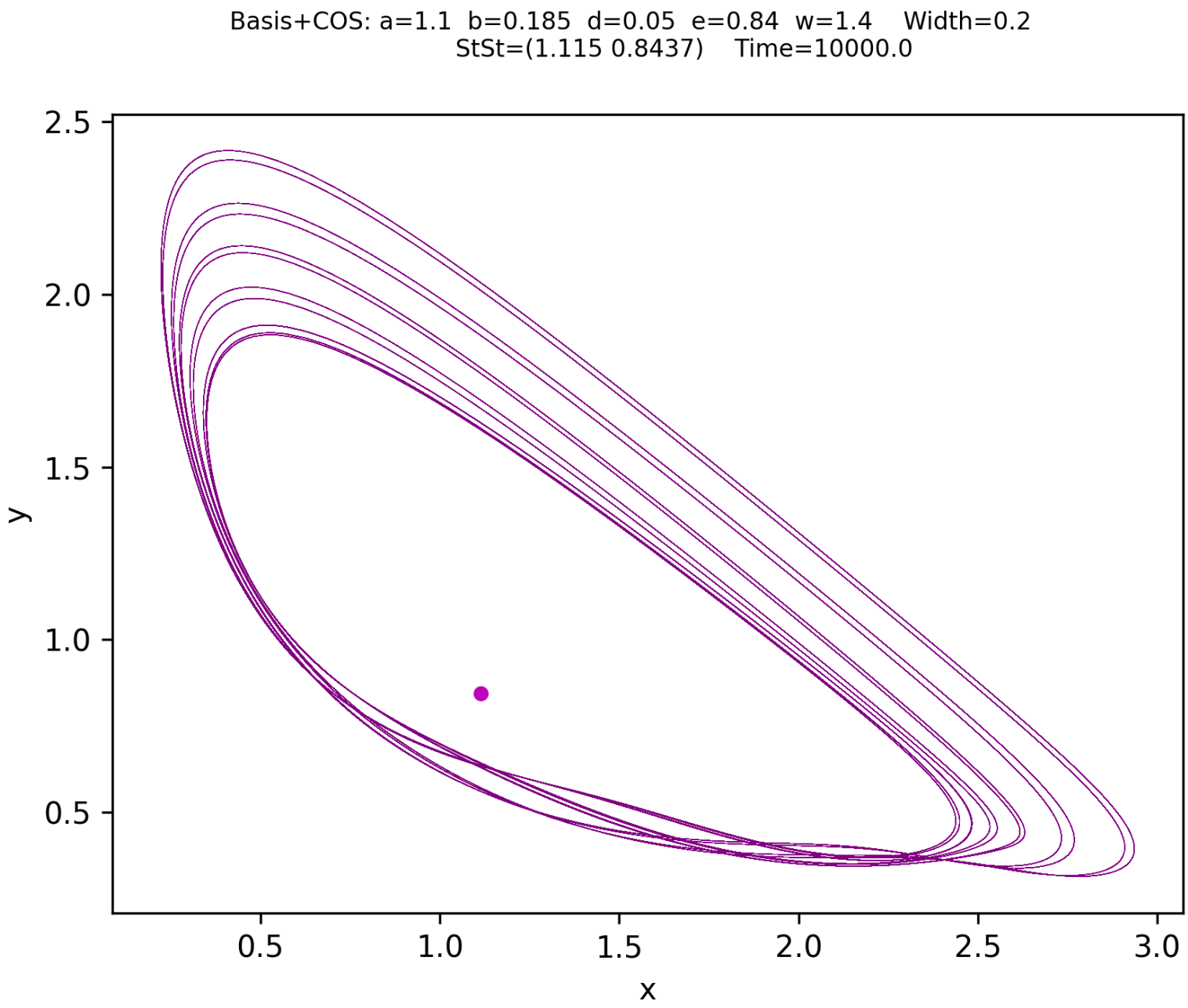
BSCOS2: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.0 w=1.4 StSt=(1.115, 0.8437) t1,t2=0.0 0.0 Time=60000.0
Starts=[0.3176, 1.4999], [0.9745, 0.6786] Ends=[1.0547, 0.6275], [2.1645, 0.3679]

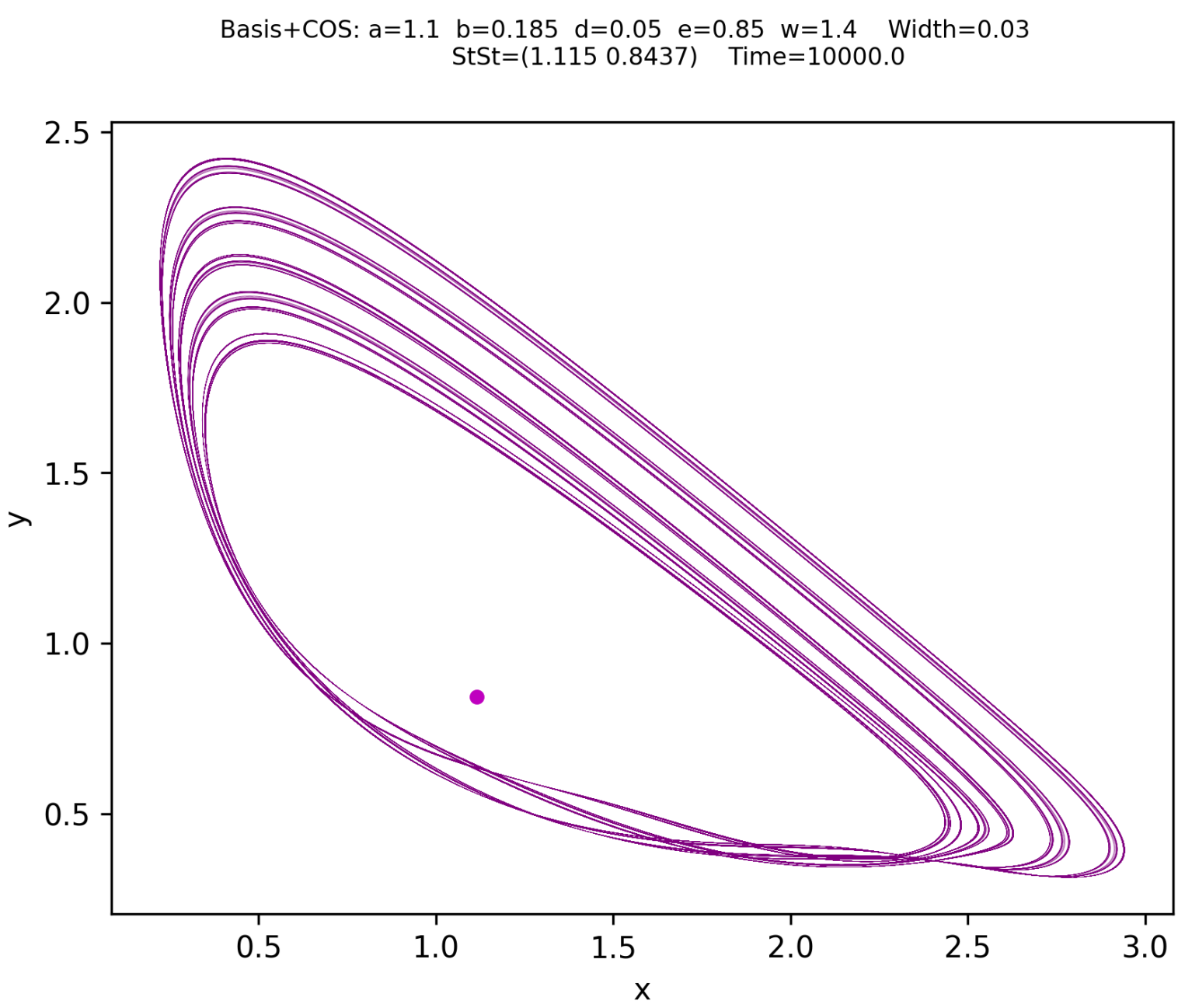


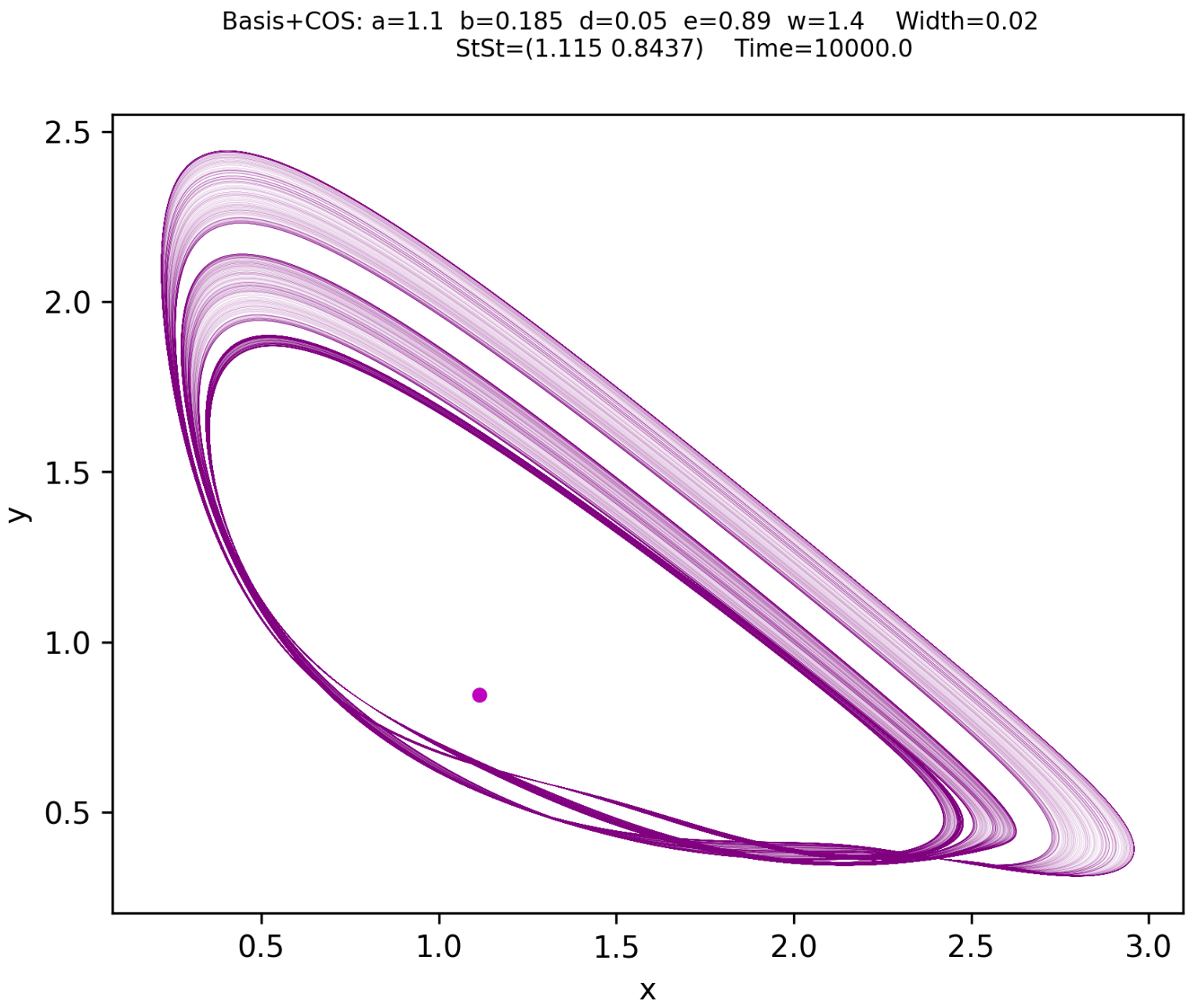

Basis+COS: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.4 w=1.4 Width=0.01
StSt=(1.115 0.8437) Time=8000.0
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x


Basis+COS: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.47 w=1.4 Width=0.3
StSt=(1.115 0.8437) Time=10000.0
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

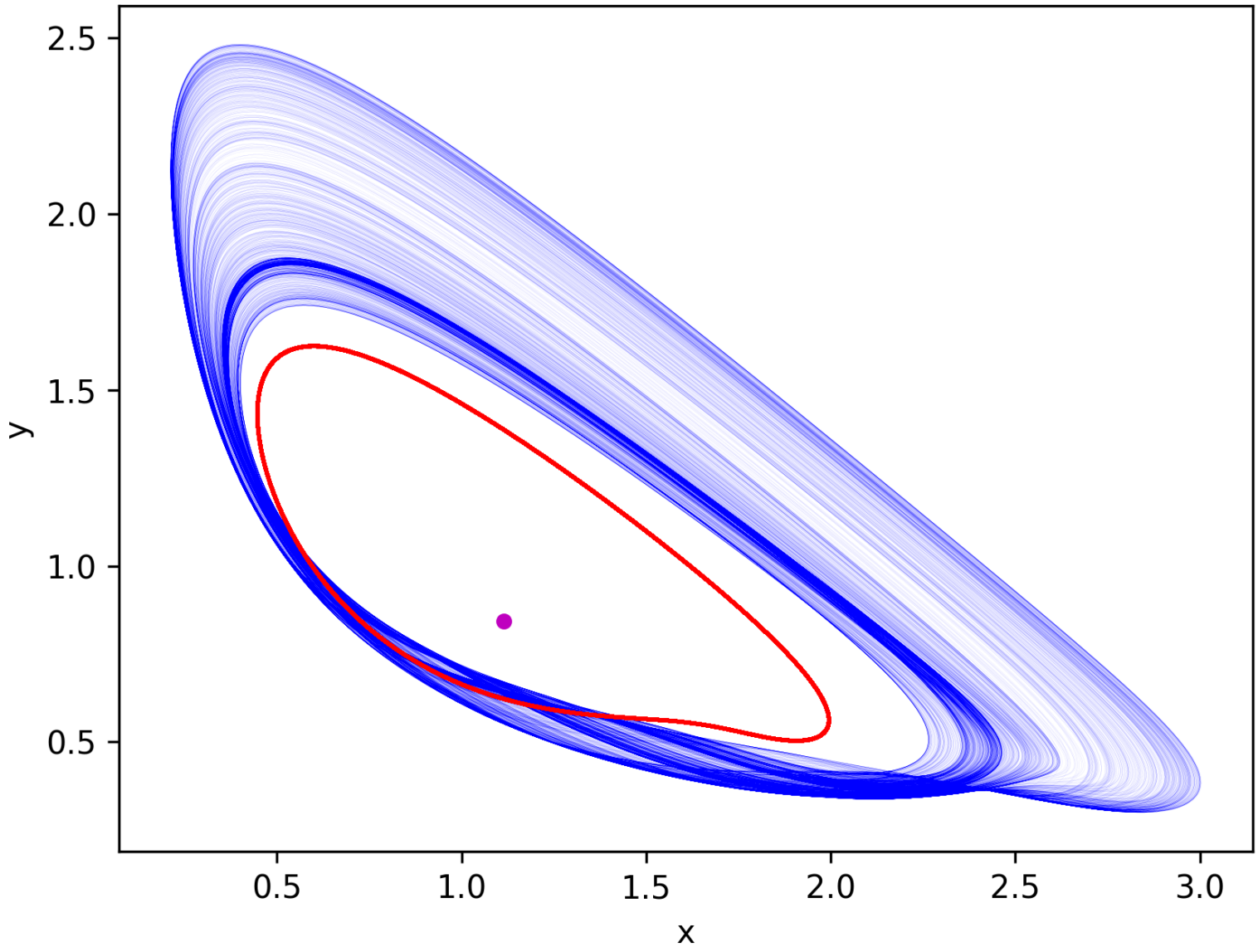

Basis+COS: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.82 w=1.4 Width=0.3
StSt=(1.115 0.8437) Time=10000.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x

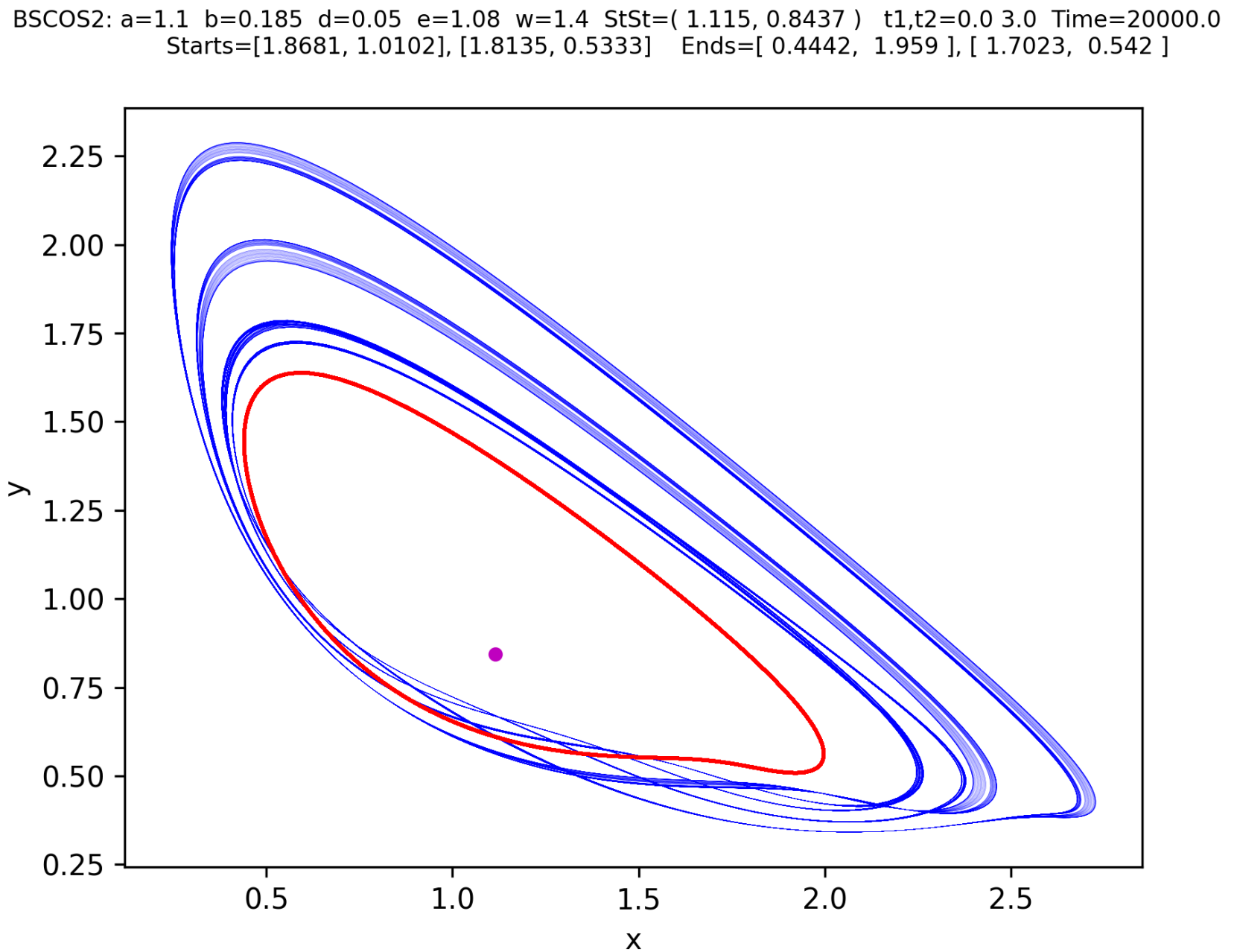

Basis+COS: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.84 w=1.4 Width=0.2
StSt=(1.115 0.8437) Time=10000.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x


Basis+COS: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.85 w=1.4   Width=0.03
StSt=(1.115 0.8437)   Time=10000.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x

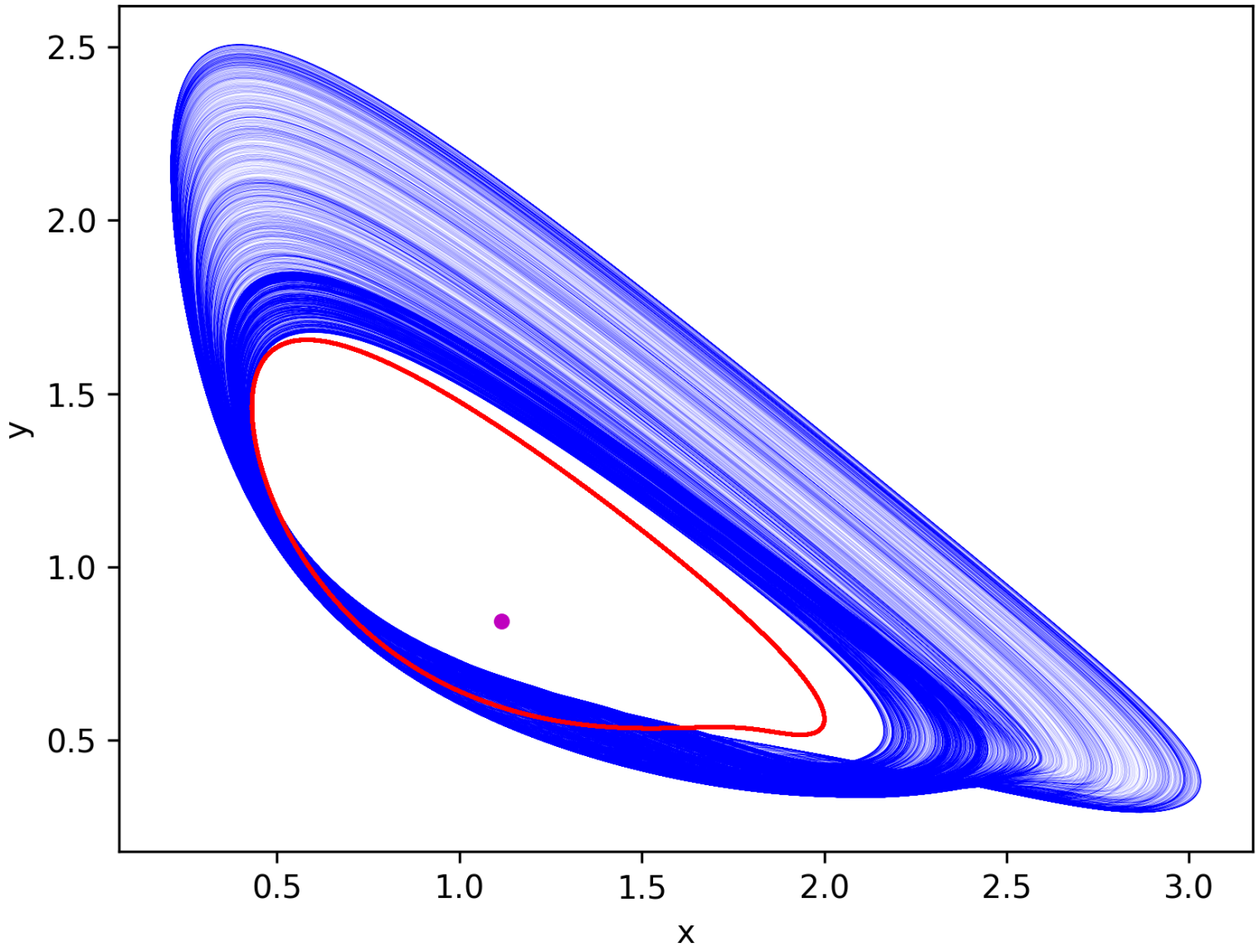

Basis+COS: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=0.89 w=1.4   Width=0.02
StSt=(1.115 0.8437)   Time=10000.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x

BSCOS2: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=1.04 w=1.4 StSt=(1.115, 0.8437) t1,t2=0.0 5.0 Time=20000.0
Starts=[1.8135, 0.5333], [1.5062, 1.0959] Ends=[1.854, 1.0363], [1.6496, 0.5499]

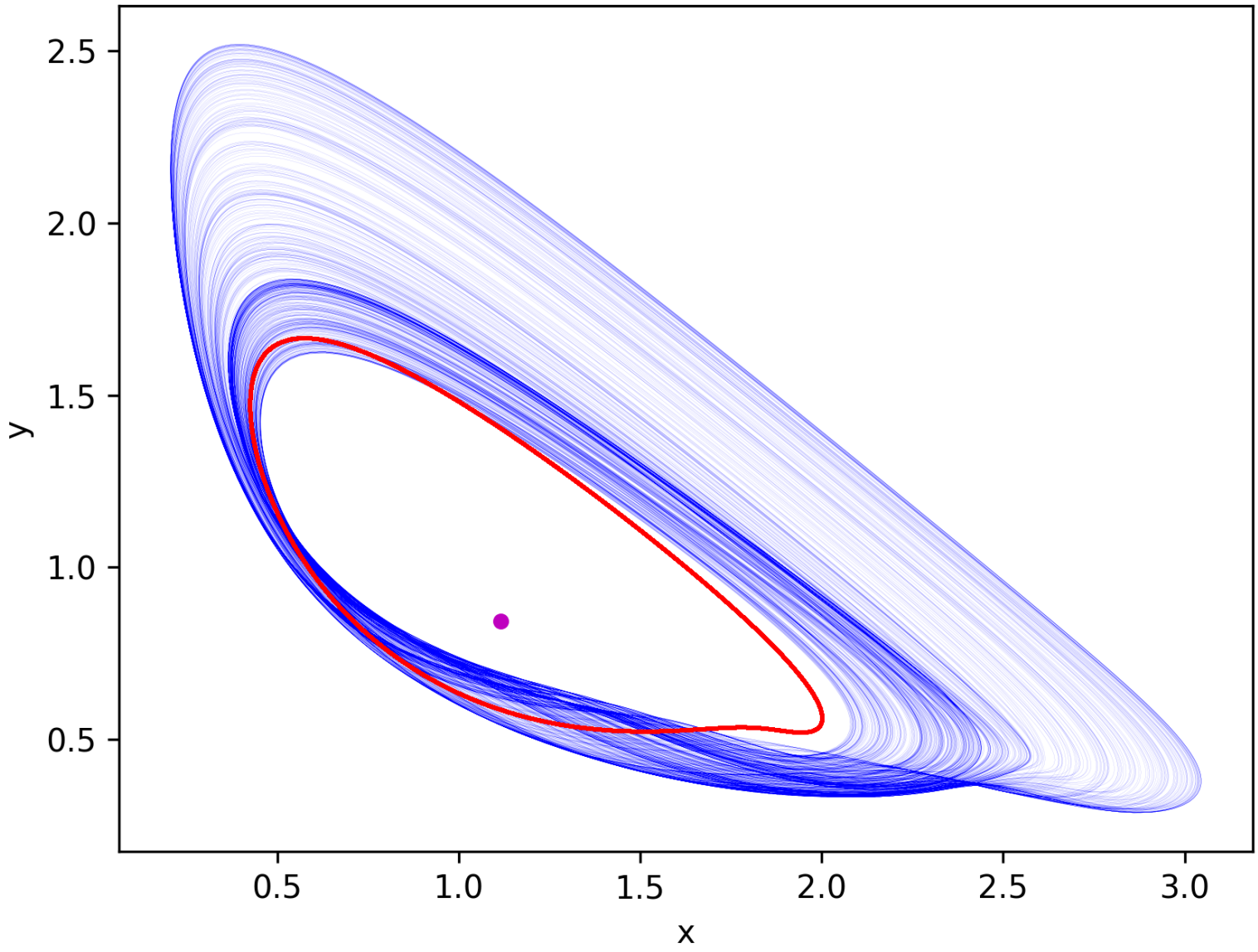


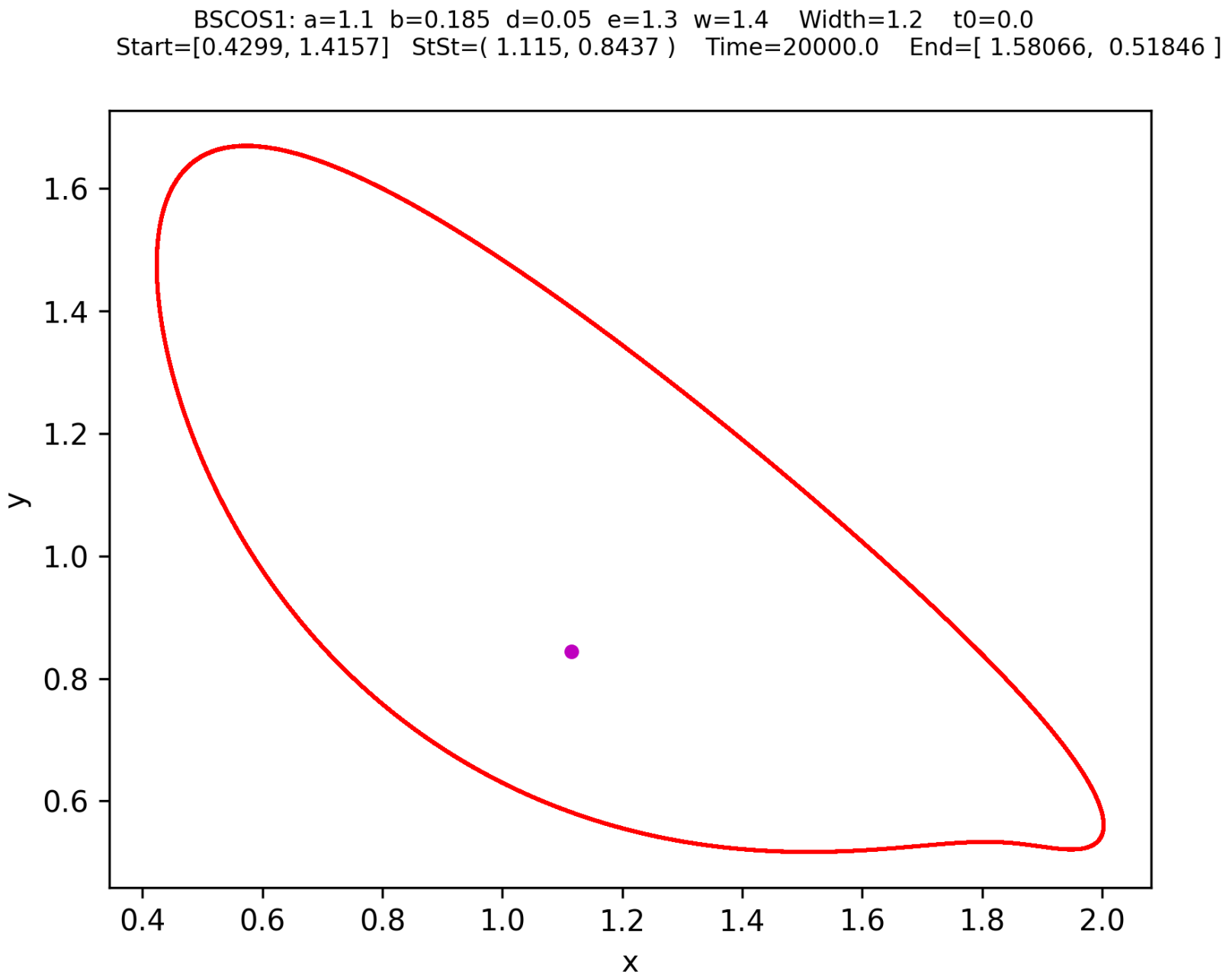

BSCOS2: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=1.08 w=1.4 StSt=(1.115, 0.8437) t1,t2=0.0 3.0 Time=20000.0
Starts=[1.8681, 1.0102], [1.8135, 0.5333] Ends=[0.4442, 1.959], [1.7023, 0.542]
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

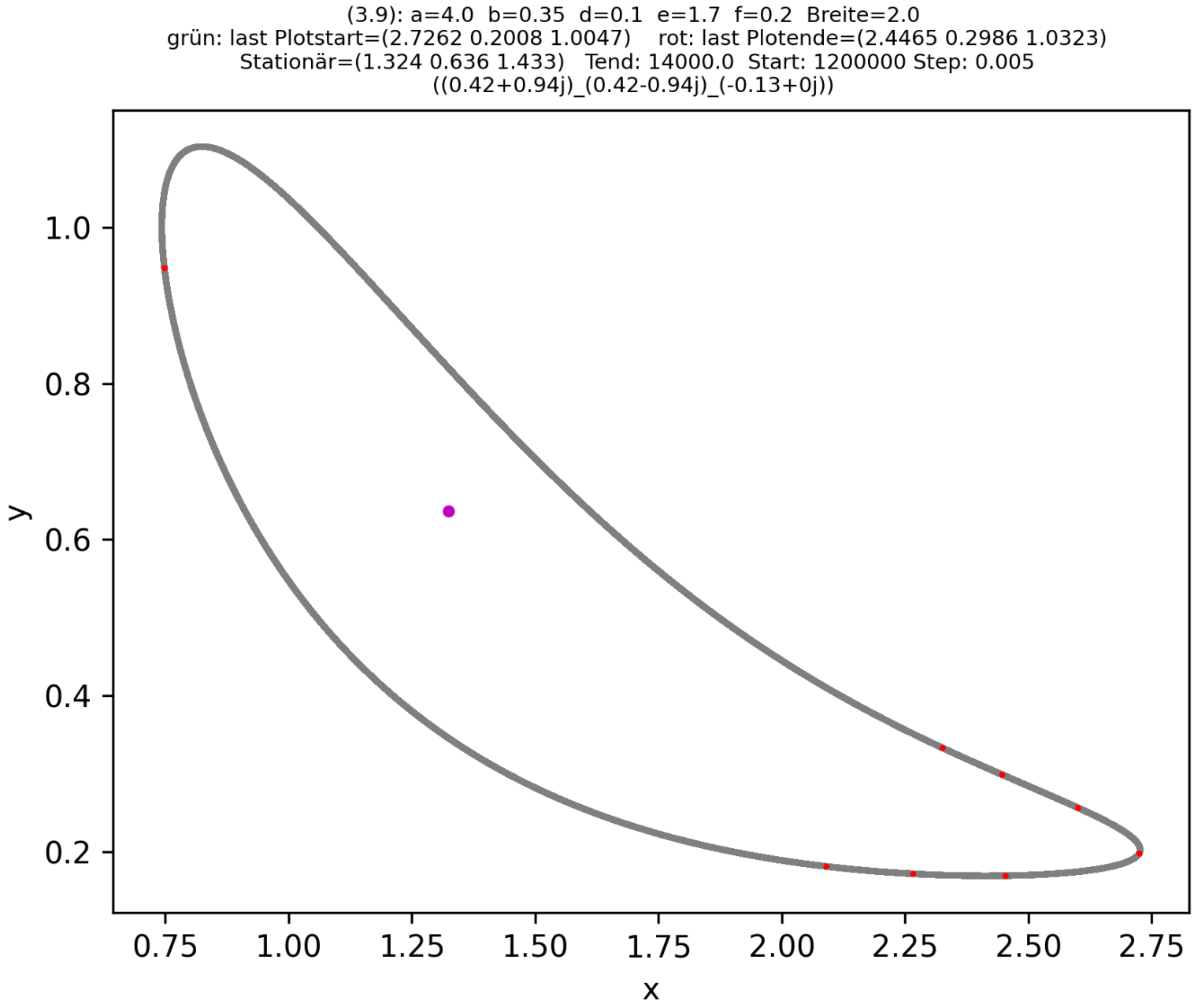
BSCOS2: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=1.18 w=1.4 StSt=(1.115, 0.8437) t1,t2=0.0 0.0 Time=80000.0
Starts=[0.9745, 0.6786], [1.2745, 1.2834] Ends=[1.3058, 0.6076], [1.7768, 0.5349]

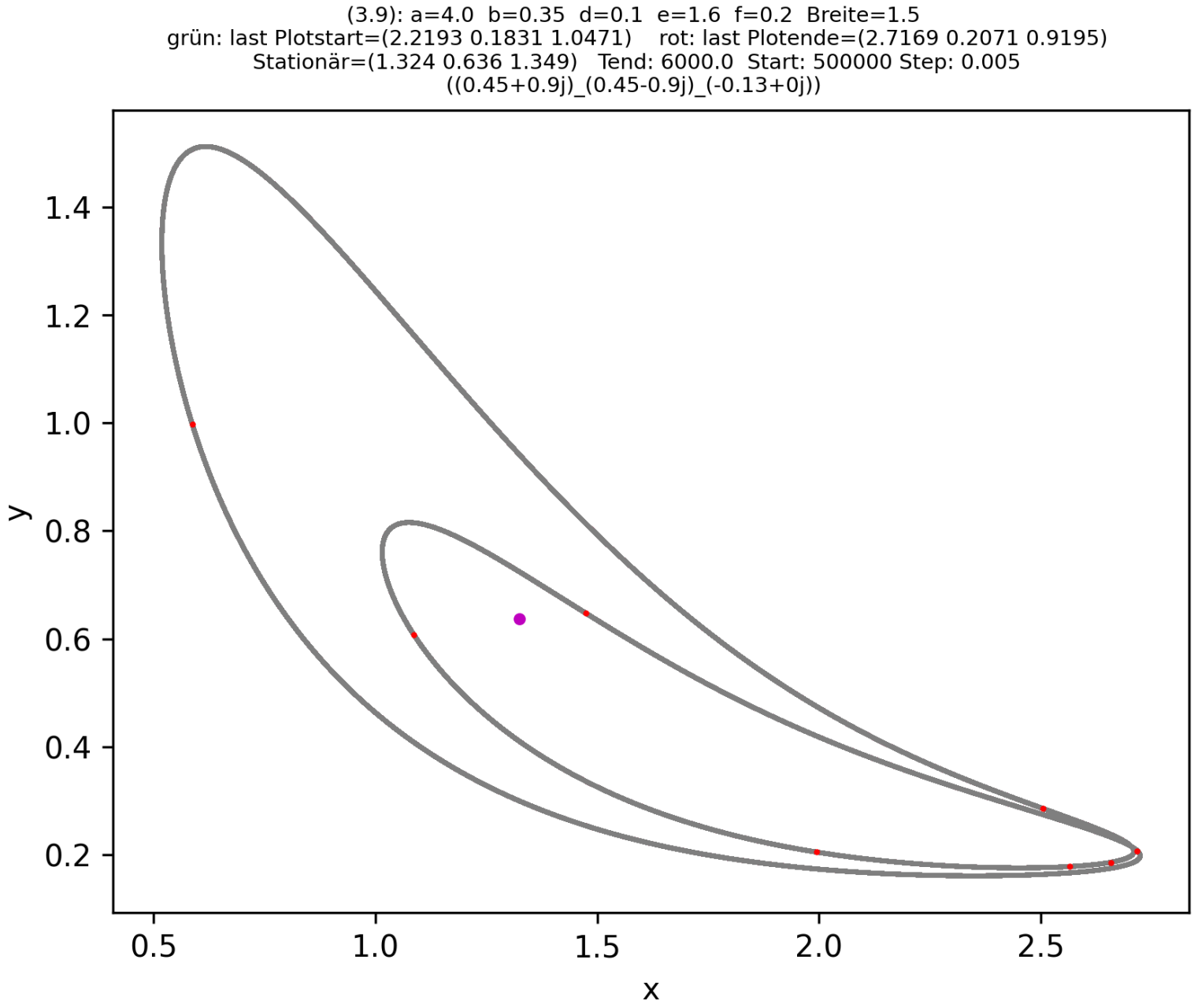


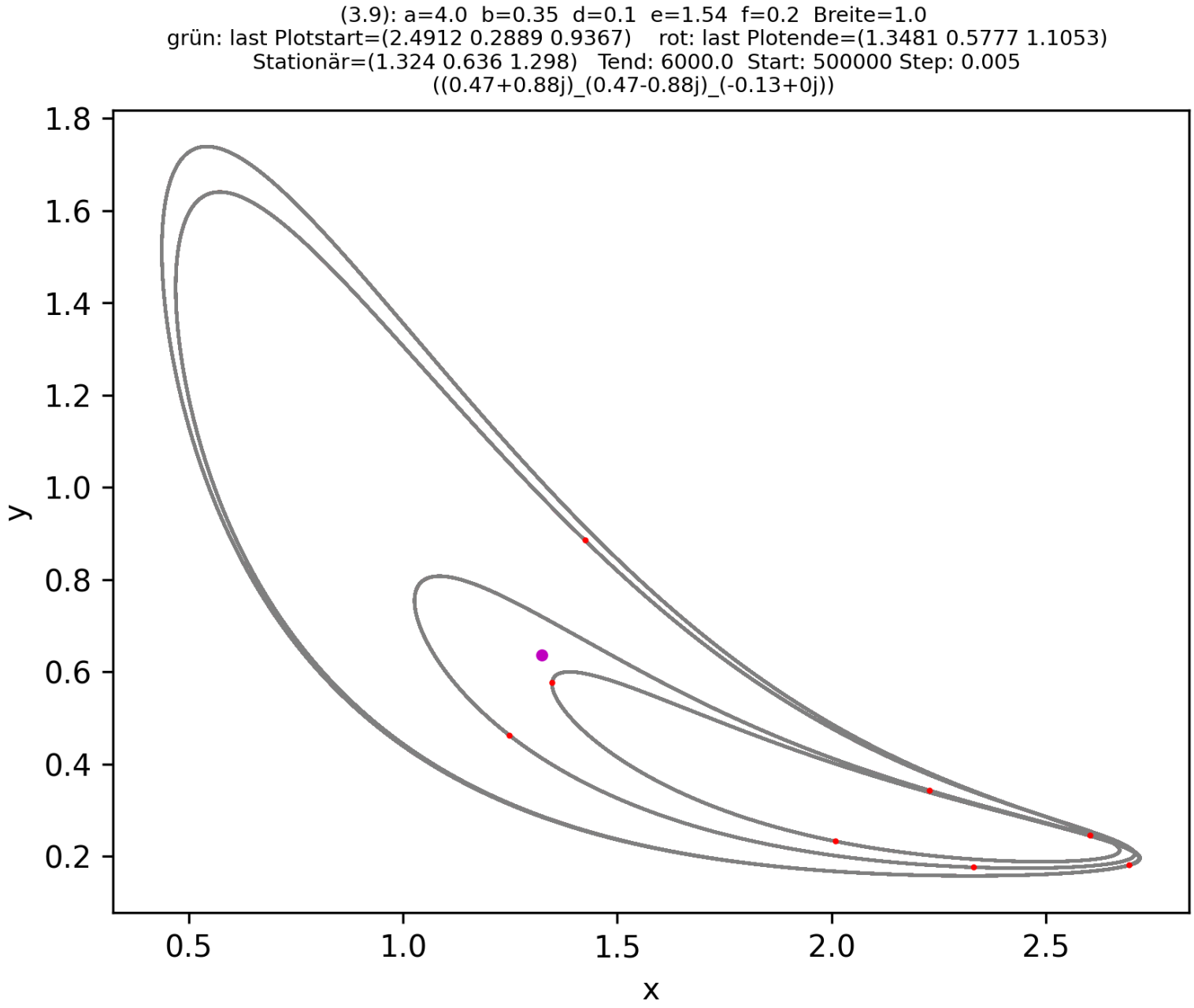
BSCOS2: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=1.26 w=1.4 StSt=(1.115, 0.8437) t1,t2=0.0 0.0 Time=20000.0
Starts=[2.2599, 0.6365], [0.9413, 1.5356] Ends=[1.0889, 0.6673], [0.4299, 1.407]



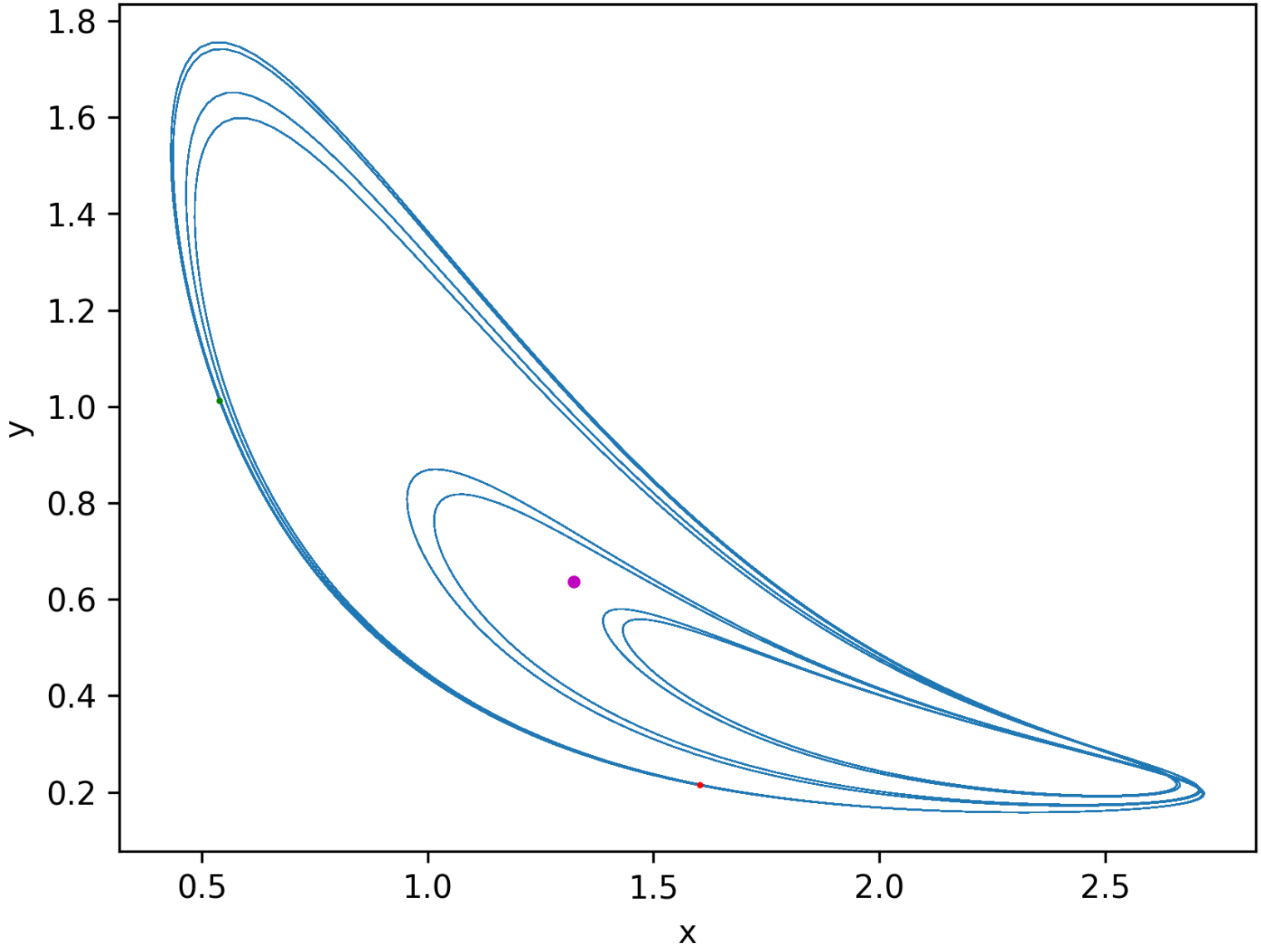

BSCOS1: a=1.1 b=0.185 d=0.05 e=1.3 w=1.4 Width=1.2 t0=0.0
Start=[0.4299, 1.4157] StSt=(1.115, 0.8437) Time=20000.0 End=[1.58066, 0.51846]
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
y
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
x

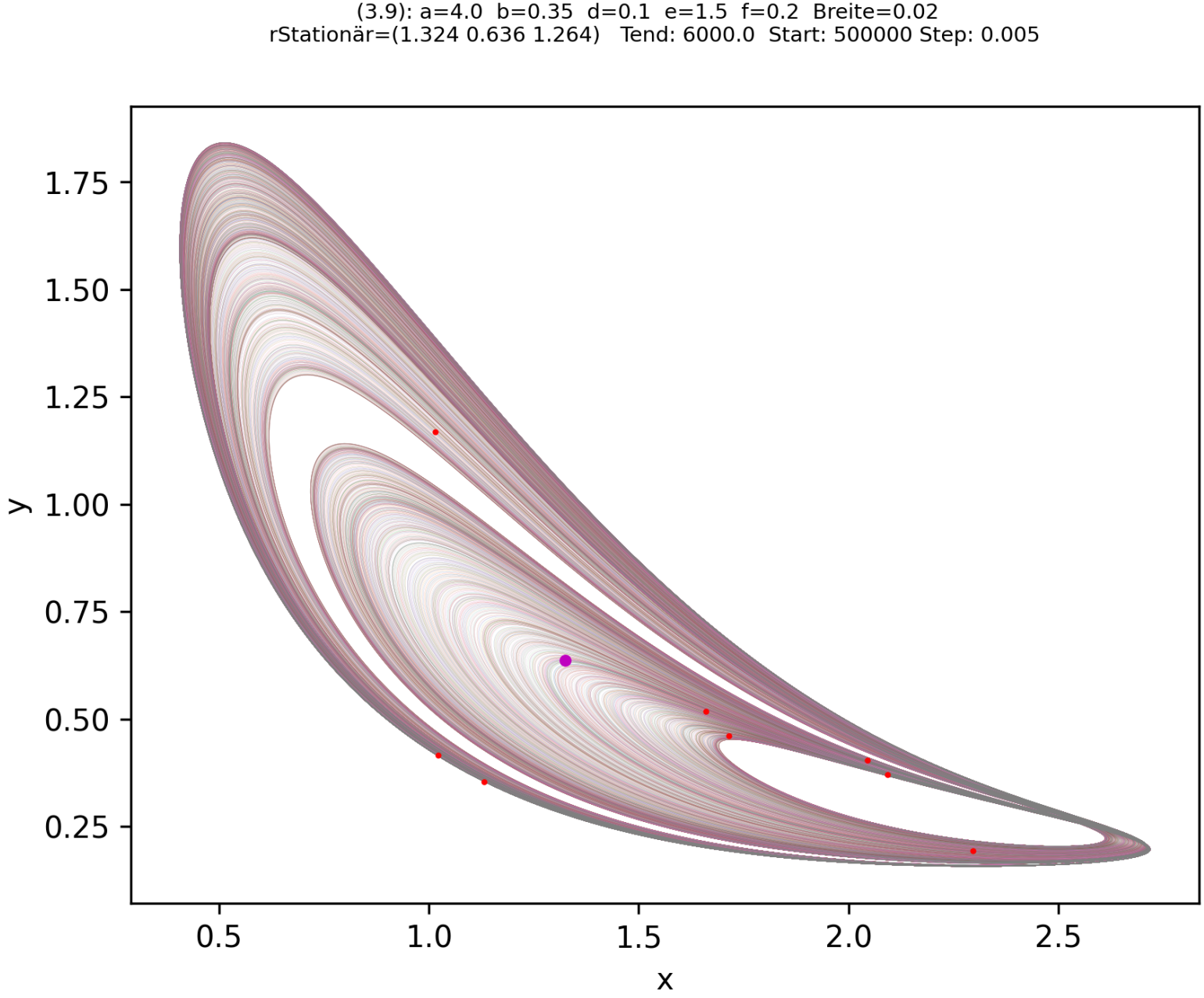

(3.9): a=4.0 b=0.35 d=0.1 e=1.7 f=0.2 Breite=2.0
grün: last Plotstart=(2.7262 0.2008 1.0047) rot: last Plotende=(2.4465 0.2986 1.0323)
Stationär=(1.324 0.636 1.433) Tend: 14000.0 Start: 1200000 Step: 0.005
((0.42+0.94j)_(0.42-0.94j)_(-0.13+0j))
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
2.25
2.50
2.75
x

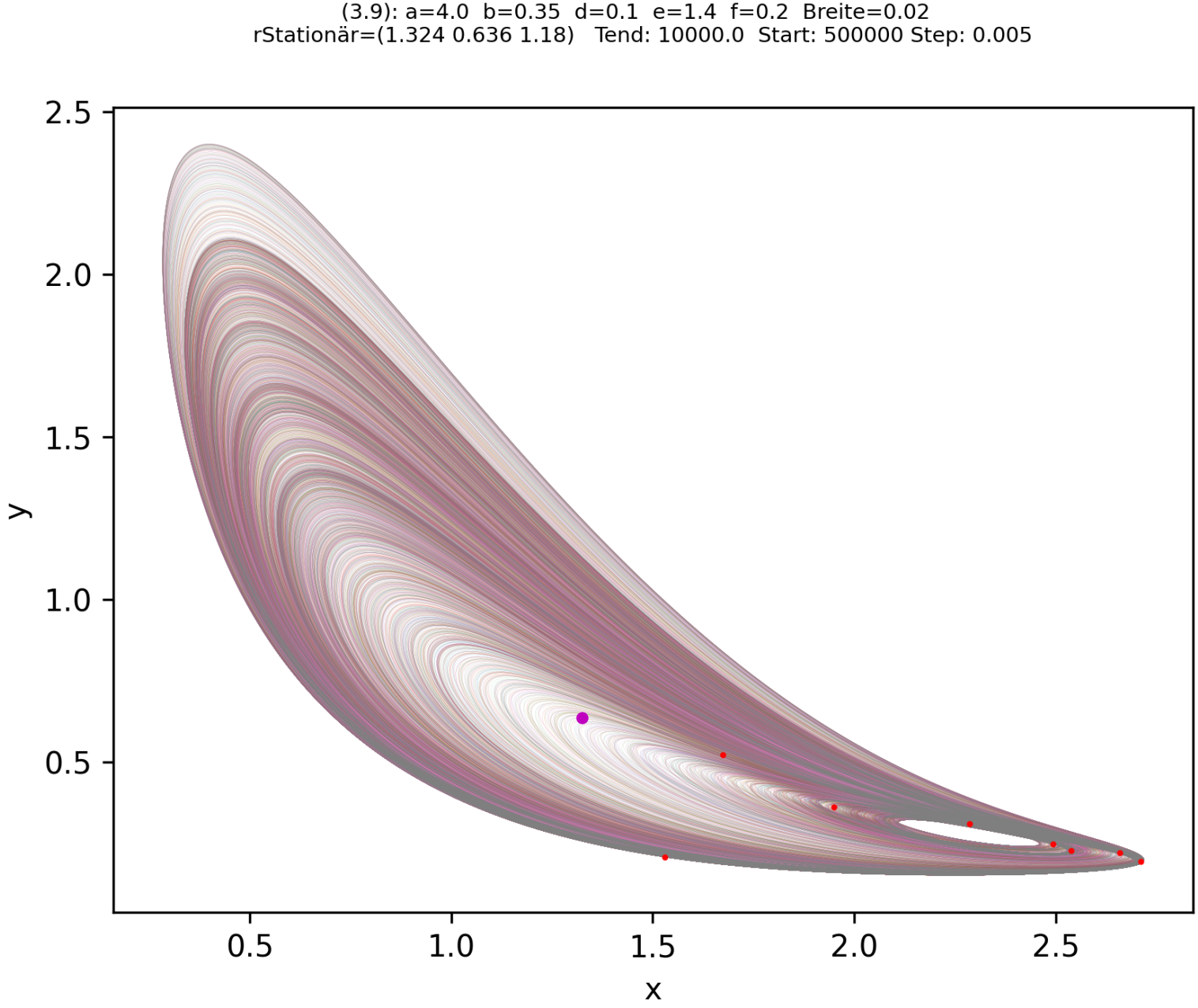

(3.9): a=4.0 b=0.35 d=0.1 e=1.6 f=0.2 Breite=1.5
grün: last Plotstart=(2.2193 0.1831 1.0471) rot: last Plotende=(2.7169 0.2071 0.9195)
Stationär=(1.324 0.636 1.349) Tend: 6000.0 Start: 500000 Step: 0.005
((0.45+0.9j)_(0.45-0.9j)_(-0.13+0j))
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

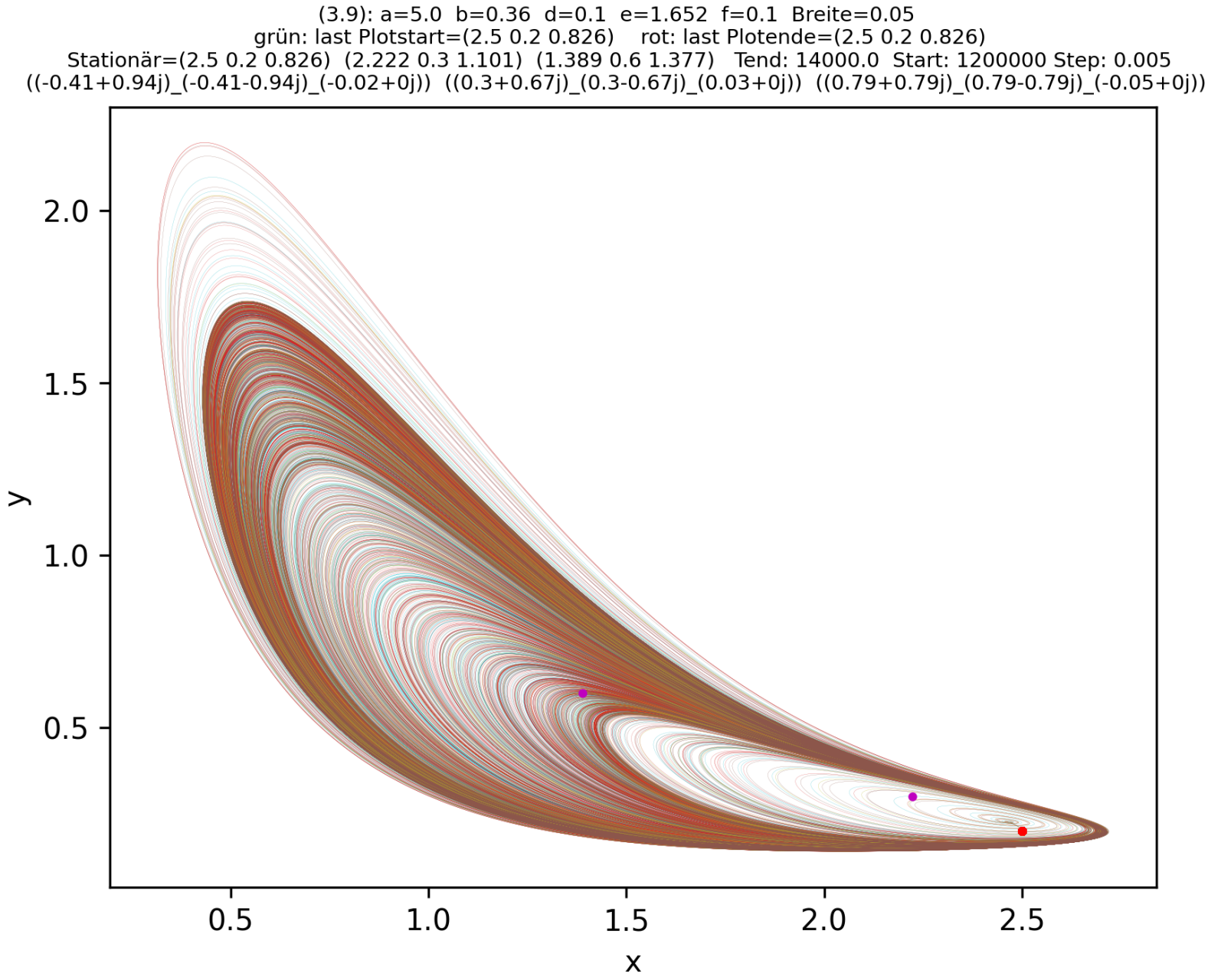

(3.9): a=4.0 b=0.35 d=0.1 e=1.54 f=0.2 Breite=1.0
grün: last Plotstart=(2.4912 0.2889 0.9367) rot: last Plotende=(1.3481 0.5777 1.1053)
Stationär=(1.324 0.636 1.298) Tend: 6000.0 Start: 500000 Step: 0.005
((0.47+0.88j)_(0.47-0.88j)_(-0.13+0j))
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

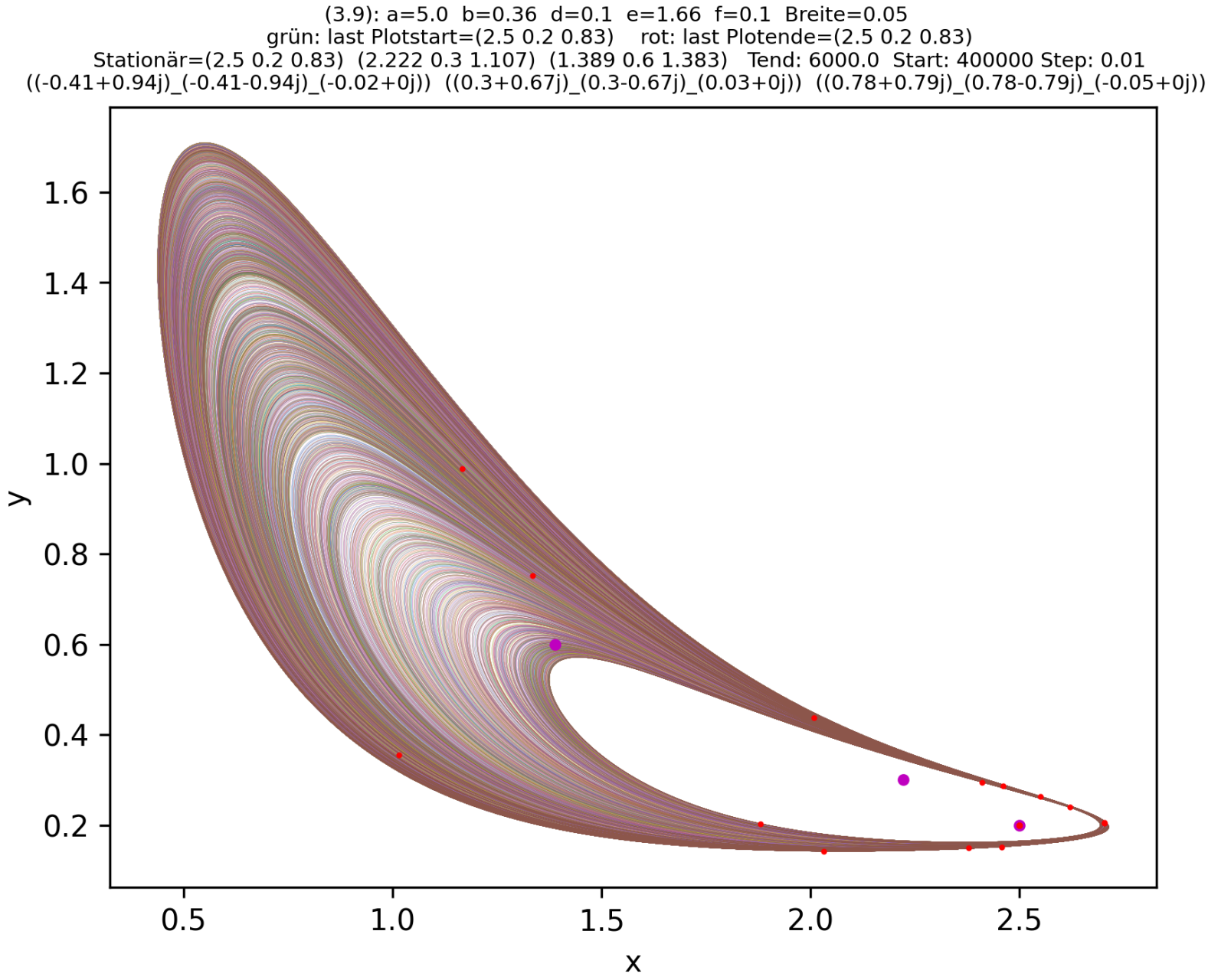
System (3.9) Parameter: a=4.0 b=0.35 d=0.1 e=1.53 f=0.2 Datum:09-15_20-00
grün: Plotstart=(0.53917 1.01297 1.15287) rot: Plotende=(1.60297 0.2144 1.03807)
magenta: Stationäre(r) Punkt(e)=(1.324 0.636 1.29)
Eigen: ((0.473+0.881j)_(0.473-0.881j)_(-0.132+0j))

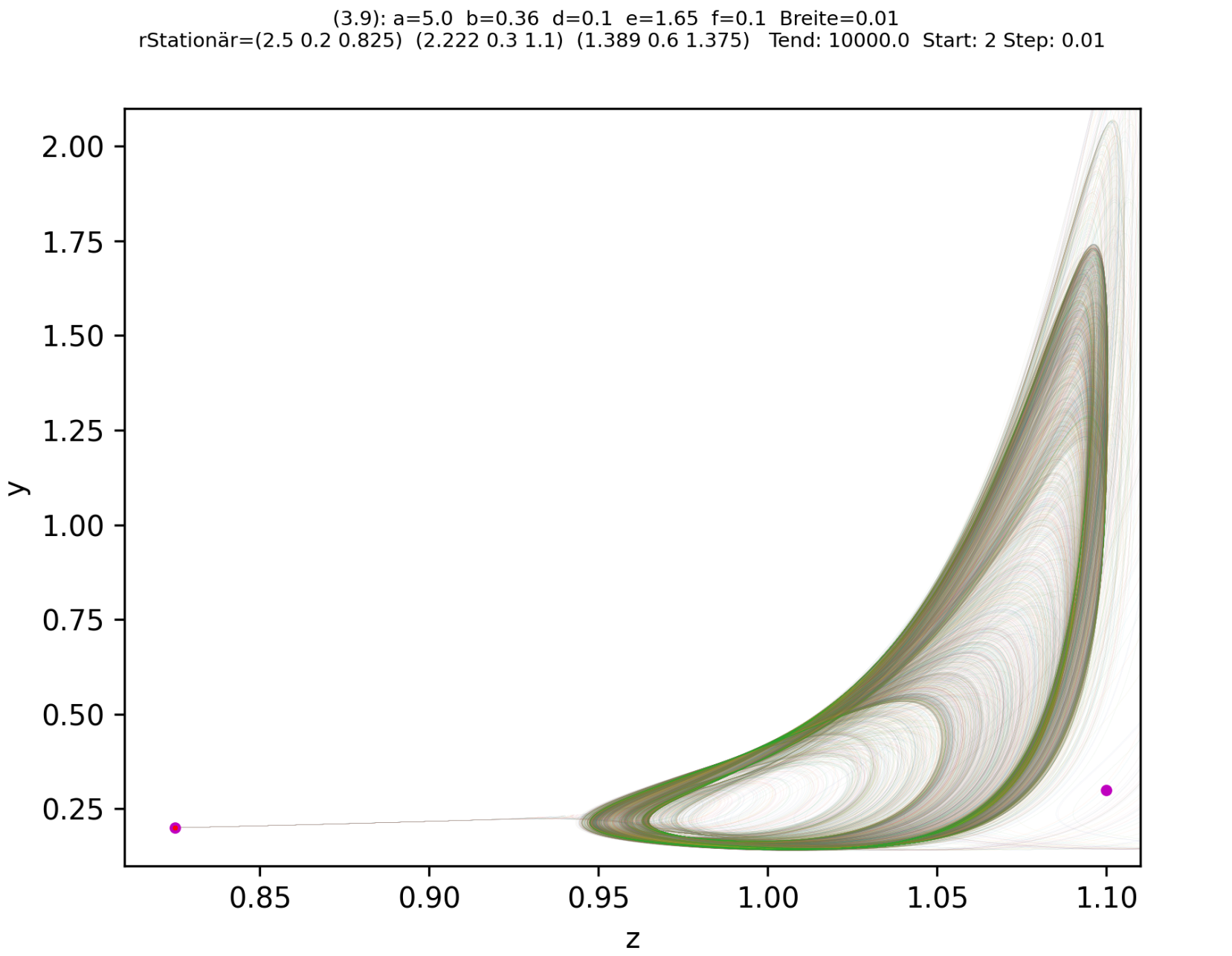


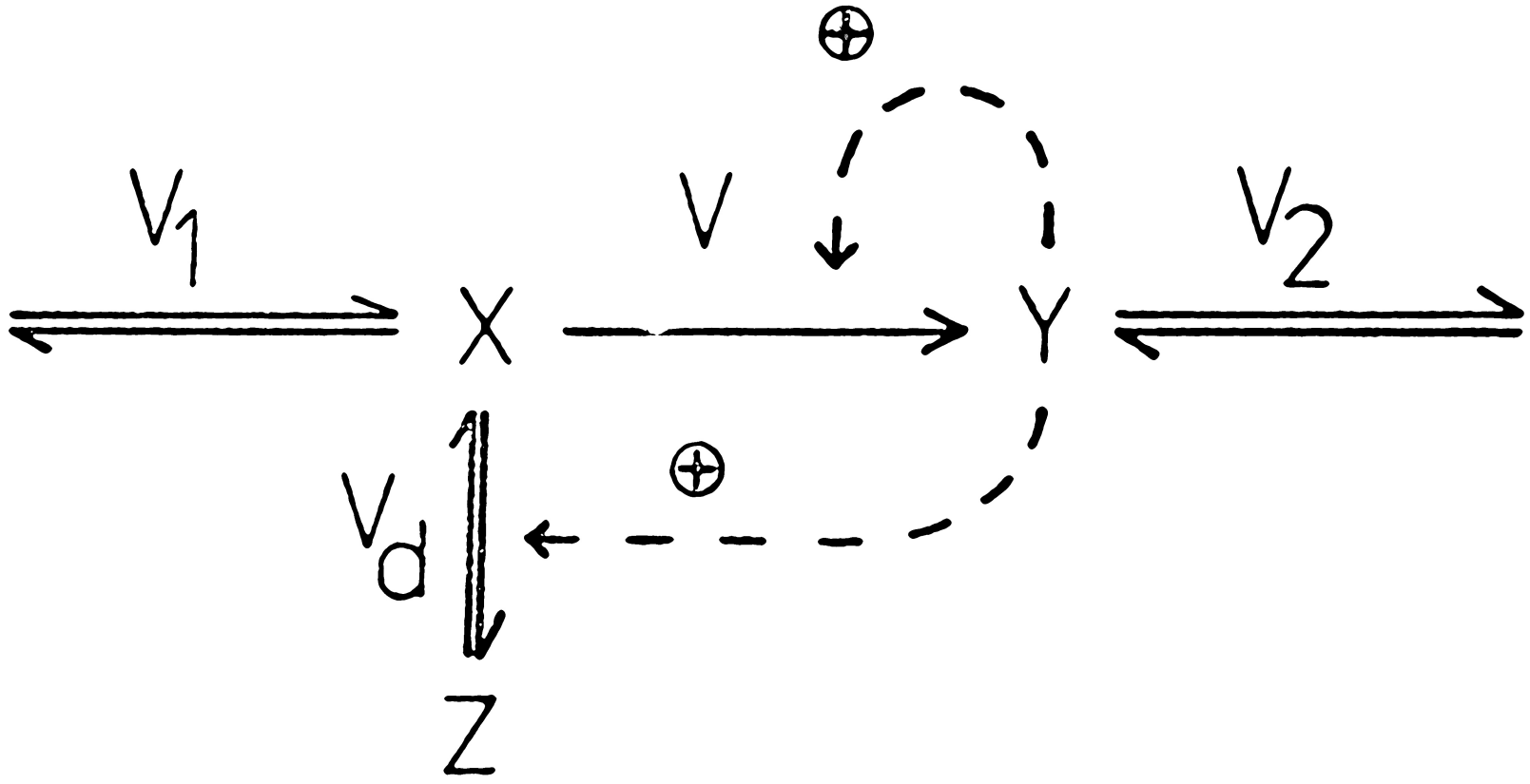

(3.9): a=4.0 b=0.35 d=0.1 e=1.5 f=0.2 Breite=0.02
rStationär=(1.324 0.636 1.264) Tend: 6000.0 Start: 500000 Step: 0.005
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x


(3.9): a=4.0 b=0.35 d=0.1 e=1.4 f=0.2 Breite=0.02
rStationär=(1.324 0.636 1.18) Tend: 10000.0 Start: 500000 Step: 0.005
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

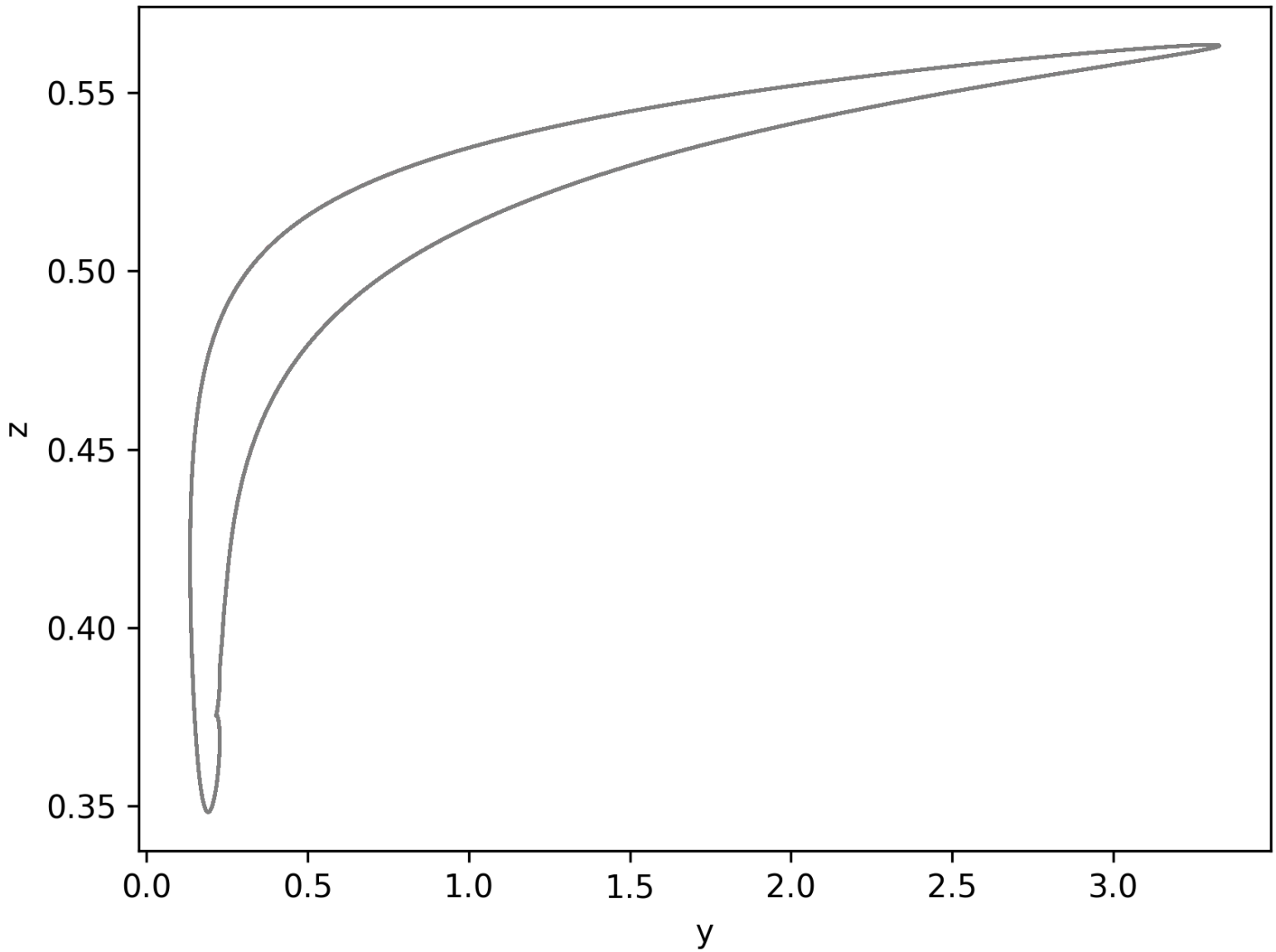

(3.9): a=5.0 b=0.36 d=0.1 e=1.652 f=0.1 Breite=0.05
grün: last Plotstart=(2.5 0.2 0.826) rot: last Plotende=(2.5 0.2 0.826)
Stationär=(2.5 0.2 0.826) (2.222 0.3 1.101) (1.389 0.6 1.377) Tend: 14000.0 Start: 1200000 Step: 0.005
((-0.41+0.94j)_(-0.41-0.94j)_(-0.02+0j)) ((0.3+0.67j)_(0.3-0.67j)_(0.03+0j)) ((0.79+0.79j)_(0.79-0.79j)_(-0.05+0j))
2.0
1.5
1.0
0.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

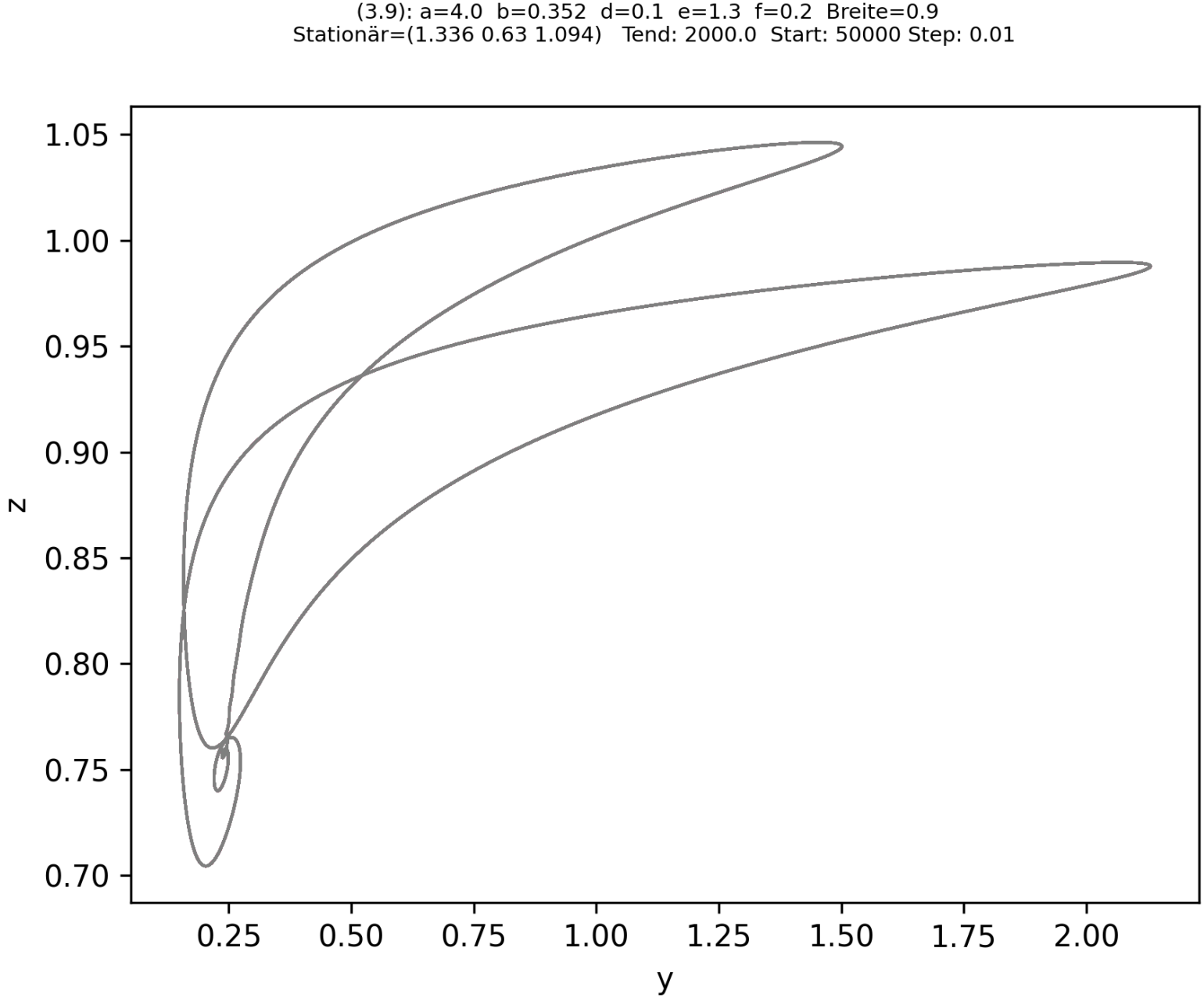

(3.9): a=5.0 b=0.36 d=0.1 e=1.66 f=0.1 Breite=0.05
grün: last Plotstart=(2.5 0.2 0.83) rot: last Plotende=(2.5 0.2 0.83)
Stationär=(2.5 0.2 0.83) (2.222 0.3 1.107) (1.389 0.6 1.383) Tend: 6000.0 Start: 400000 Step: 0.01
((-0.41+0.94j)_(-0.41-0.94j)_(-0.02+0j)) ((0.3+0.67j)_(0.3-0.67j)_(0.03+0j)) ((0.78+0.79j)_(0.78-0.79j)_(-0.05+0j))
y
x
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

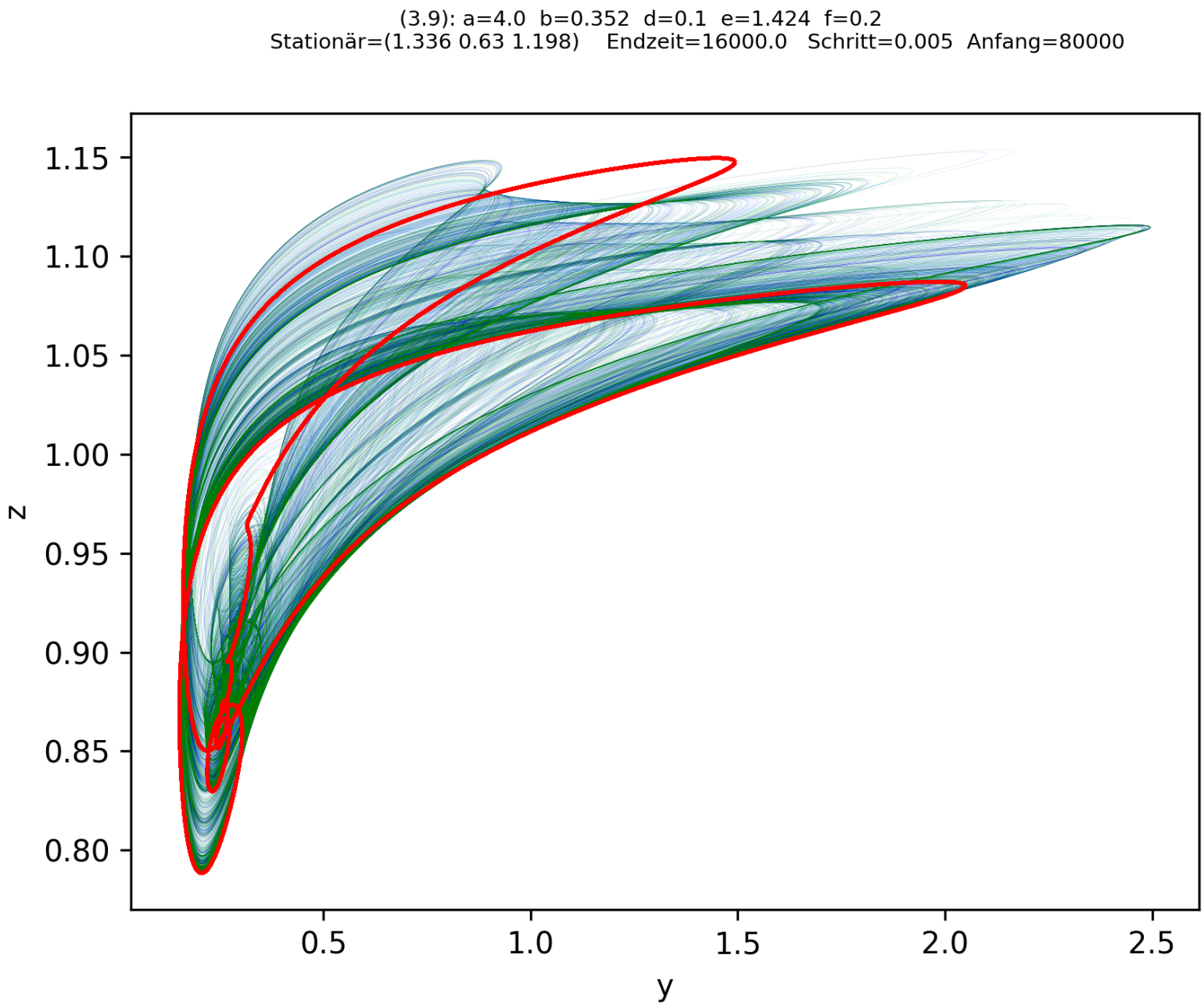

(3.9): a=5.0 b=0.36 d=0.1 e=1.65 f=0.1 Breite=0.01
rStationär=(2.5 0.2 0.825) (2.222 0.3 1.1) (1.389 0.6 1.375) Tend: 10000.0 Start: 2 Step: 0.01
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
z

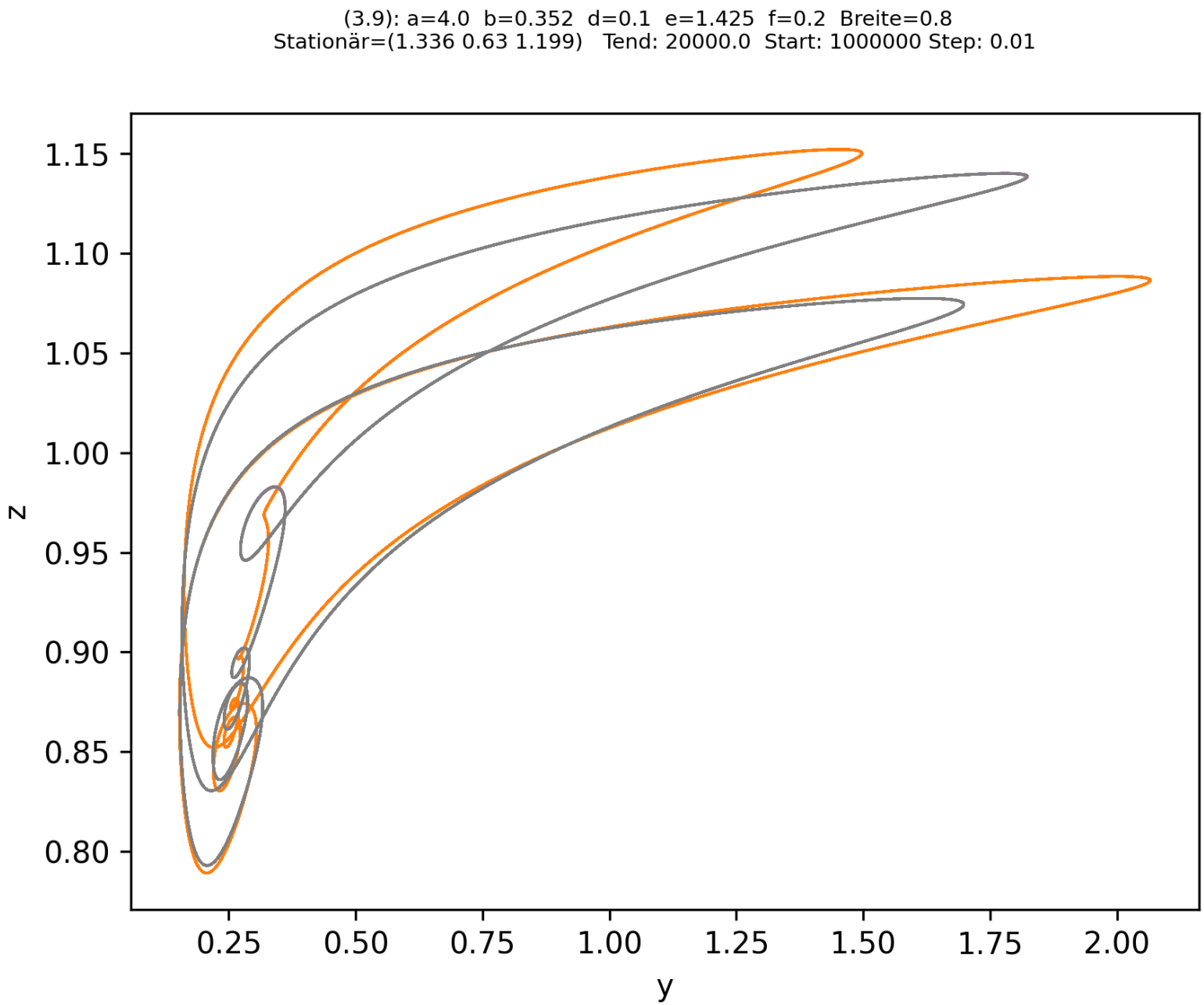

V1
V
V2
X
Y
Vd
Z

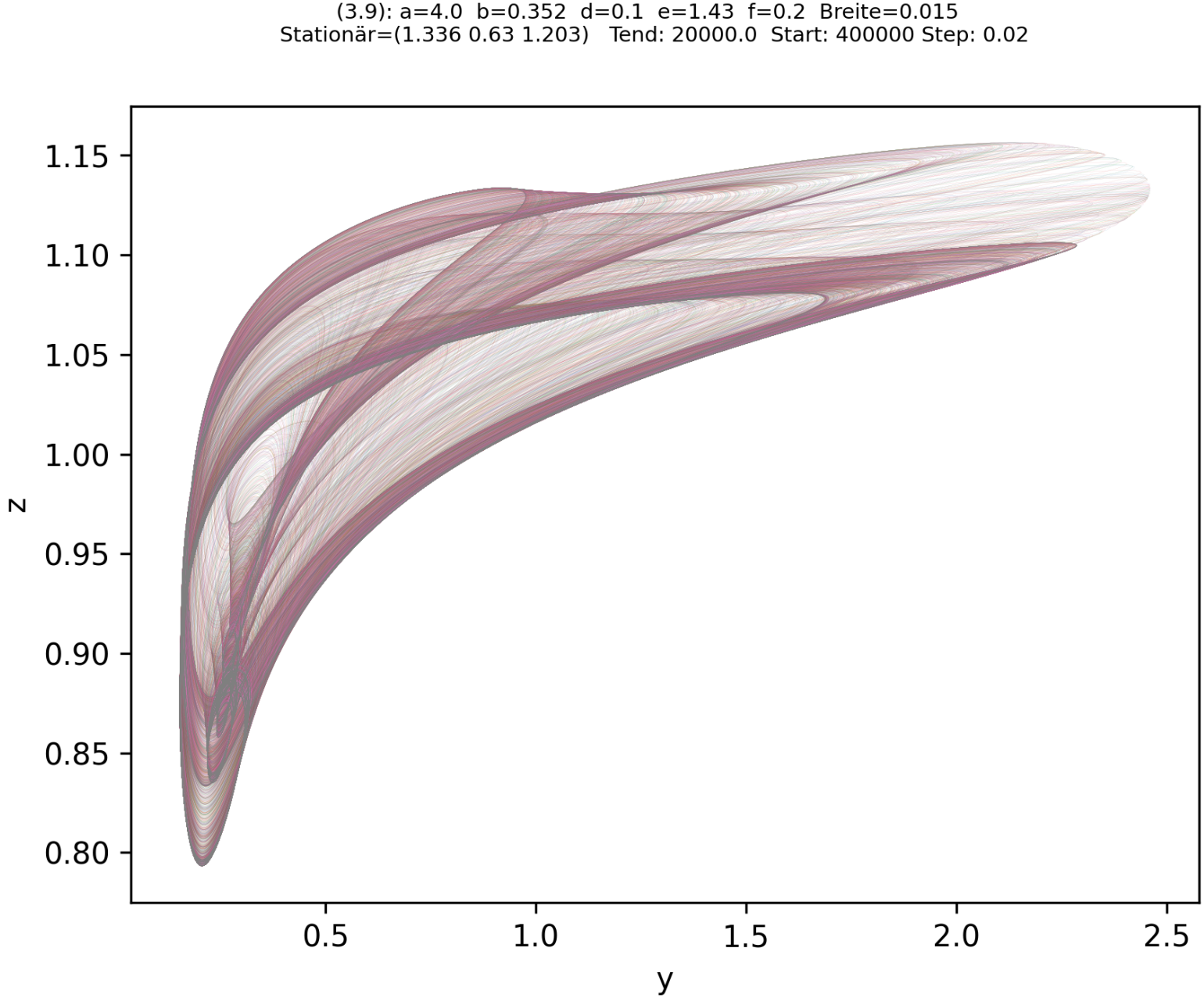
(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=0.7 f=0.2 Breite=1.0
Stationär=(1.336 0.63 0.589)   Tend: 8000.0 Start: 80000 Step: 0.01

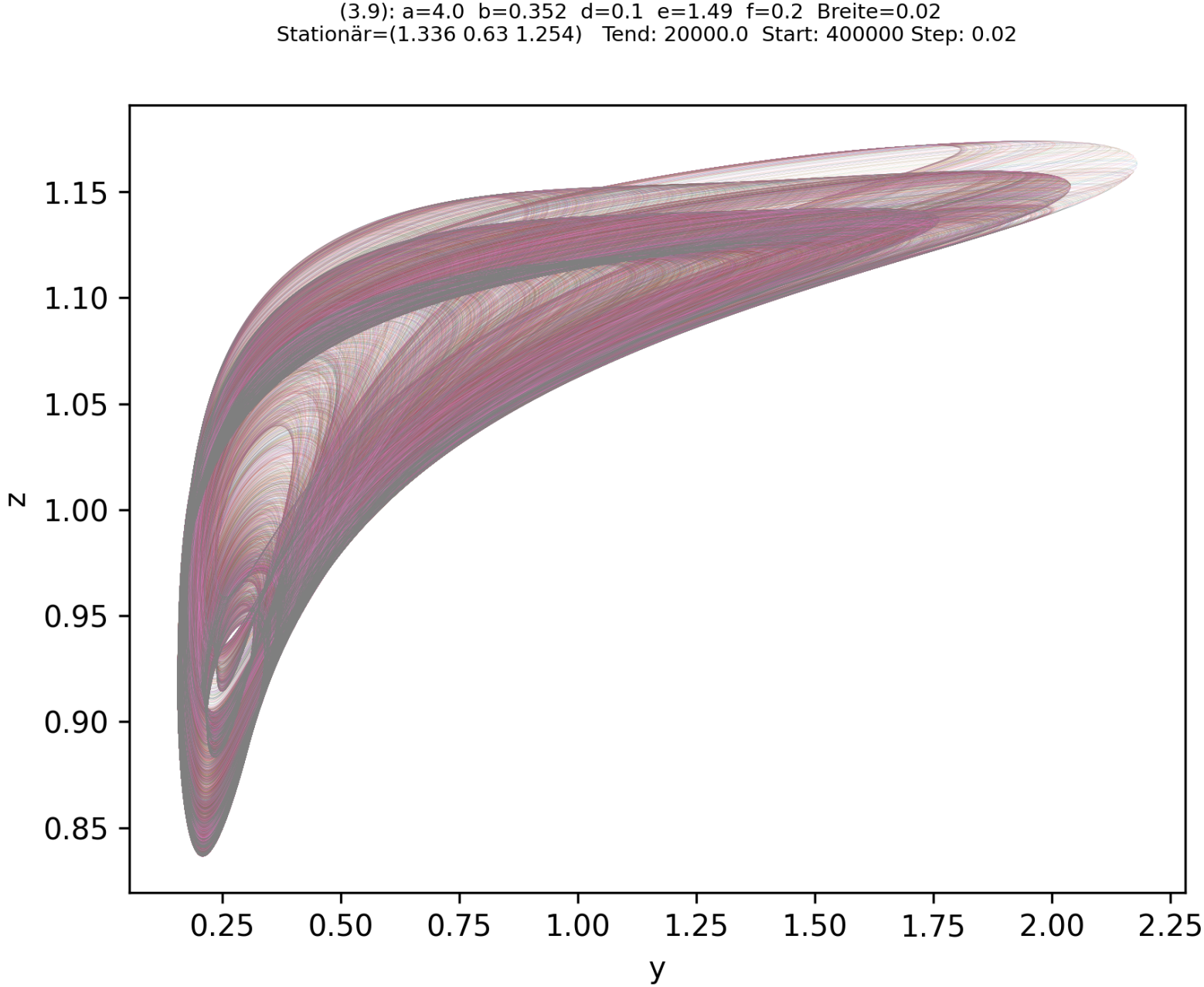


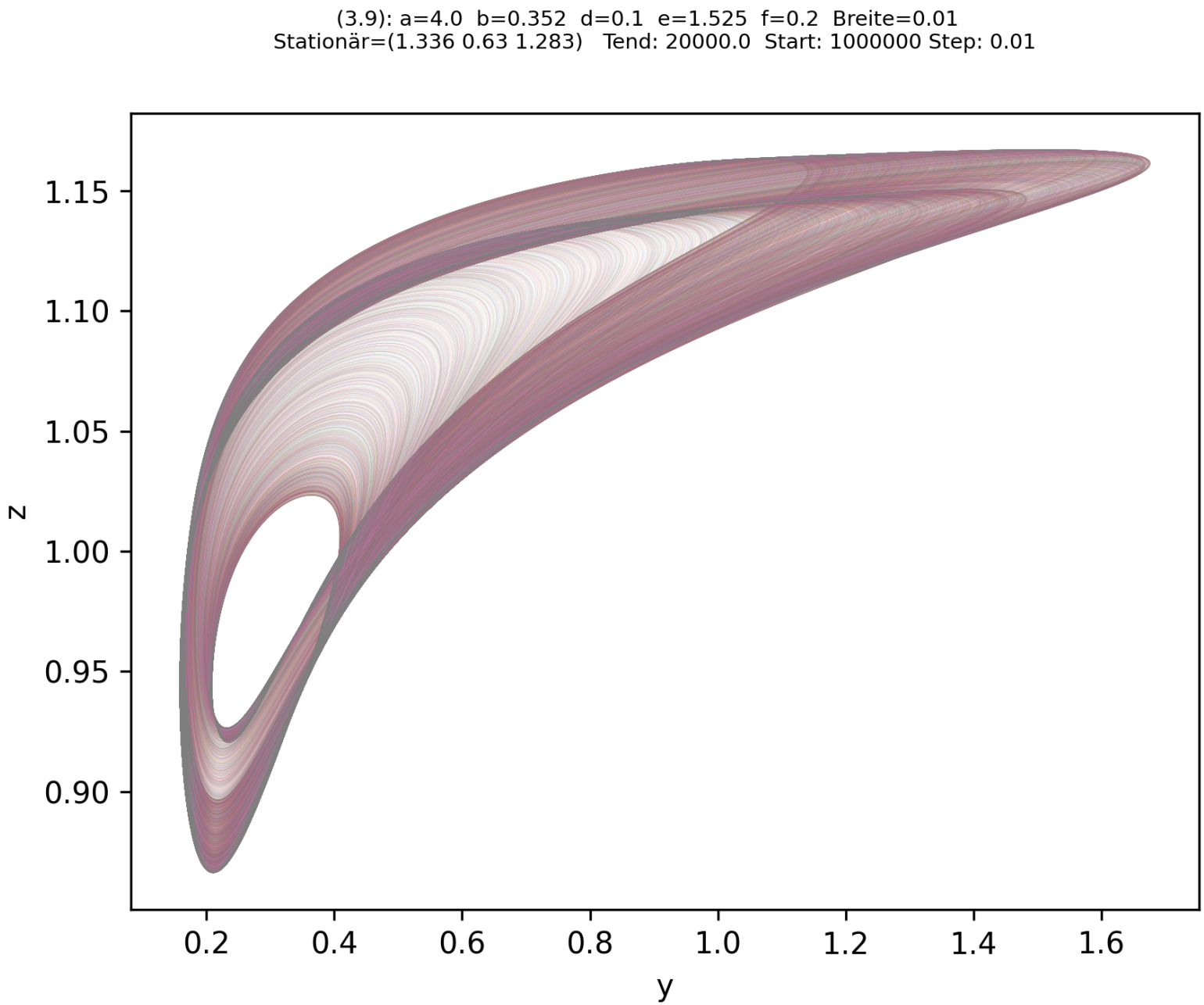

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.3 f=0.2 Breite=0.9
Stationär=(1.336 0.63 1.094)   Tend: 2000.0 Start: 50000 Step: 0.01
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
z
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
y

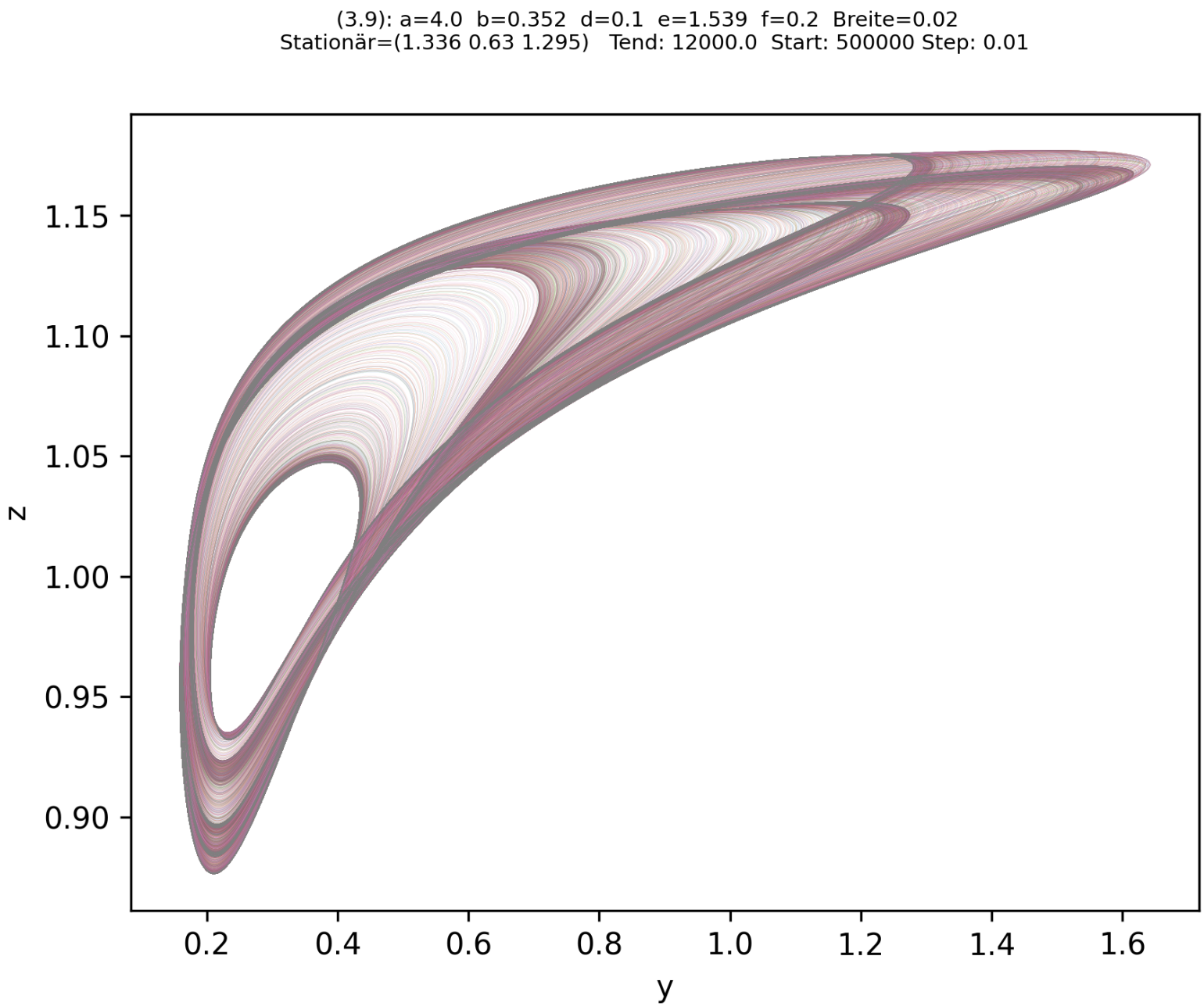

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.424 f=0.2
Stationär=(1.336 0.63 1.198) Endzeit=16000.0 Schritt=0.005 Anfang=80000
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
z
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
y

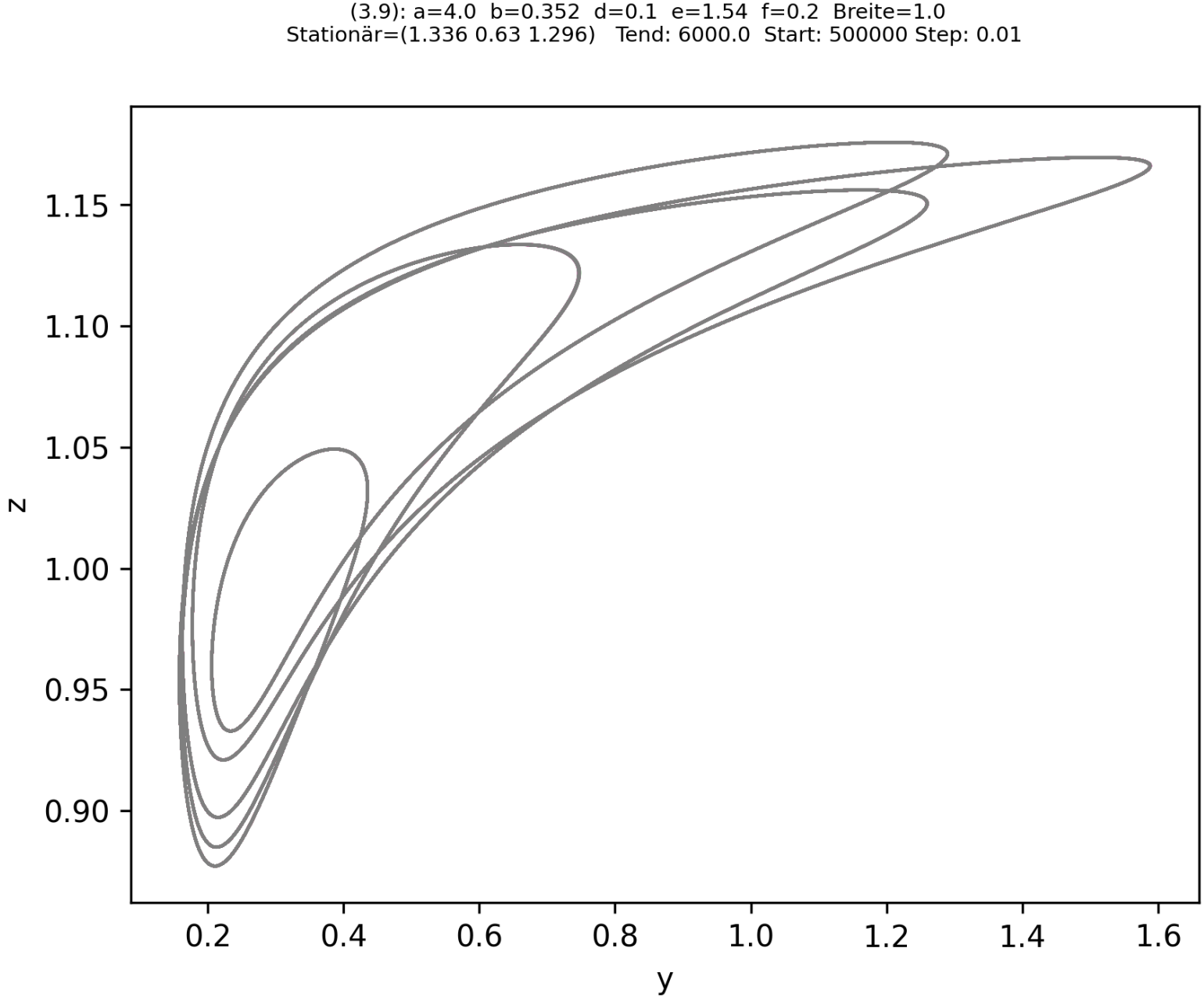

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.425 f=0.2 Breite=0.8
Stationär=(1.336 0.63 1.199)   Tend: 20000.0 Start: 1000000 Step: 0.01
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
z
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
y

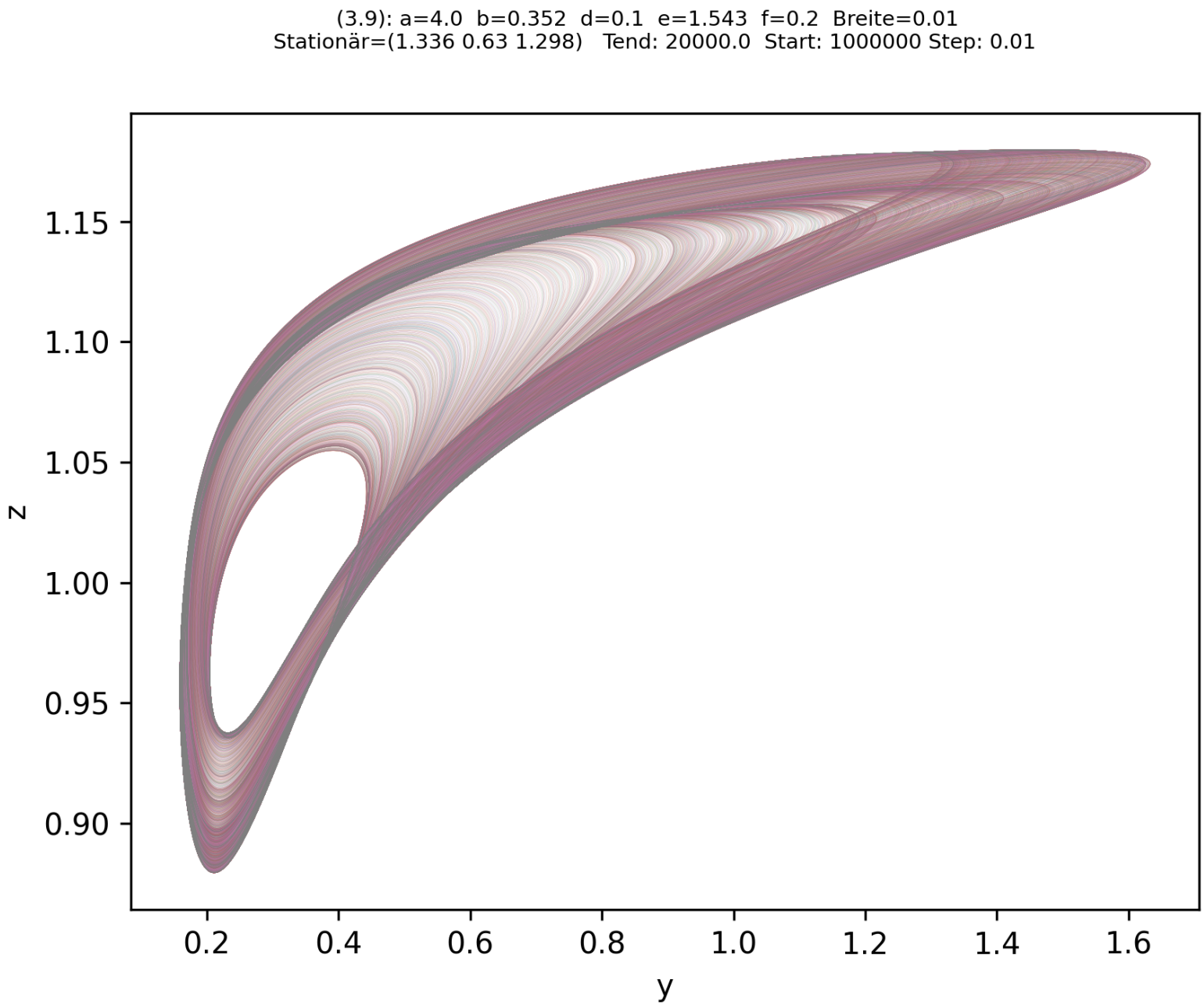

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.43 f=0.2 Breite=0.015
Stationär=(1.336 0.63 1.203) Tend: 20000.0 Start: 400000 Step: 0.02
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
z
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
y

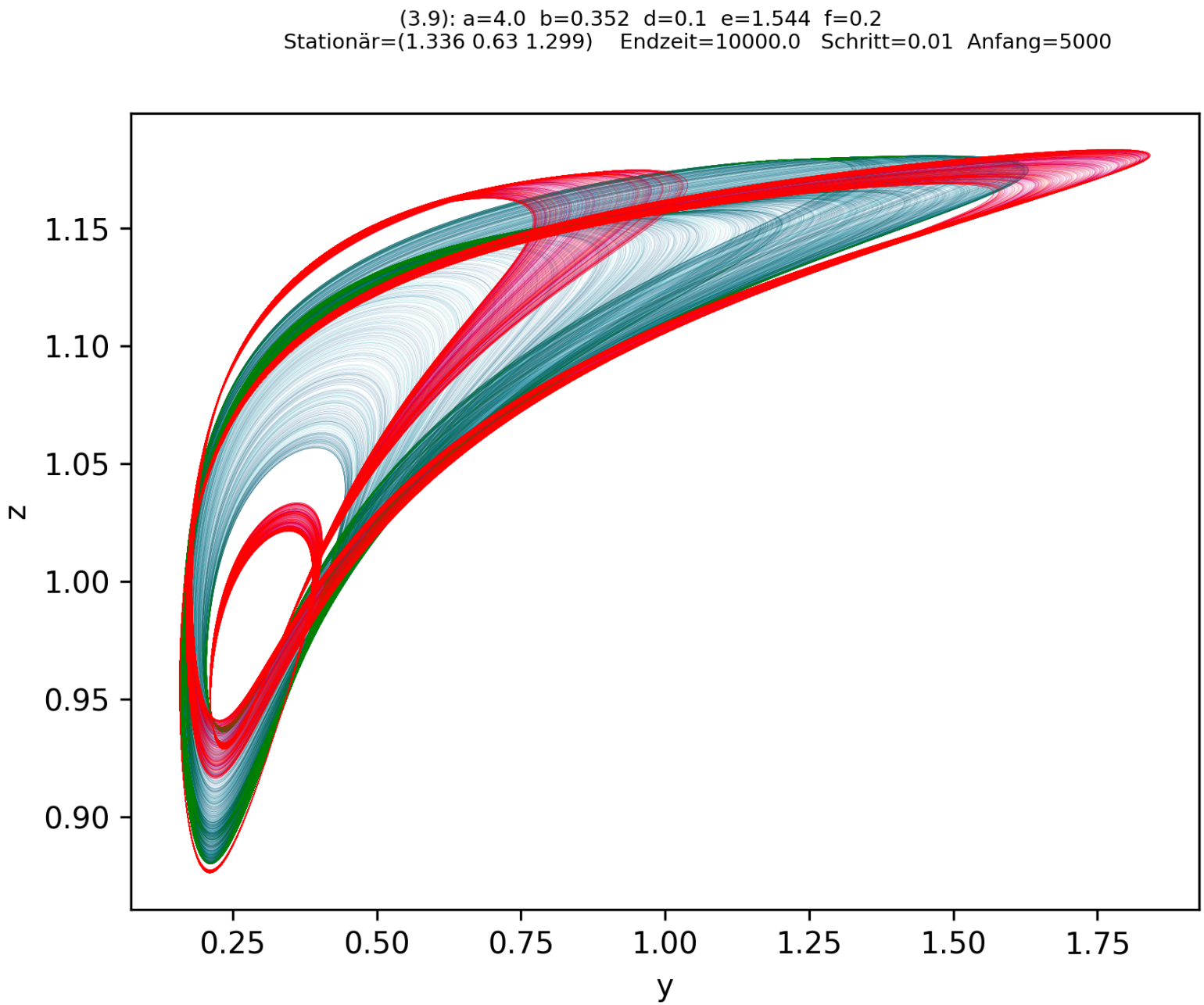

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.49 f=0.2 Breite=0.02
Stationär=(1.336 0.63 1.254) Tend: 20000.0 Start: 400000 Step: 0.02
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
z
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
2.25
y

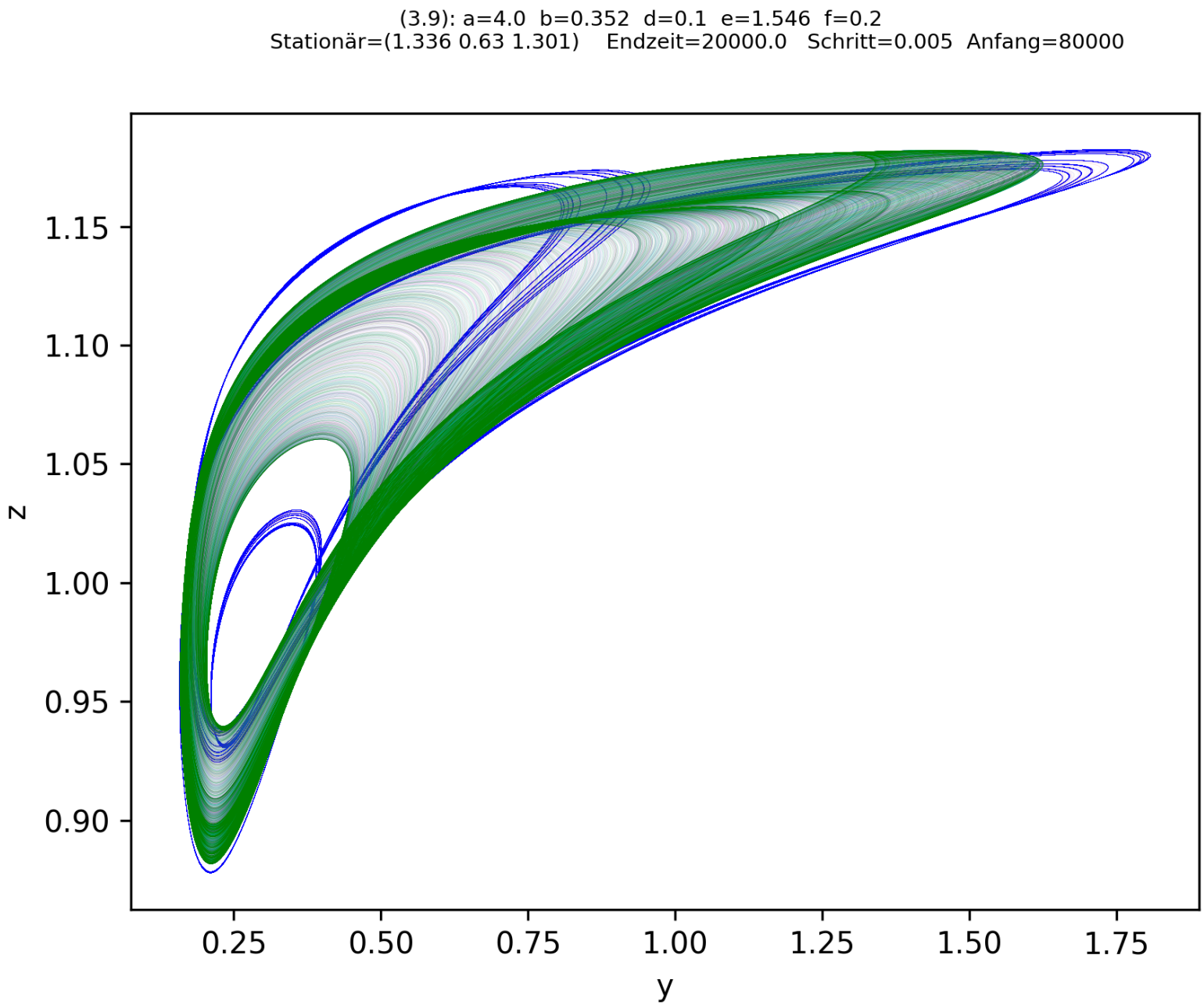

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.525 f=0.2 Breite=0.01
Stationär=(1.336 0.63 1.283) Tend: 20000.0 Start: 1000000 Step: 0.01
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
y

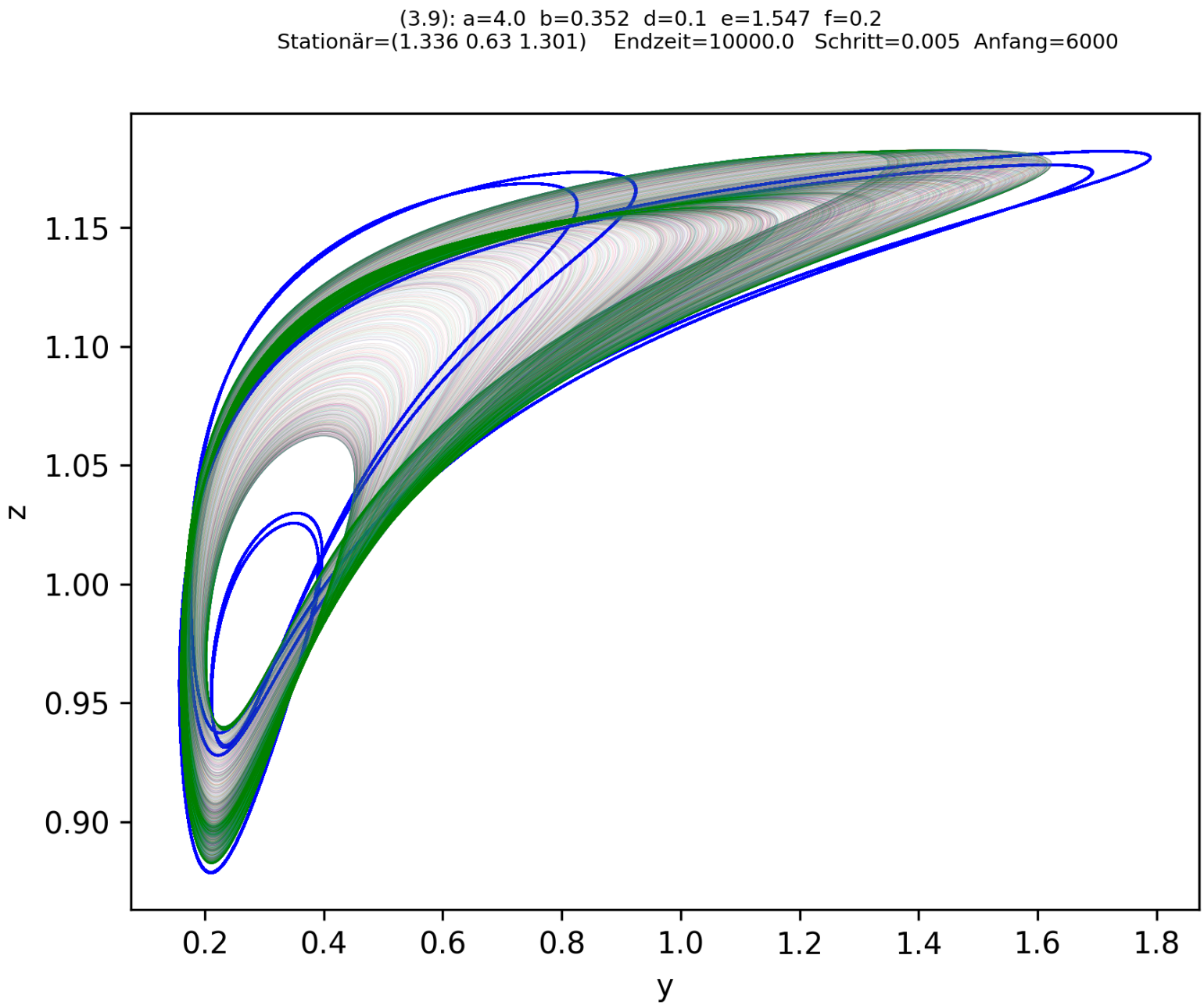

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.539 f=0.2 Breite=0.02
Stationär=(1.336 0.63 1.295) Tend: 12000.0 Start: 500000 Step: 0.01
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
y

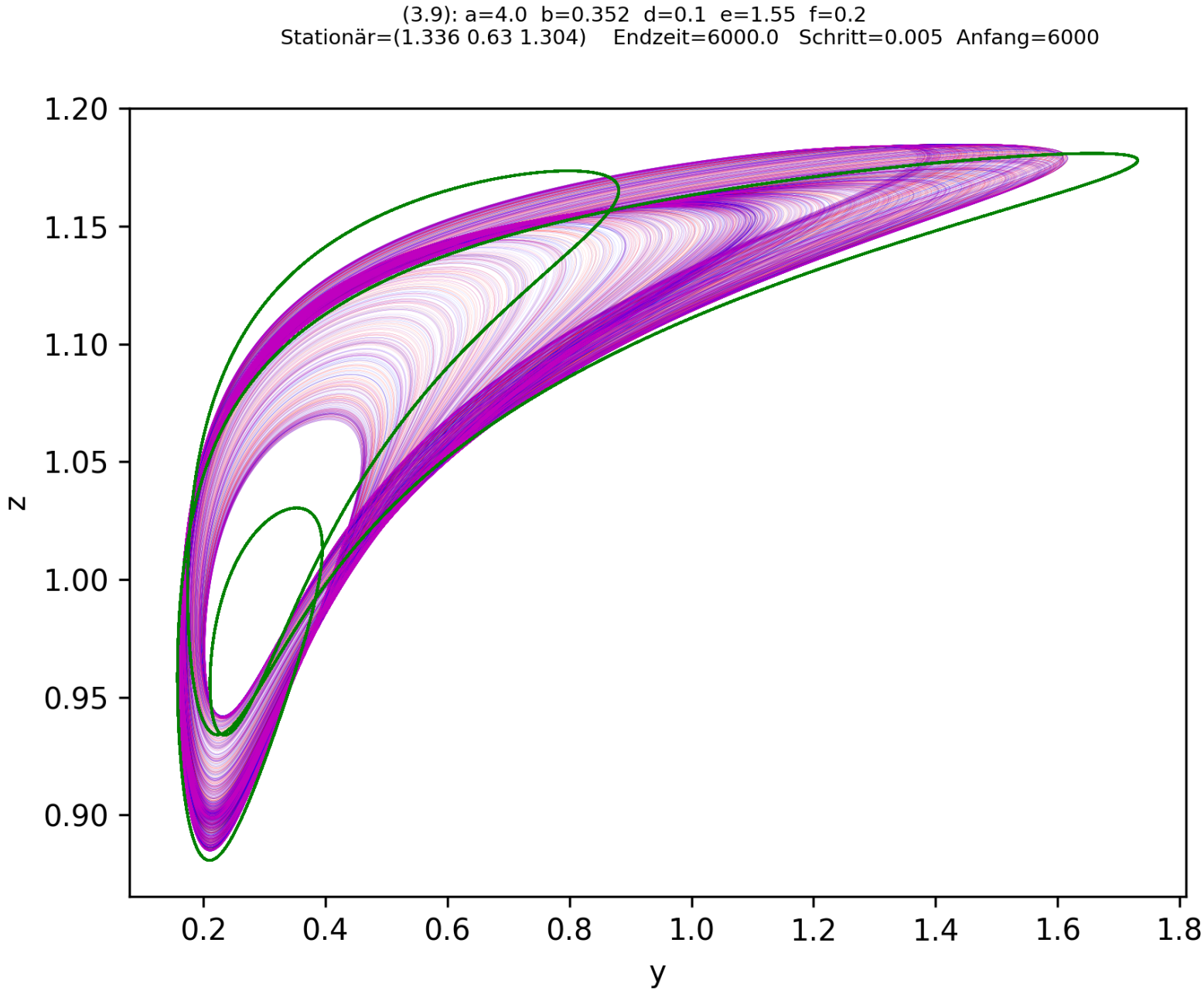

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.54 f=0.2 Breite=1.0
Stationär=(1.336 0.63 1.296) Tend: 6000.0 Start: 500000 Step: 0.01
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
y

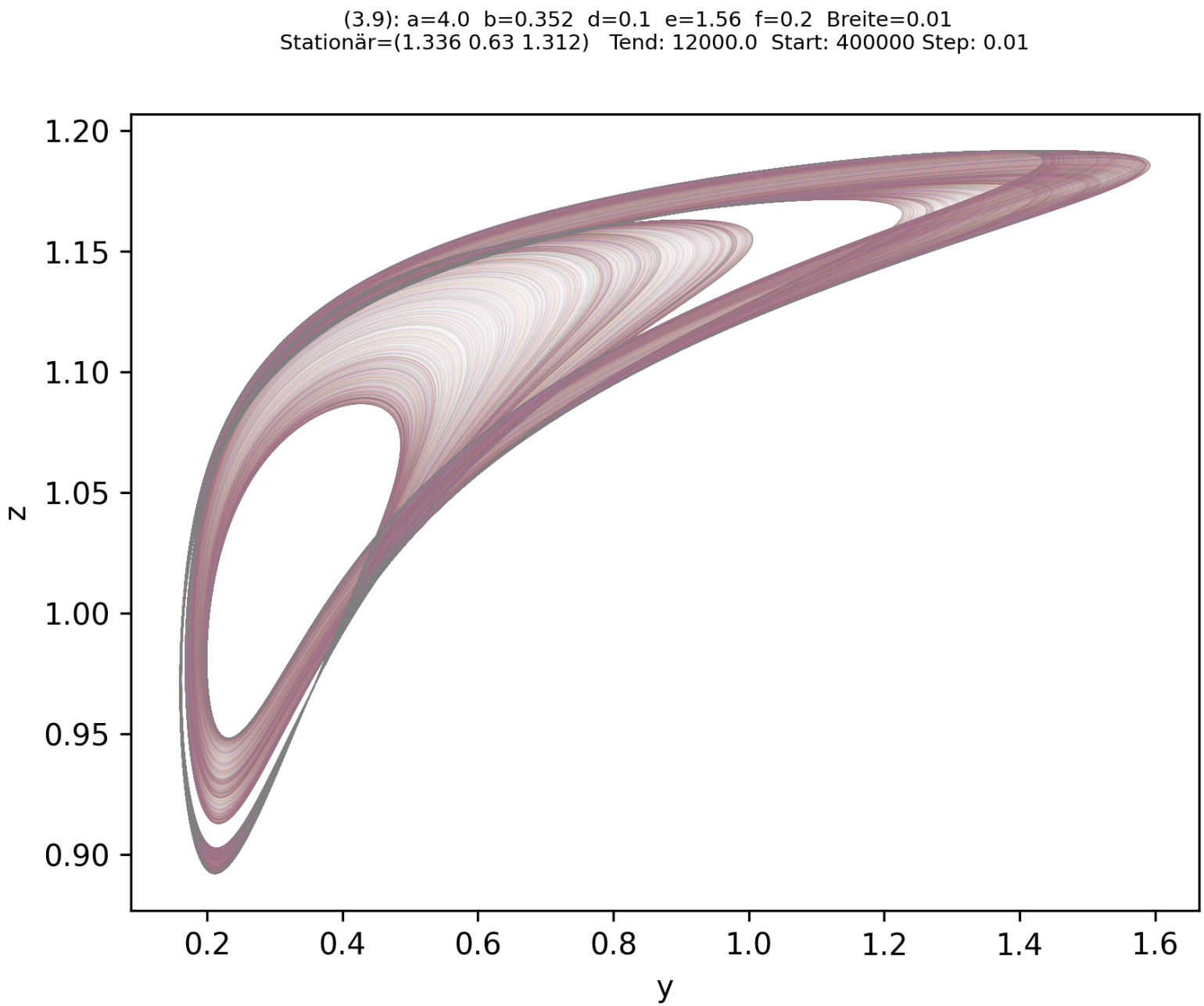

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.543 f=0.2 Breite=0.01
Stationär=(1.336 0.63 1.298) Tend: 20000.0 Start: 1000000 Step: 0.01
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
y


(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2
Stationär=(1.336 0.63 1.299) Endzeit=10000.0 Schritt=0.01 Anfang=5000
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
y

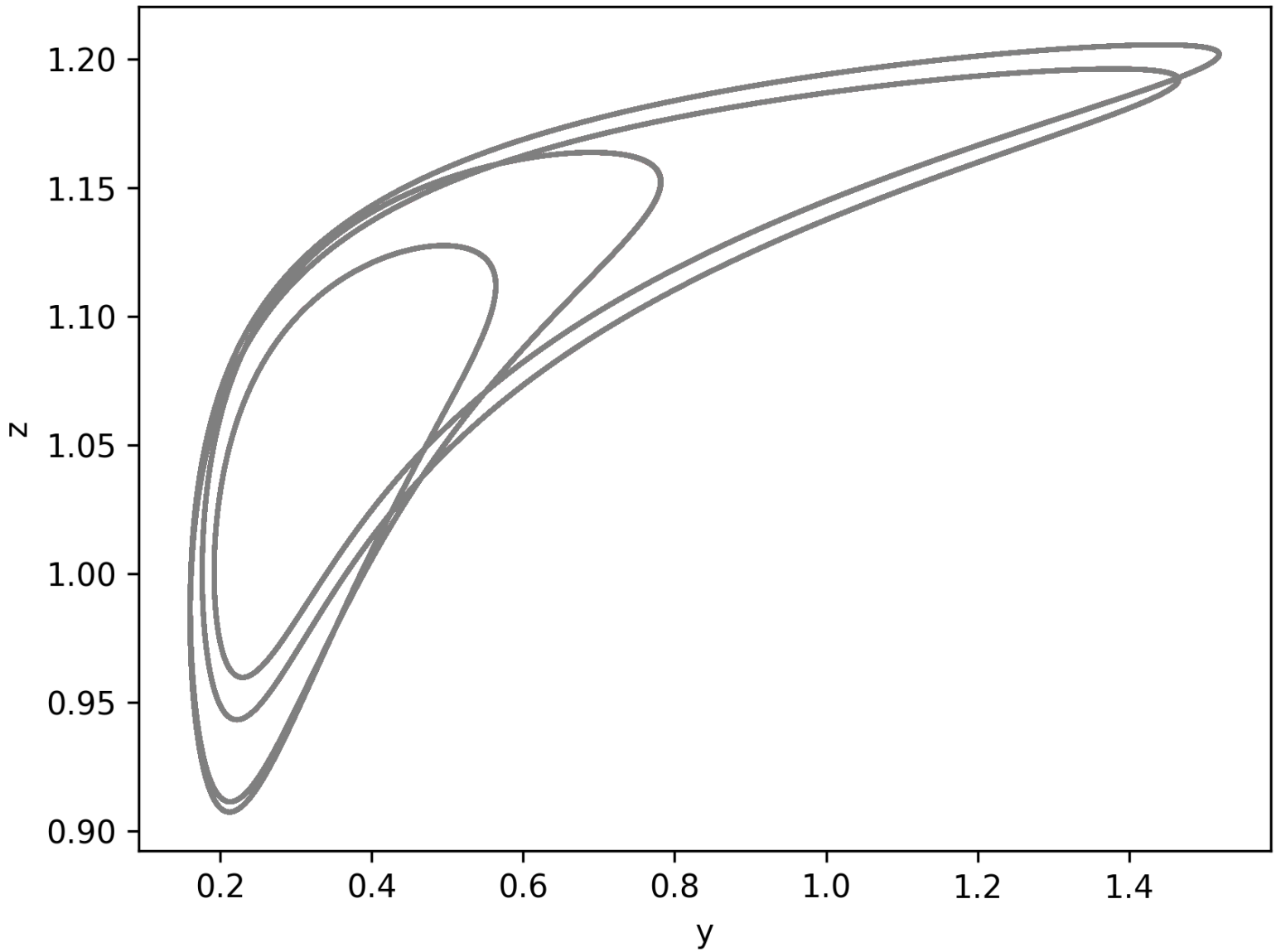

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.546 f=0.2
Stationär=(1.336 0.63 1.301) Endzeit=20000.0 Schritt=0.005 Anfang=80000
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
y

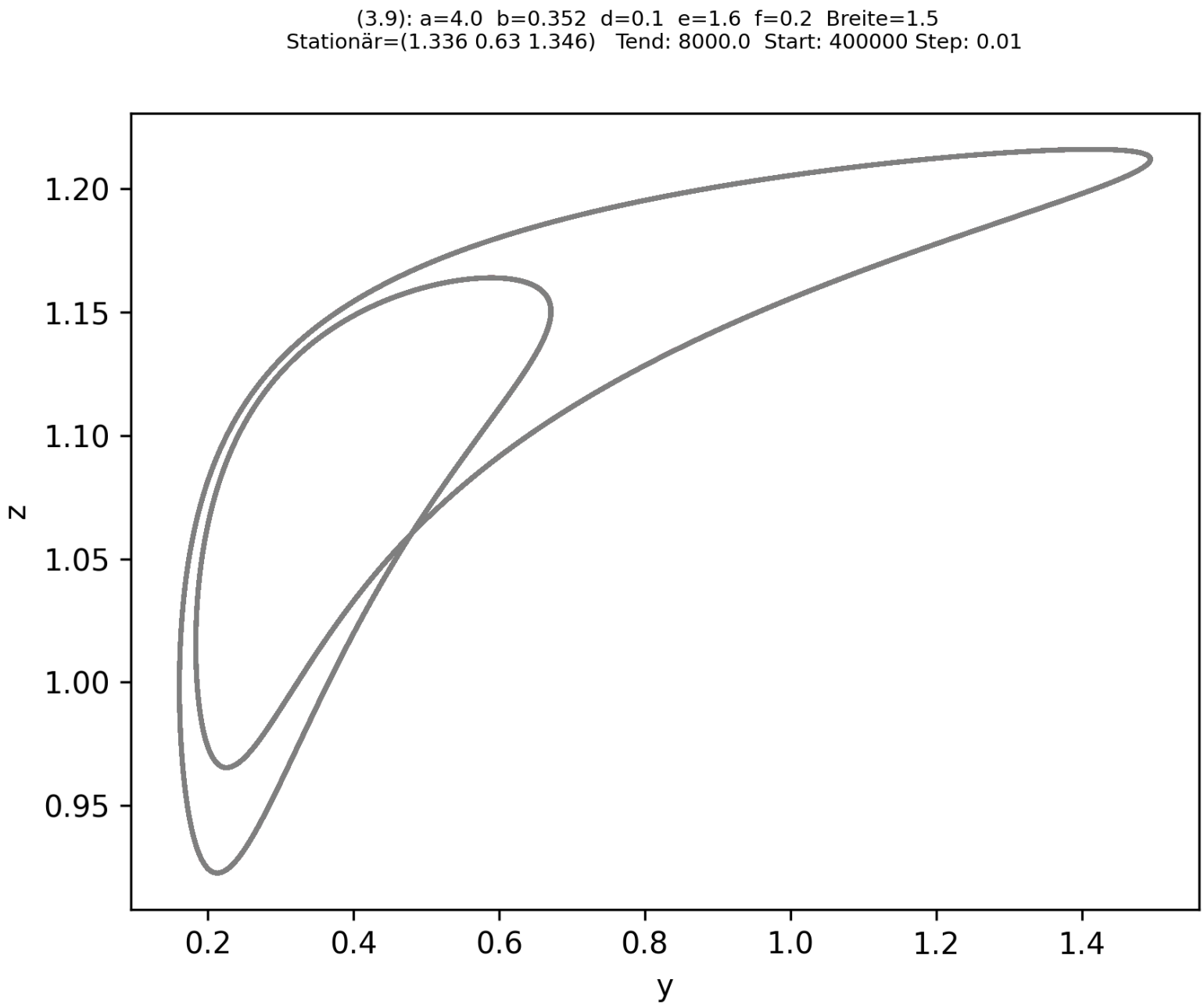

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.547 f=0.2
Stationär=(1.336 0.63 1.301) Endzeit=10000.0 Schritt=0.005 Anfang=6000
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
y

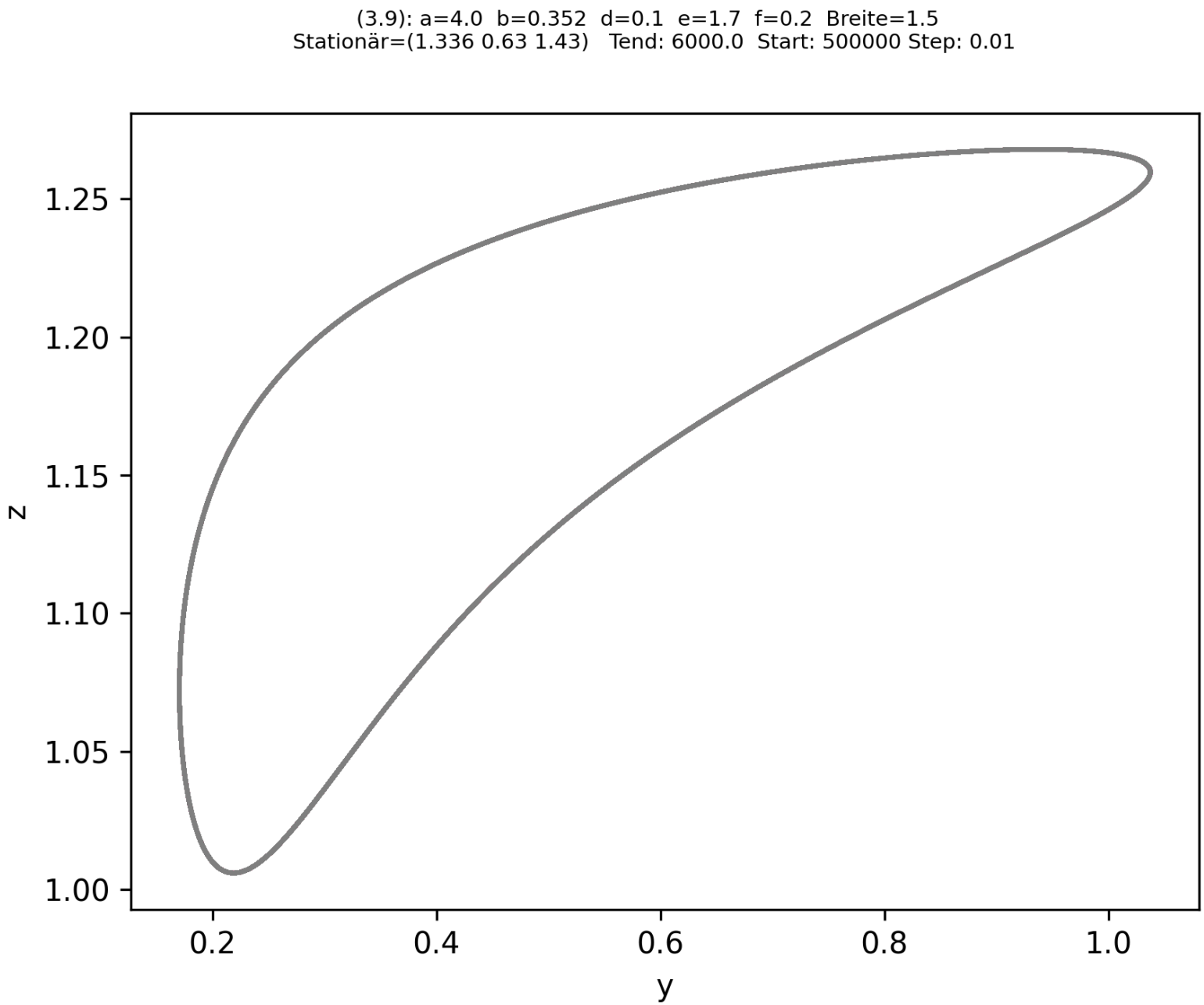

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.55 f=0.2
Stationär=(1.336 0.63 1.304) Endzeit=6000.0 Schritt=0.005 Anfang=6000
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
y

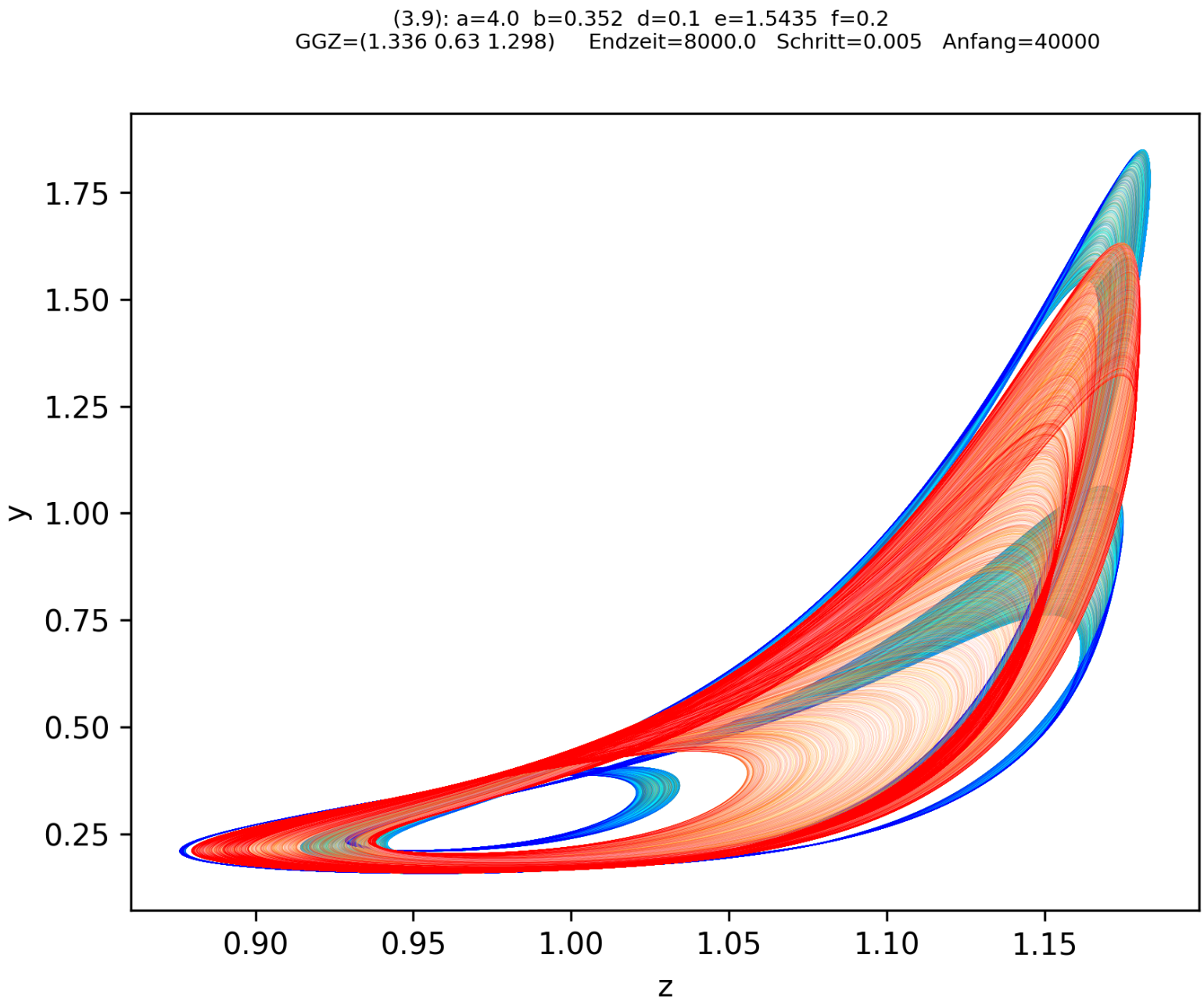

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.56 f=0.2 Breite=0.01
Stationär=(1.336 0.63 1.312) Tend: 12000.0 Start: 400000 Step: 0.01
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
y

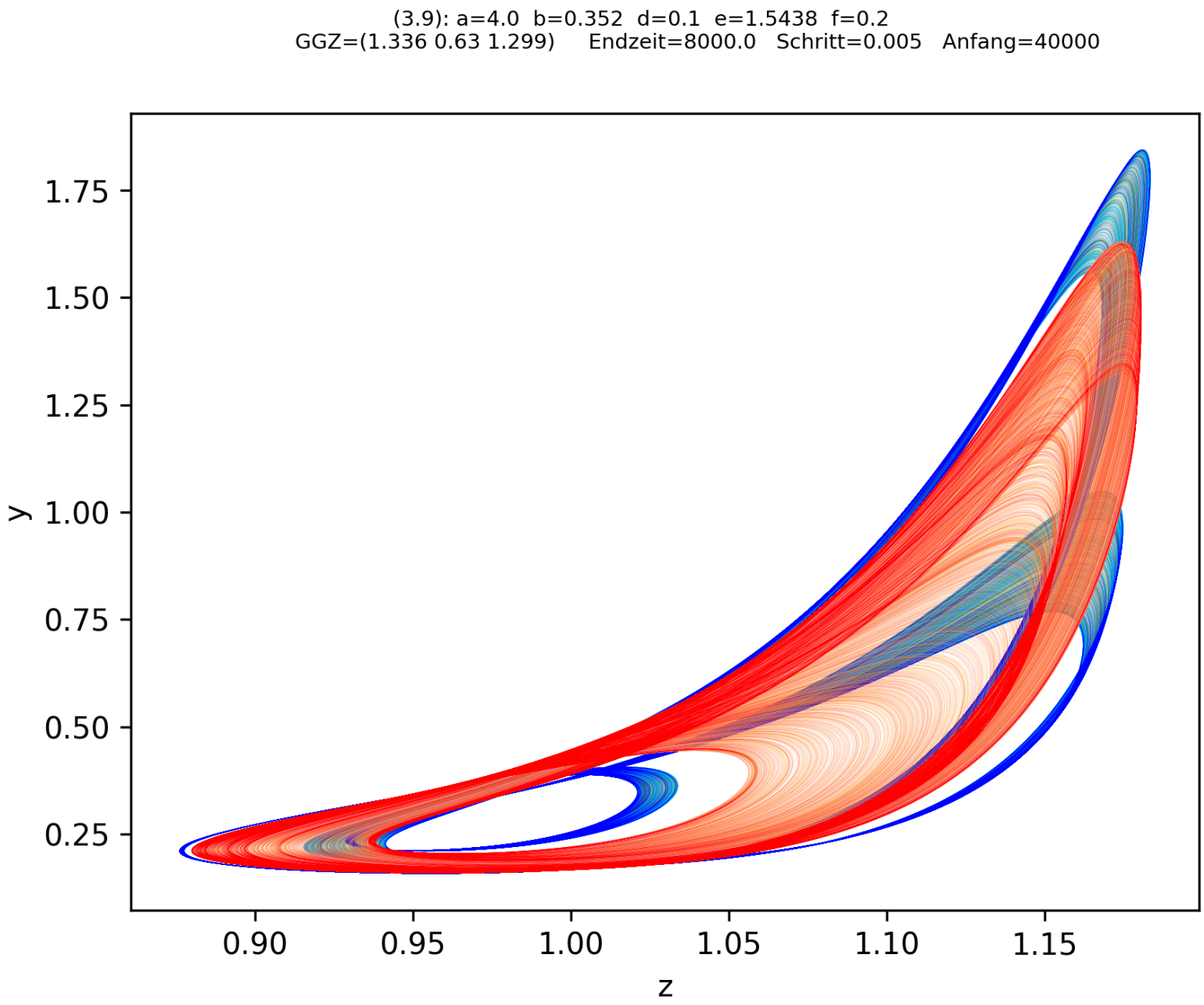
(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.58 f=0.2 Breite=1.5
Stationär=(1.336 0.63 1.329)   Tend: 8000.0 Start: 400000 Step: 0.01

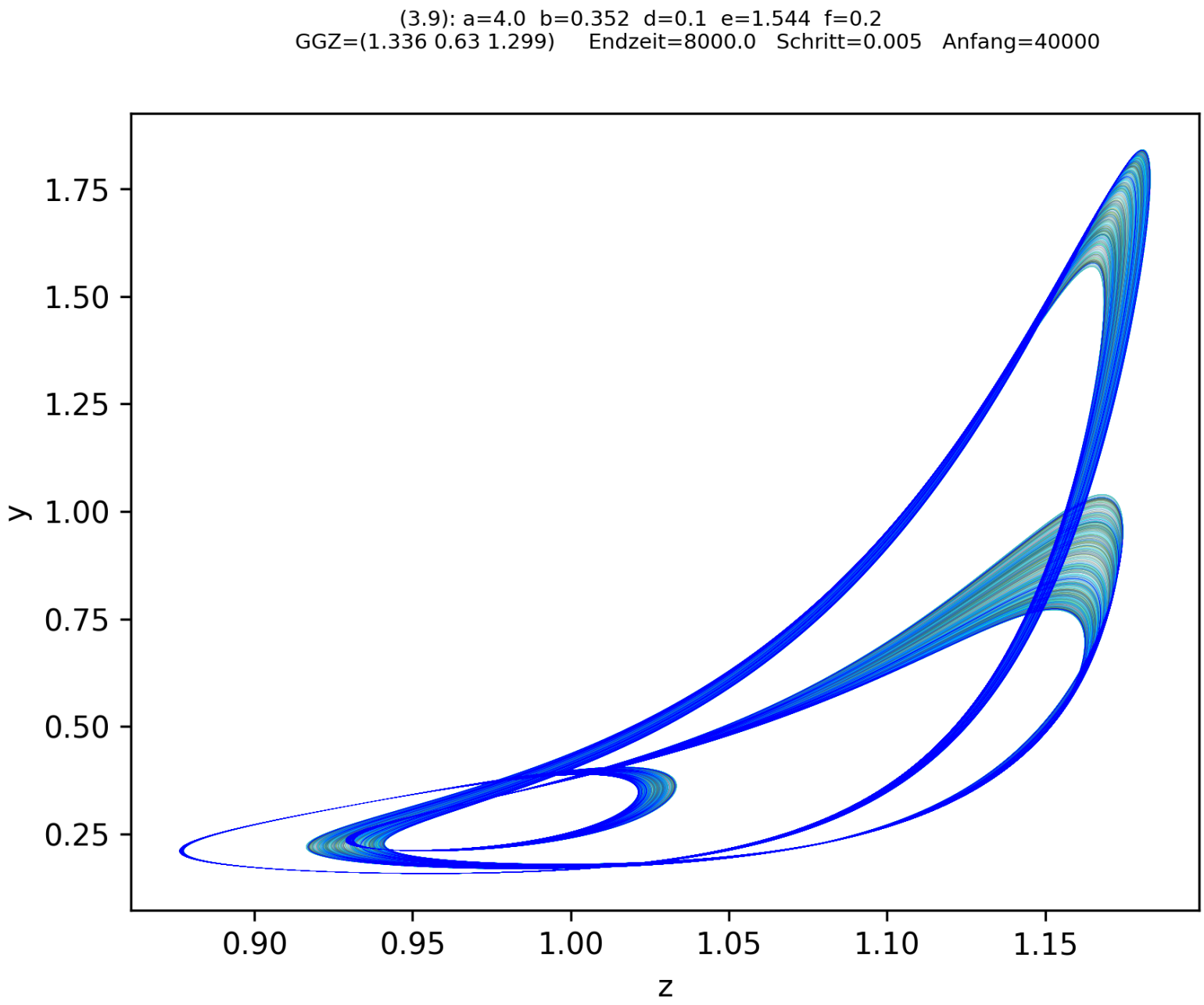


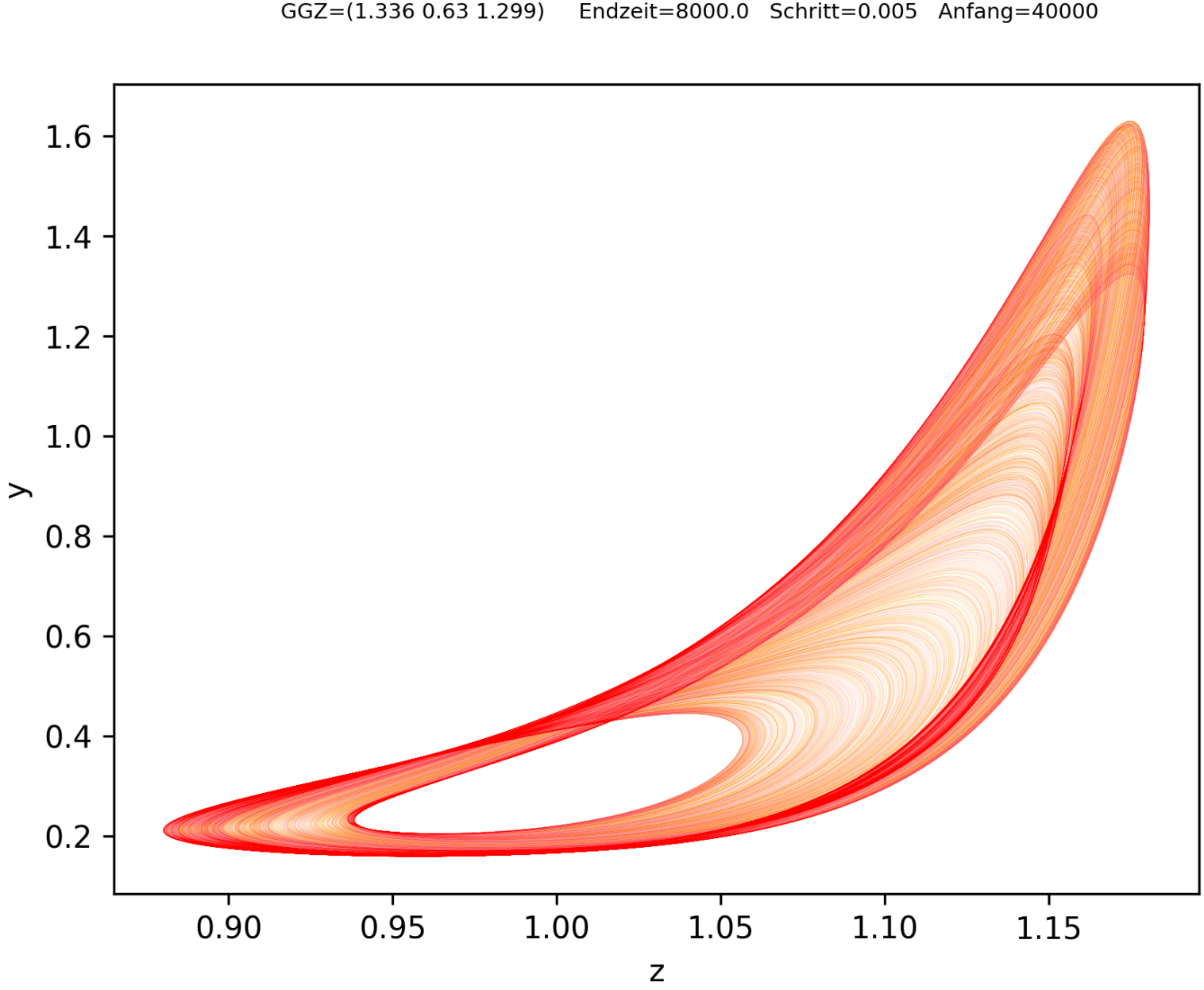

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.6 f=0.2 Breite=1.5
Stationär=(1.336 0.63 1.346)   Tend: 8000.0 Start: 400000 Step: 0.01
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
y

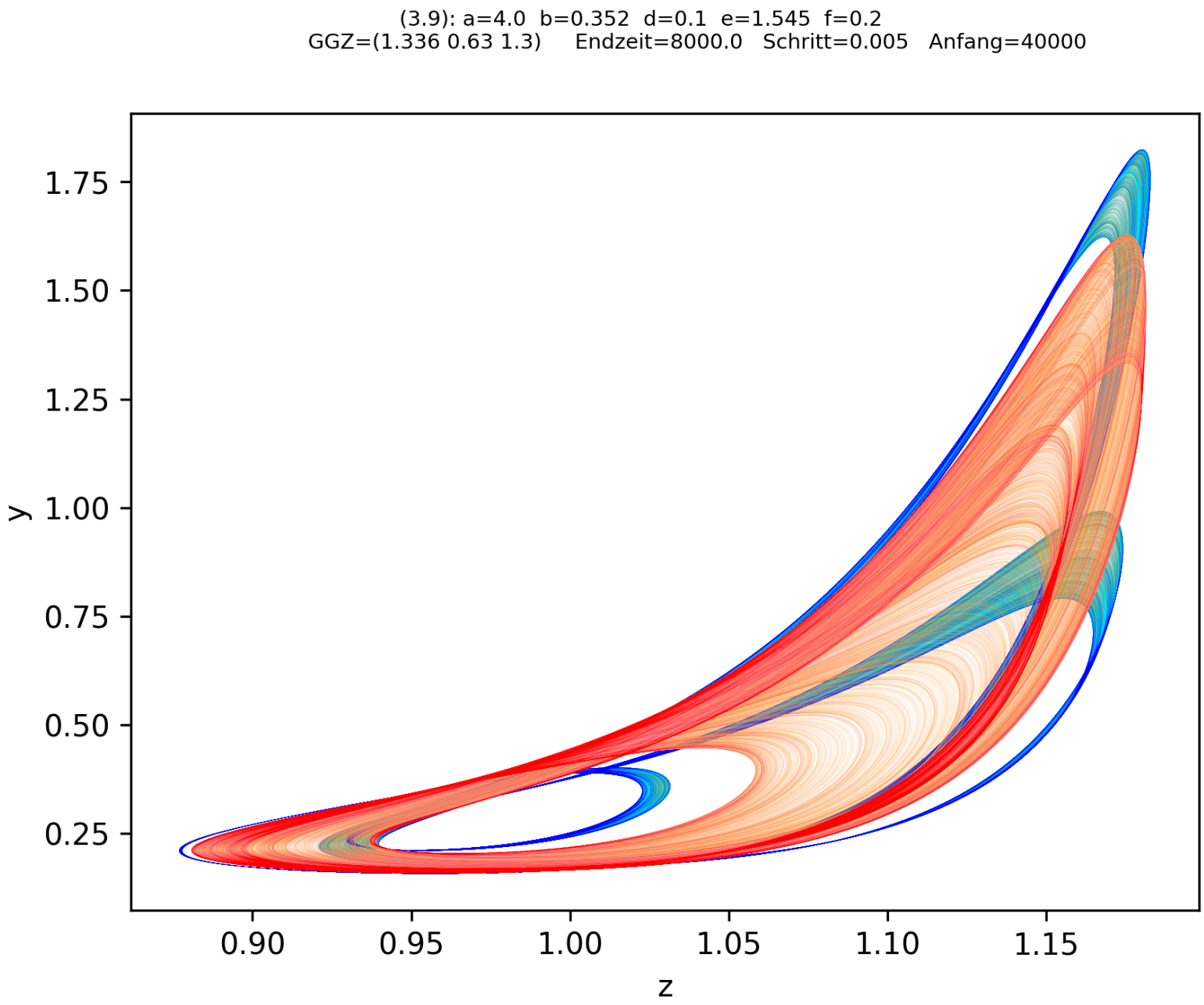

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.7 f=0.2 Breite=1.5
Stationär=(1.336 0.63 1.43)   Tend: 6000.0 Start: 500000 Step: 0.01
1.25
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
z
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
y

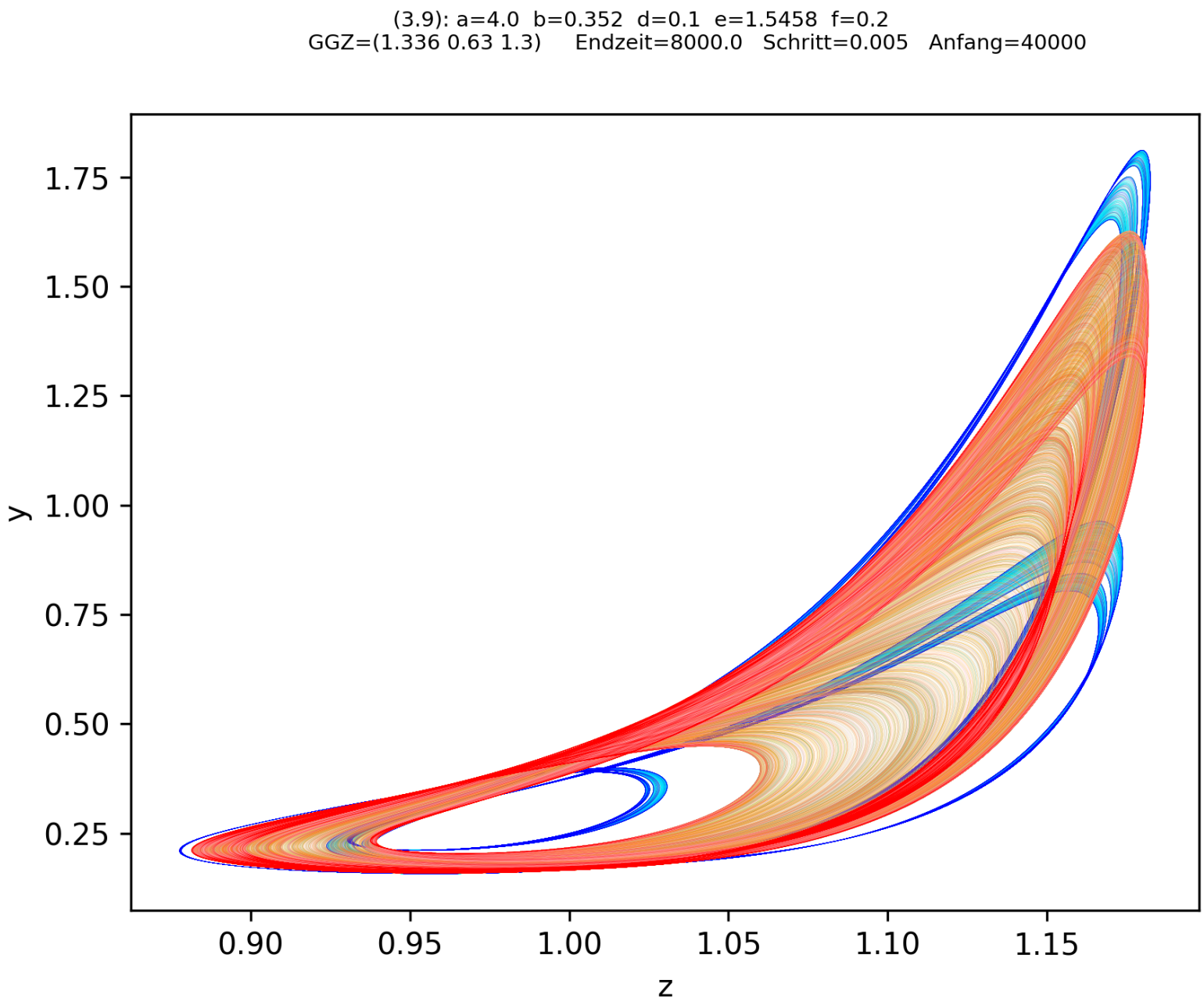

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.5435 f=0.2
GGZ=(1.336 0.63 1.298) Endzeit=8000.0 Schritt=0.005 Anfang=40000
1.75
1.50
1.25
y 1.00
0.75
0.50
0.25
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
z

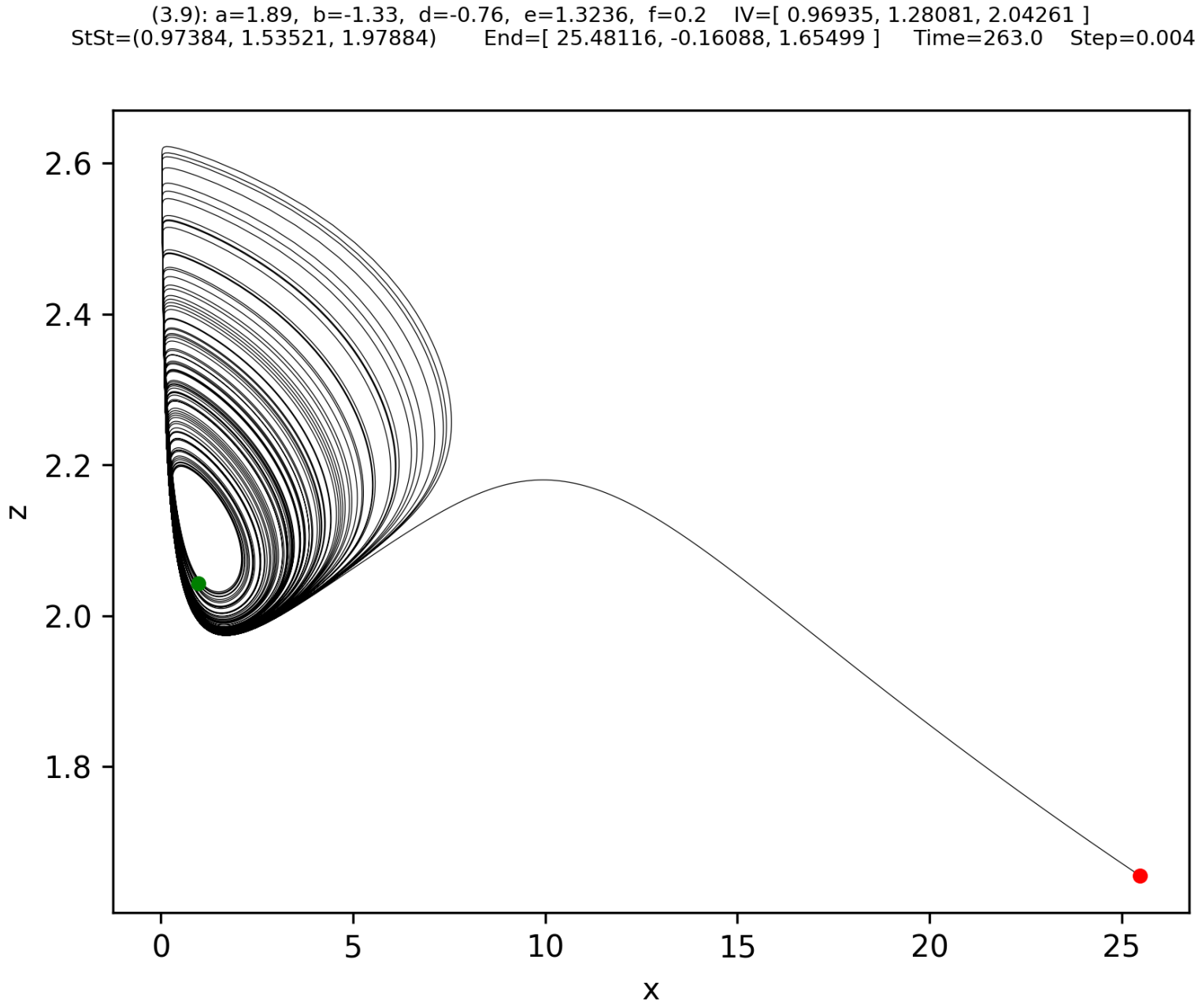

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.5438 f=0.2
GGZ=(1.336 0.63 1.299) Endzeit=8000.0 Schritt=0.005 Anfang=40000
1.75
1.50
1.25
y 1.00
0.75
0.50
0.25
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
z


(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2
GGZ=(1.336 0.63 1.299) Endzeit=8000.0 Schritt=0.005 Anfang=40000
1.75
1.50
1.25
y 1.00
0.75
0.50
0.25
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
z

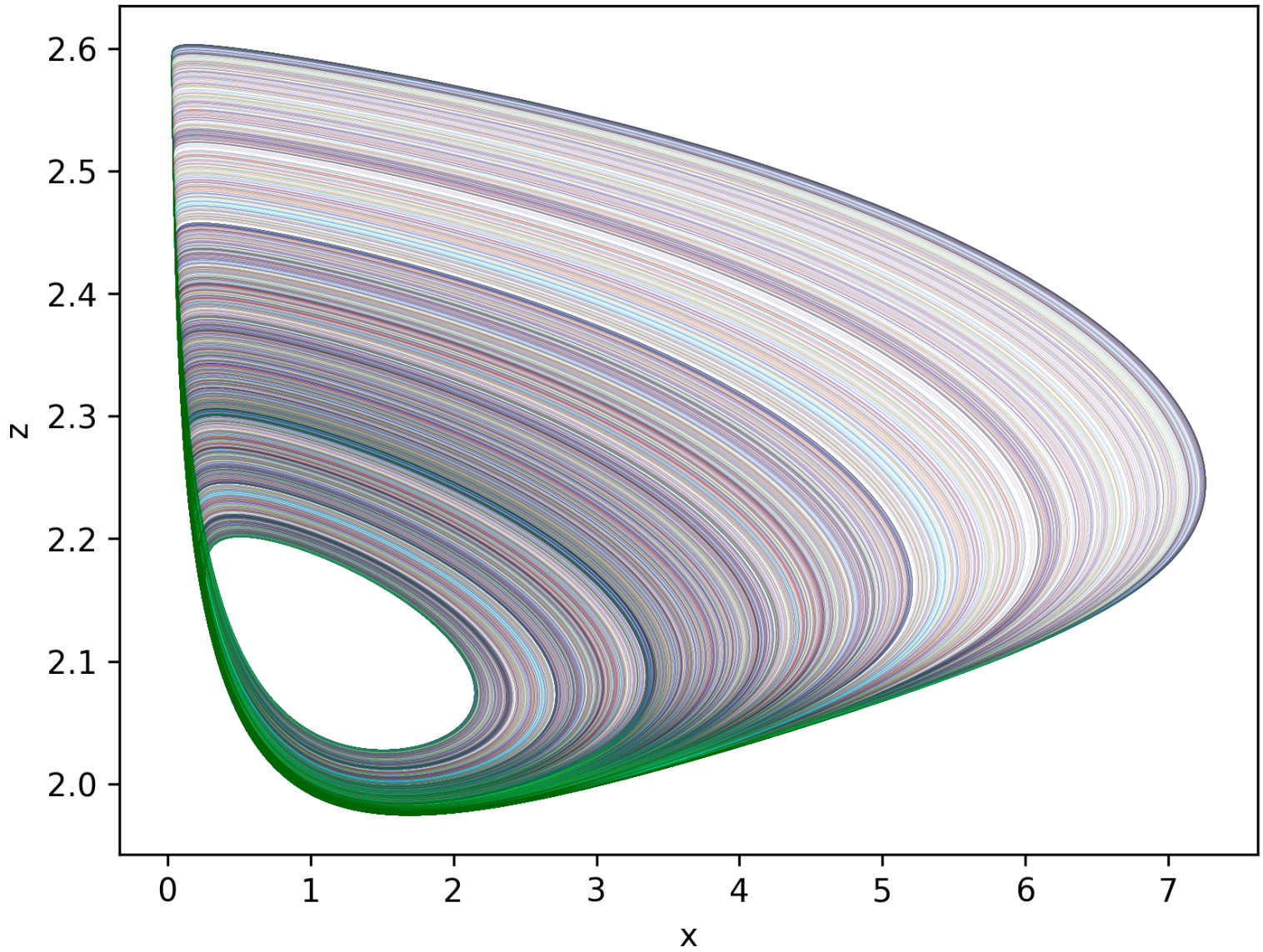

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2
GGZ=(1.336 0.63 1.299) Endzeit=8000.0 Schritt=0.005 Anfang=40000
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
z


(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.545 f=0.2
GGZ=(1.336 0.63 1.3) Endzeit=8000.0 Schritt=0.005 Anfang=40000
1.75
1.50
1.25
y 1.00
0.75
0.50
0.25
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
z

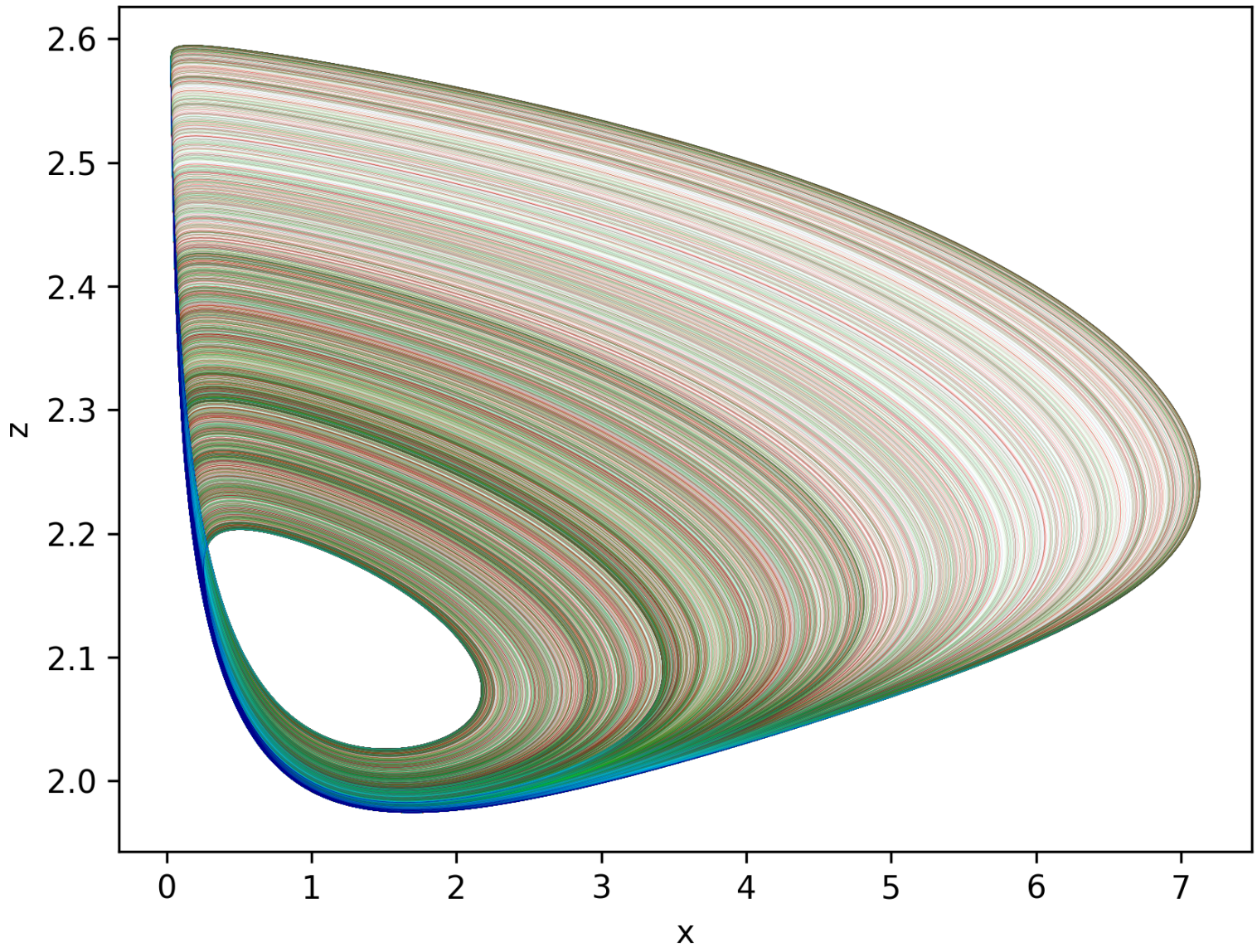

(3.9): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.5458 f=0.2
GGZ=(1.336 0.63 1.3) Endzeit=8000.0 Schritt=0.005 Anfang=40000
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
z


(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.3236, f=0.2 IV=[0.96935, 1.28081, 2.04261]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.97884) End=[25.48116, -0.16088, 1.65499] Time=263.0 Step=0.004
2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
z
0
5
10
15
20
25
x

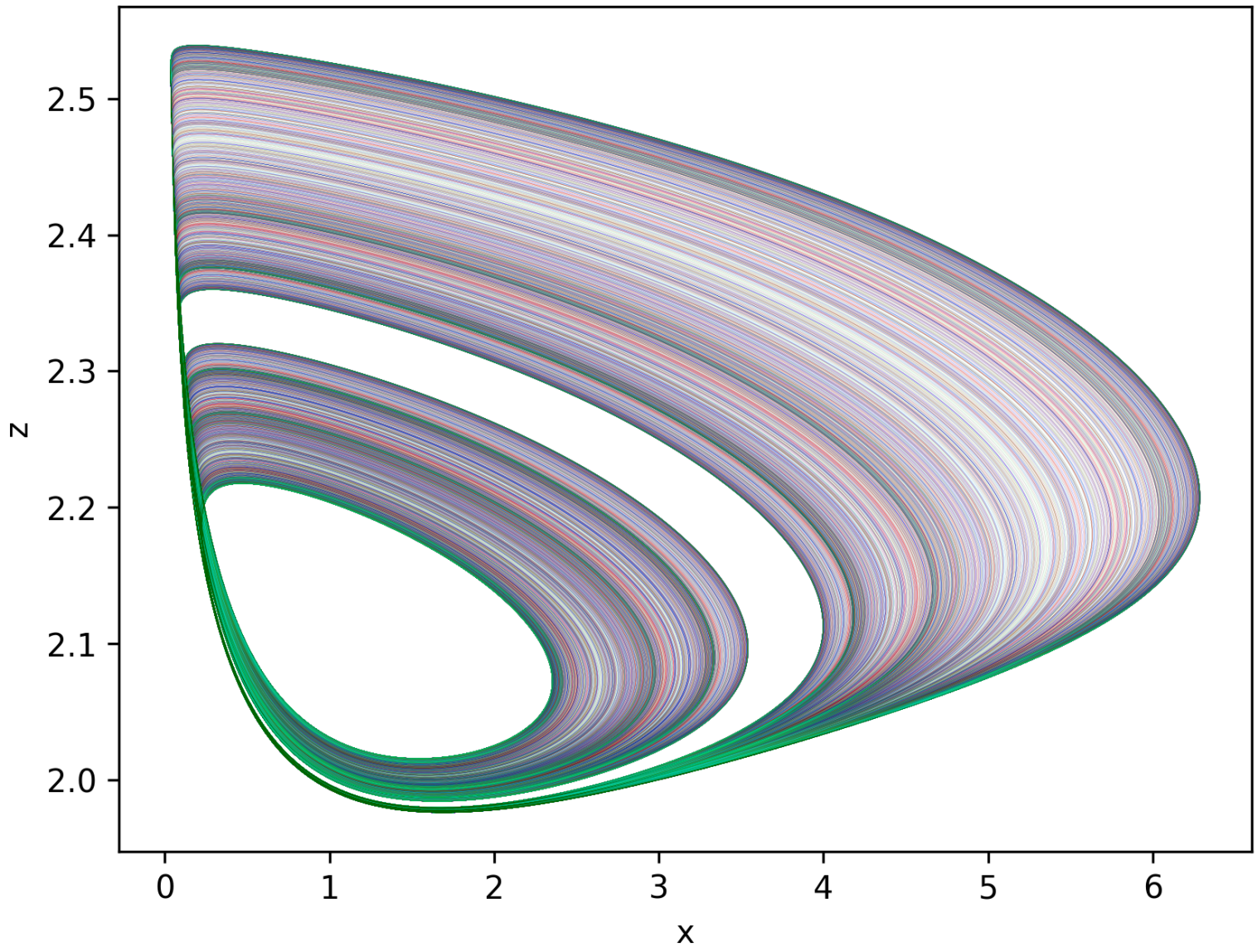
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.3238, f=0.2 IV=[2.90855, 0.66278, 2.003]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.97914) End=[0.21105, 5.65035, 2.32629] Time=3000.0 Step=0.004

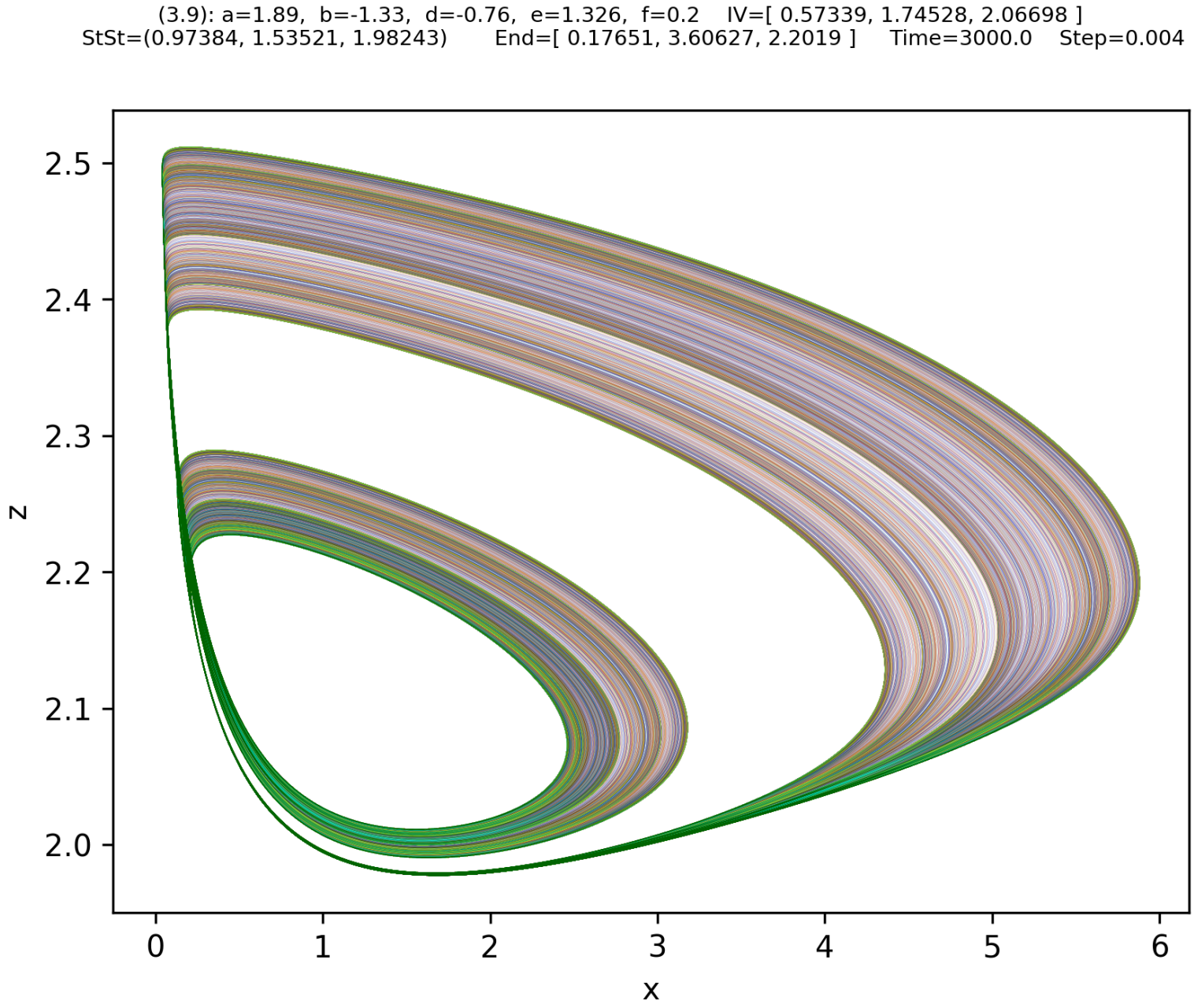


(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.3239, f=0.2 IV=[0.14754, 4.023, 2.25395]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.97929) End=[1.45131, 0.98814, 1.99295] Time=3000.0 Step=0.004

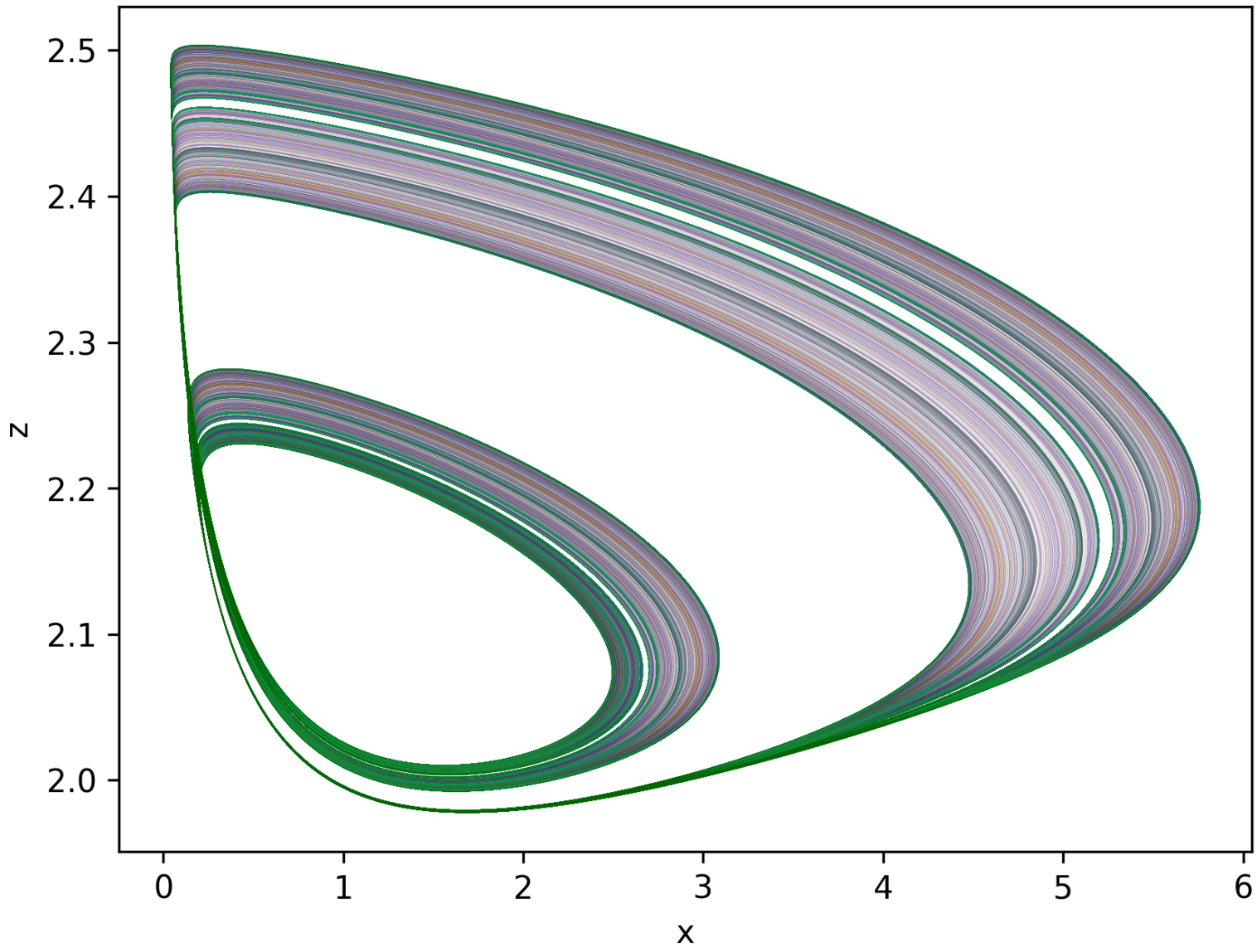


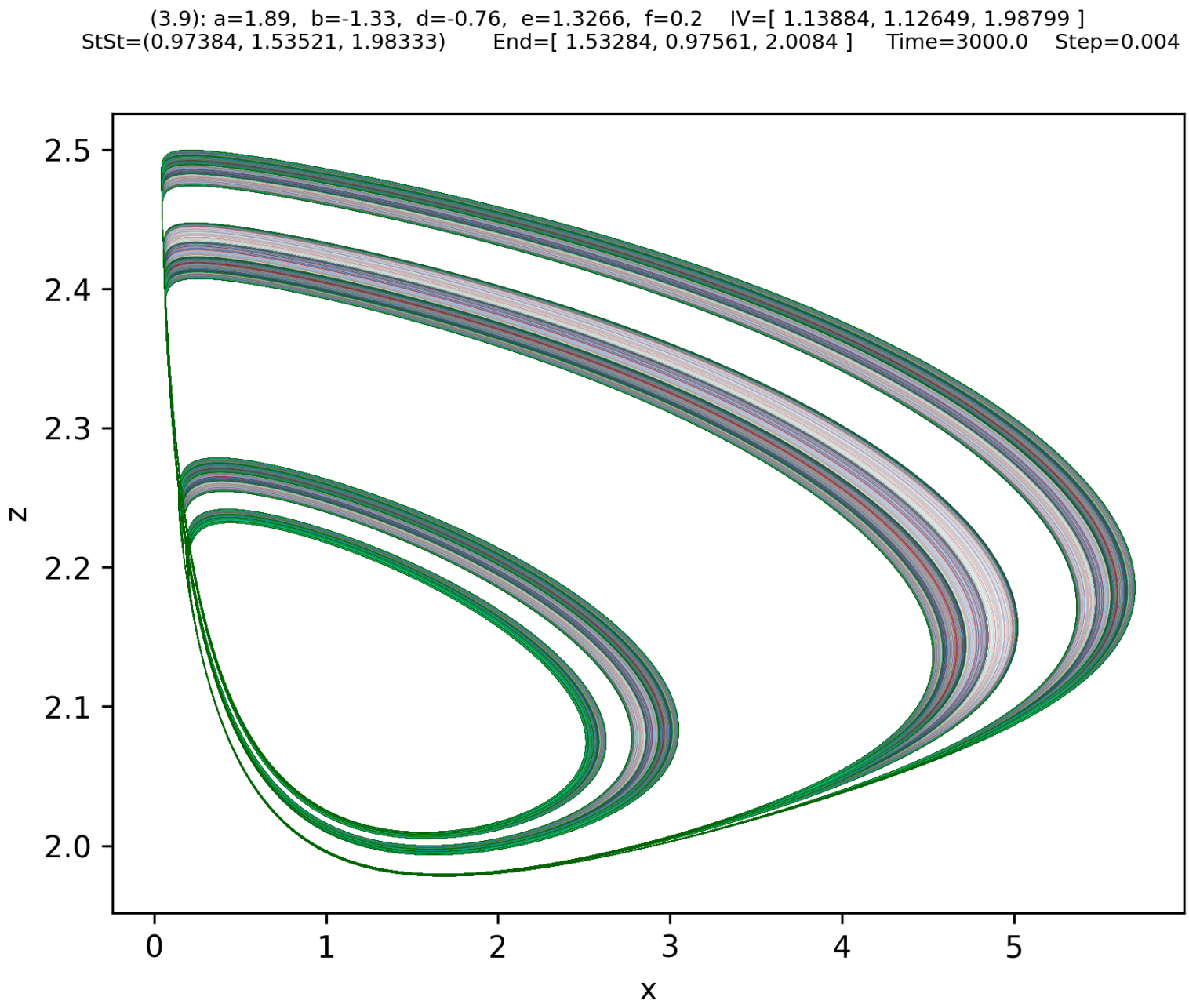
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.325, f=0.2 IV=[0.27835, 3.85614, 2.22551]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98094) End=[1.33375, 1.02065, 1.97939] Time=3000.0 Step=0.004



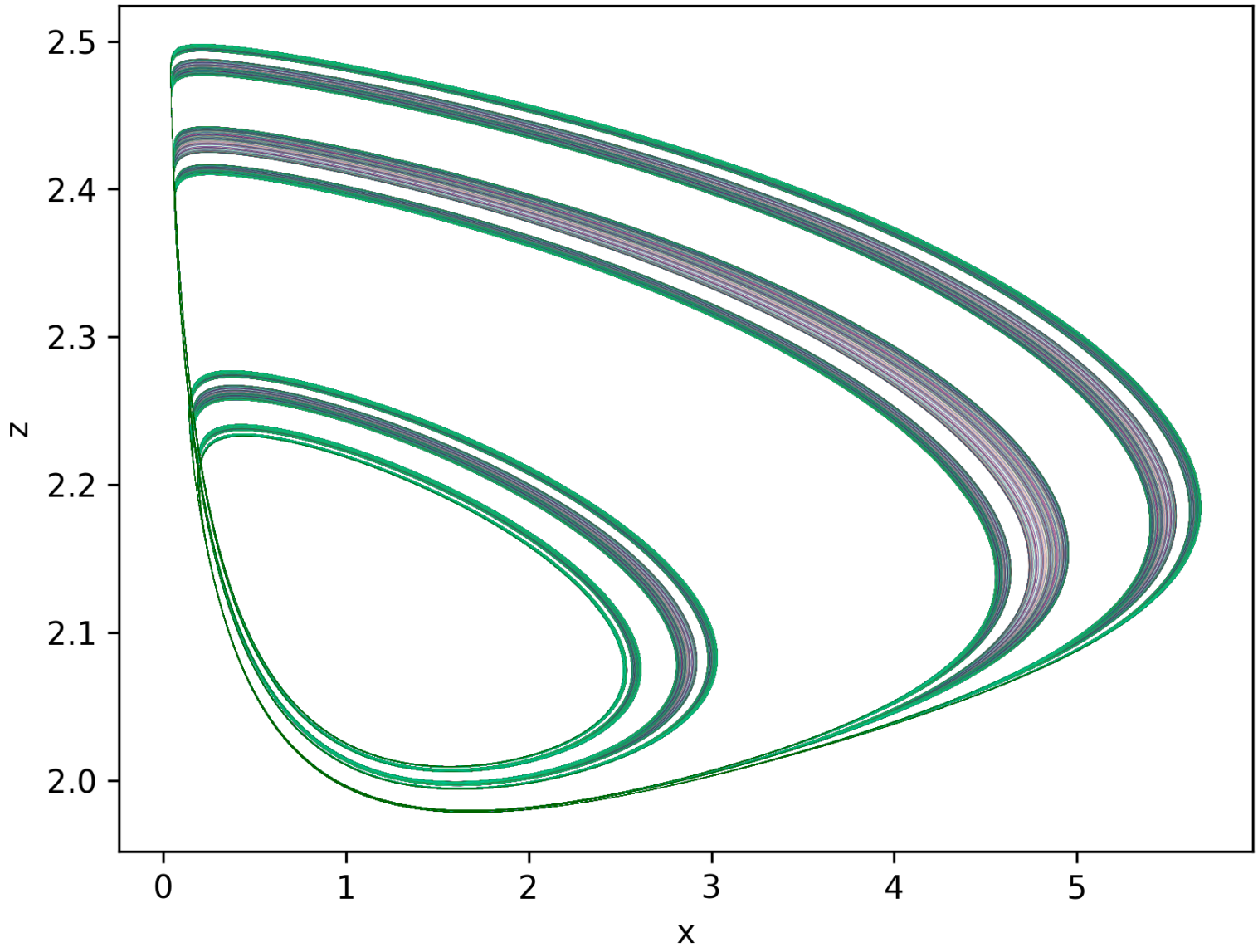

(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.326, f=0.2 IV=[0.57339, 1.74528, 2.06698]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98243) End=[0.17651, 3.60627, 2.2019] Time=3000.0 Step=0.004
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2.0
z
0
1
2
3
4
5
6
x

(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.3264, f=0.2   IV=[3.96366, 0.56329, 2.03971]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98303)   End=[2.0187, 0.84508, 2.00487]   Time=3000.0   Step=0.004

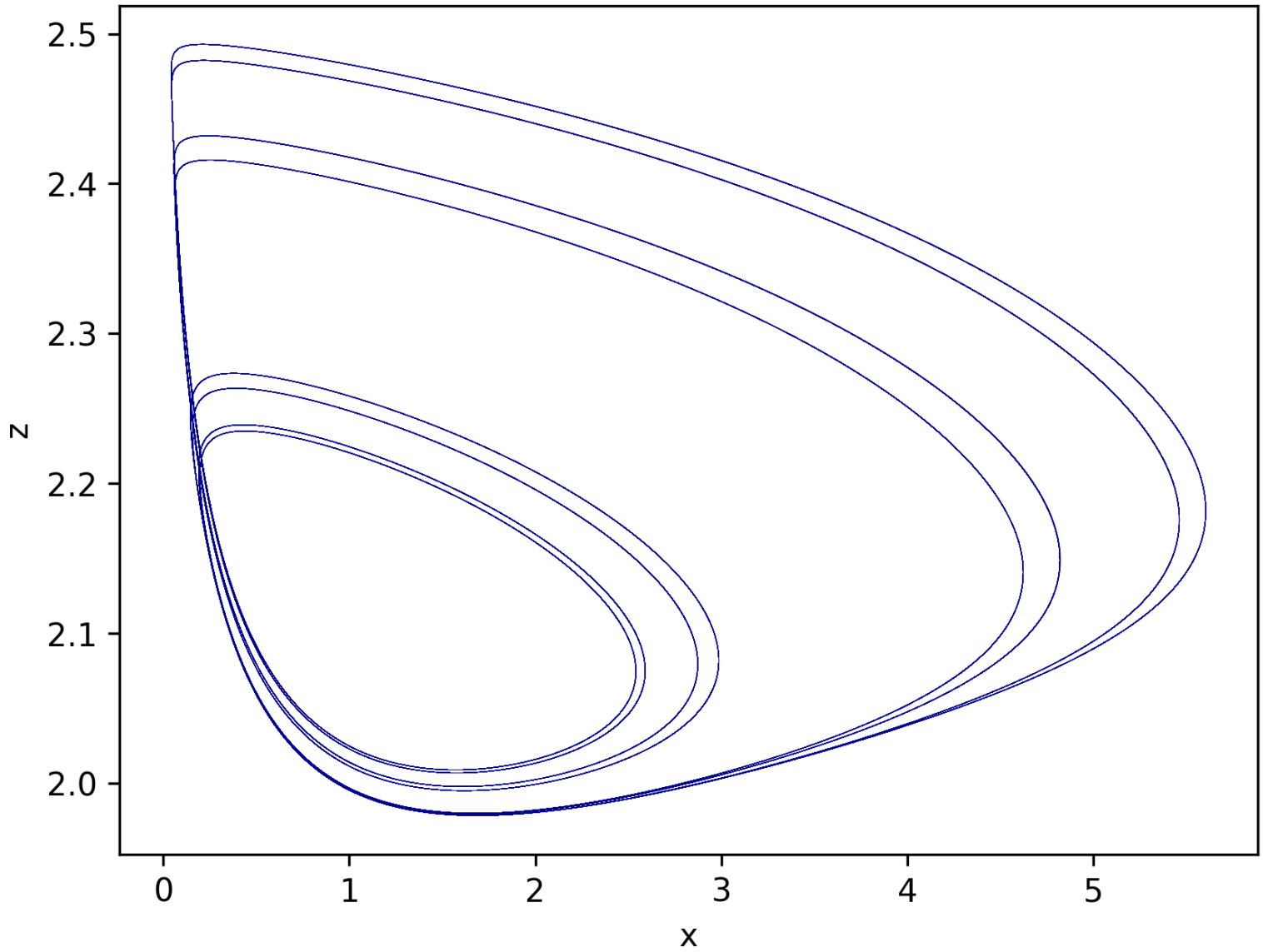



(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.3266, f=0.2 IV=[1.13884, 1.12649, 1.98799]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98333) End=[1.53284, 0.97561, 2.0084] Time=3000.0 Step=0.004
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2.0
z
0
1
2
3
4
5
x

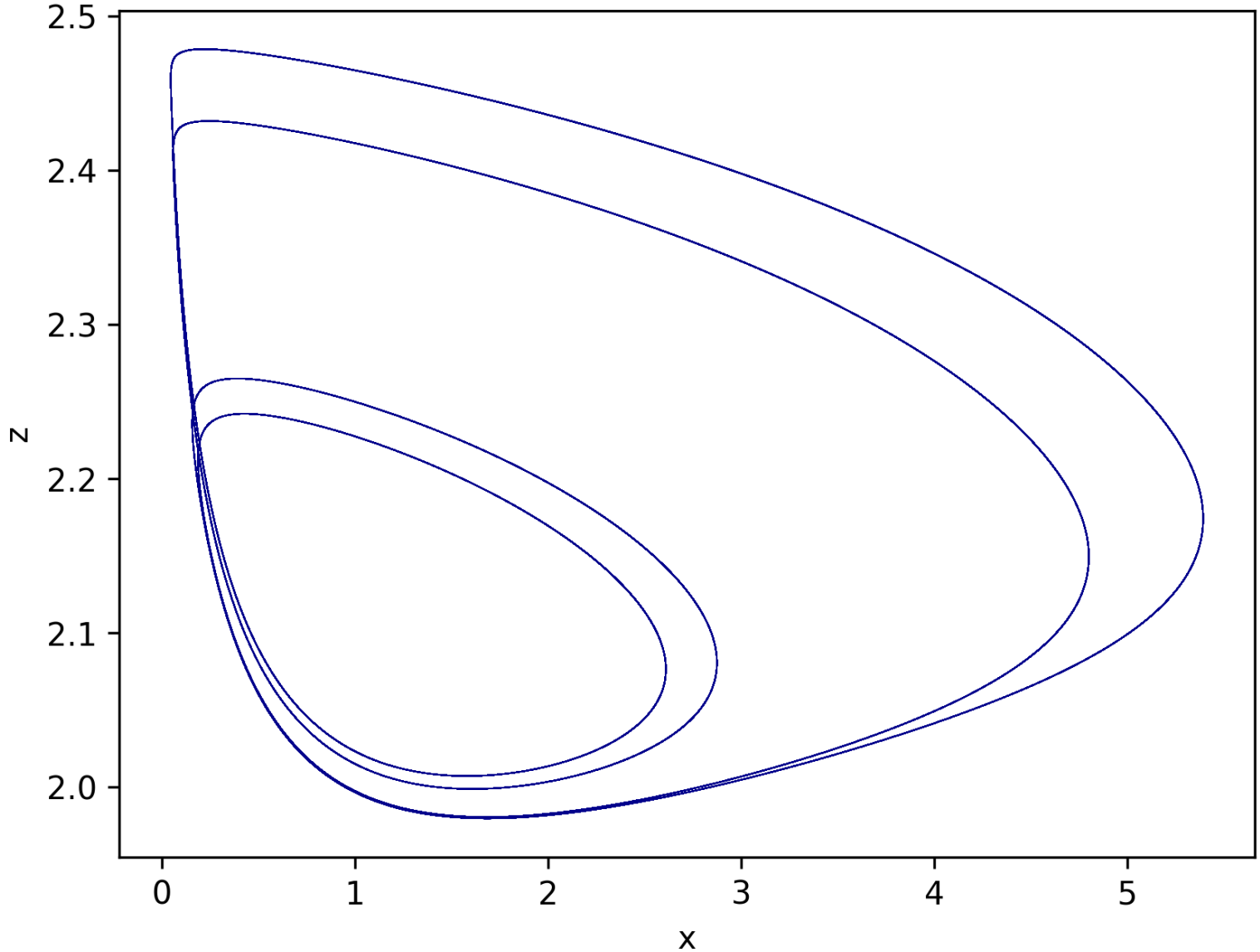
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.3267, f=0.2   IV=[0.94893, 1.2621, 1.99838]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98348)   End=[1.88287, 0.89034, 2.01228]   Time=3000.0   Step=0.004



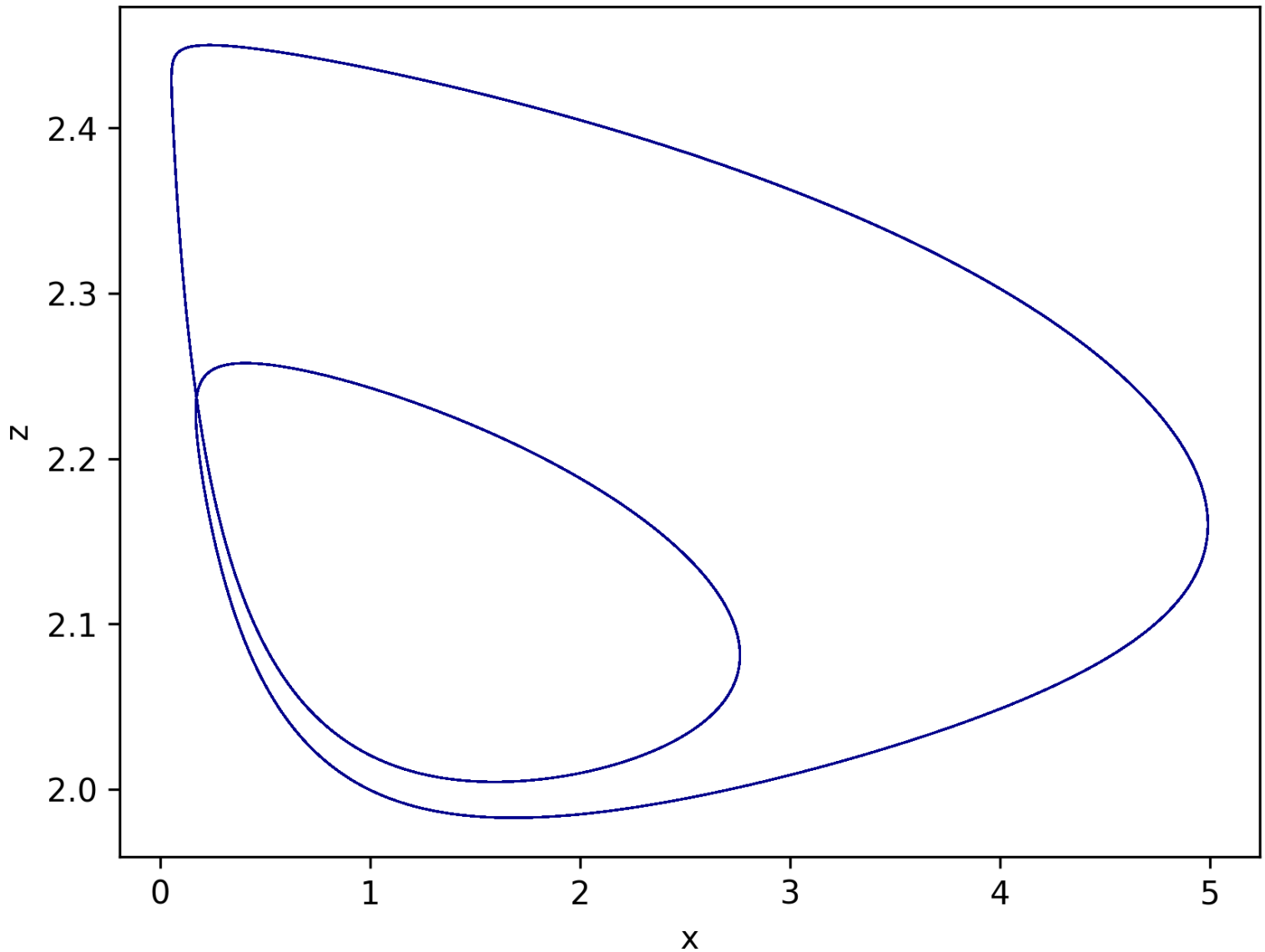
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.327, f=0.2   IV=[0.31883, 2.5121, 2.13867]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98393)   End=[1.68705, 0.92776, 2.00731]   Time=2000.0   Step=0.004



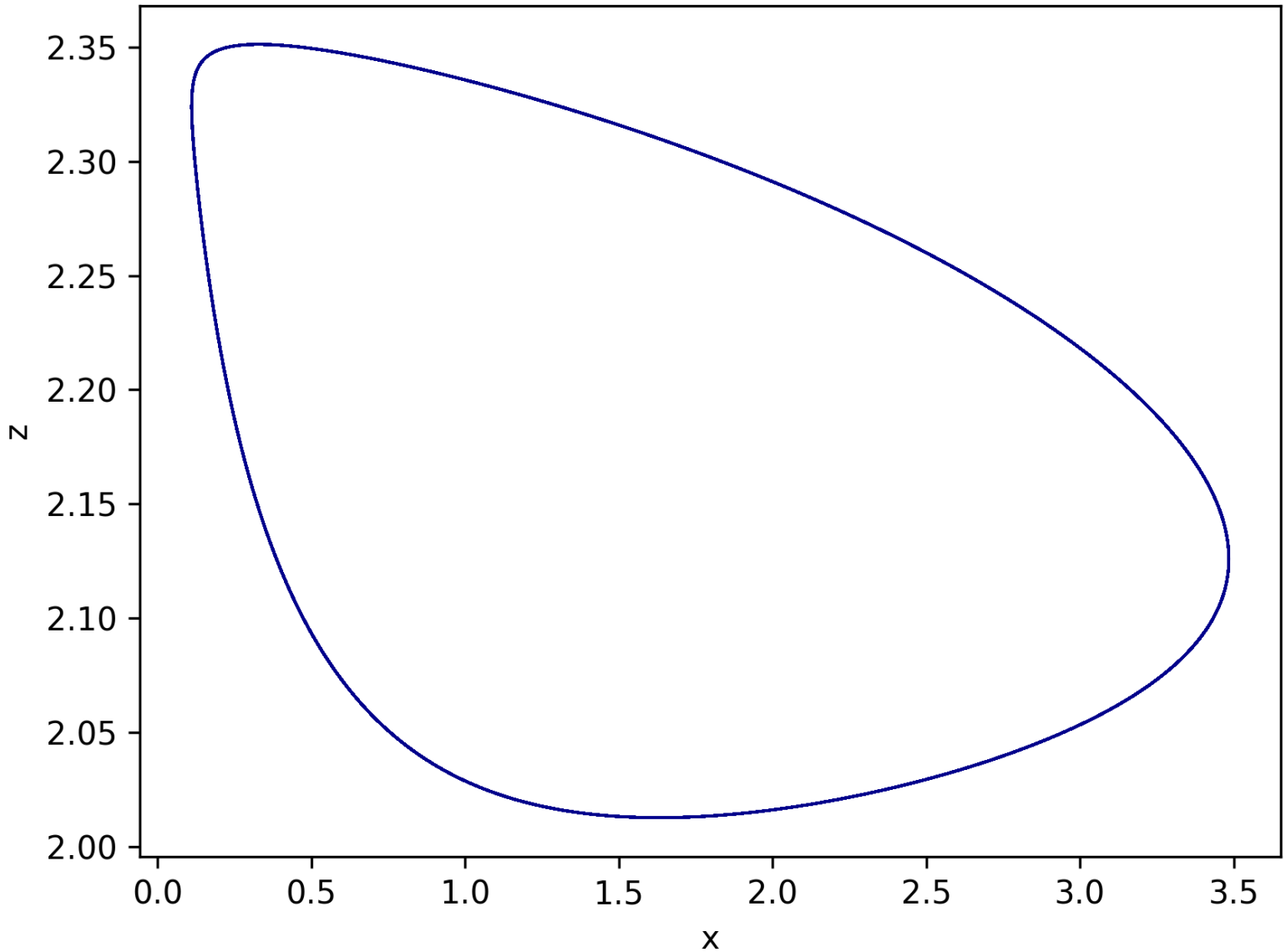
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.328, f=0.2   IV=[2.70378, 0.67309, 1.99779]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98542)   End=[2.42829, 0.86895, 2.03684]   Time=2000.0   Step=0.004

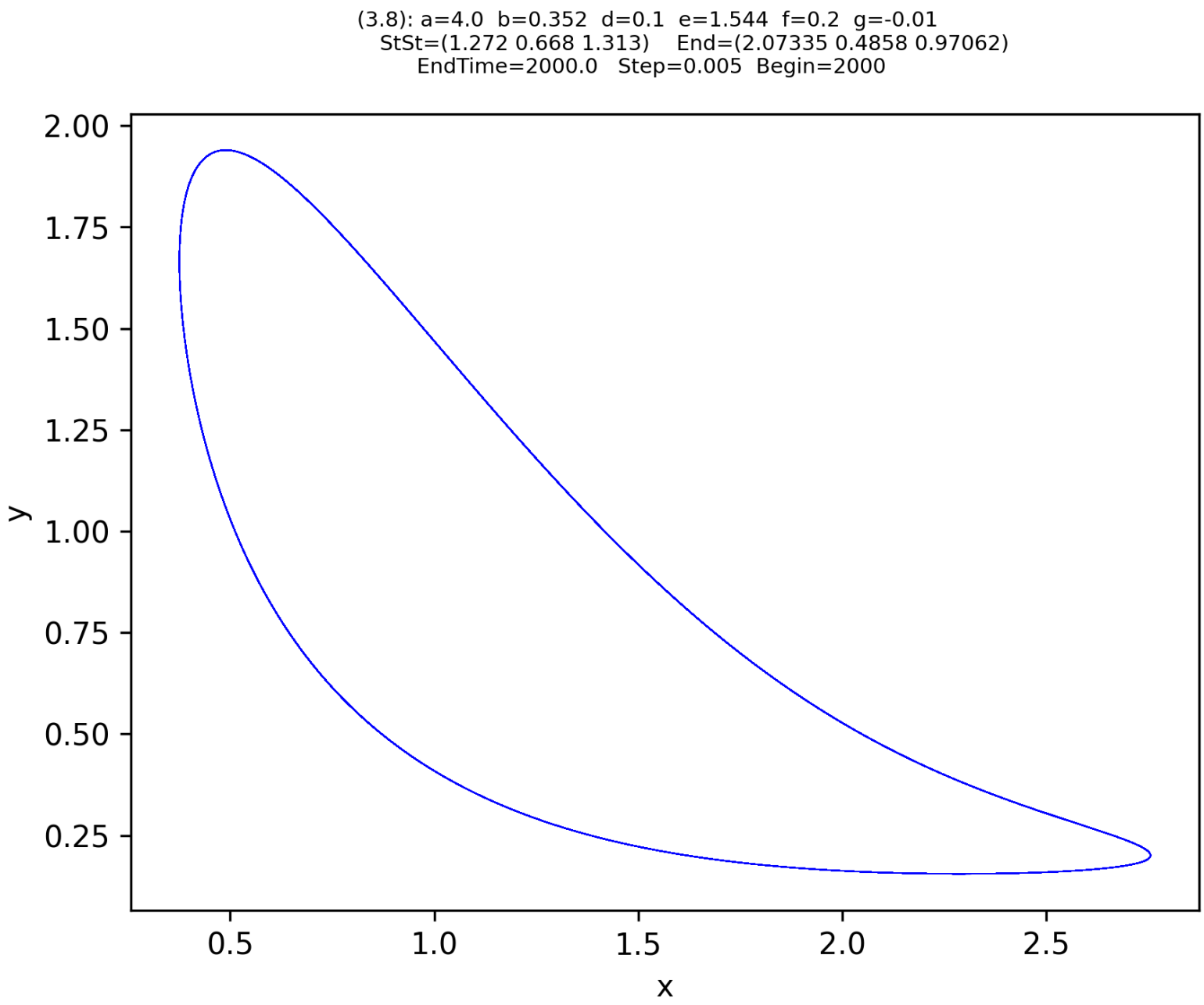


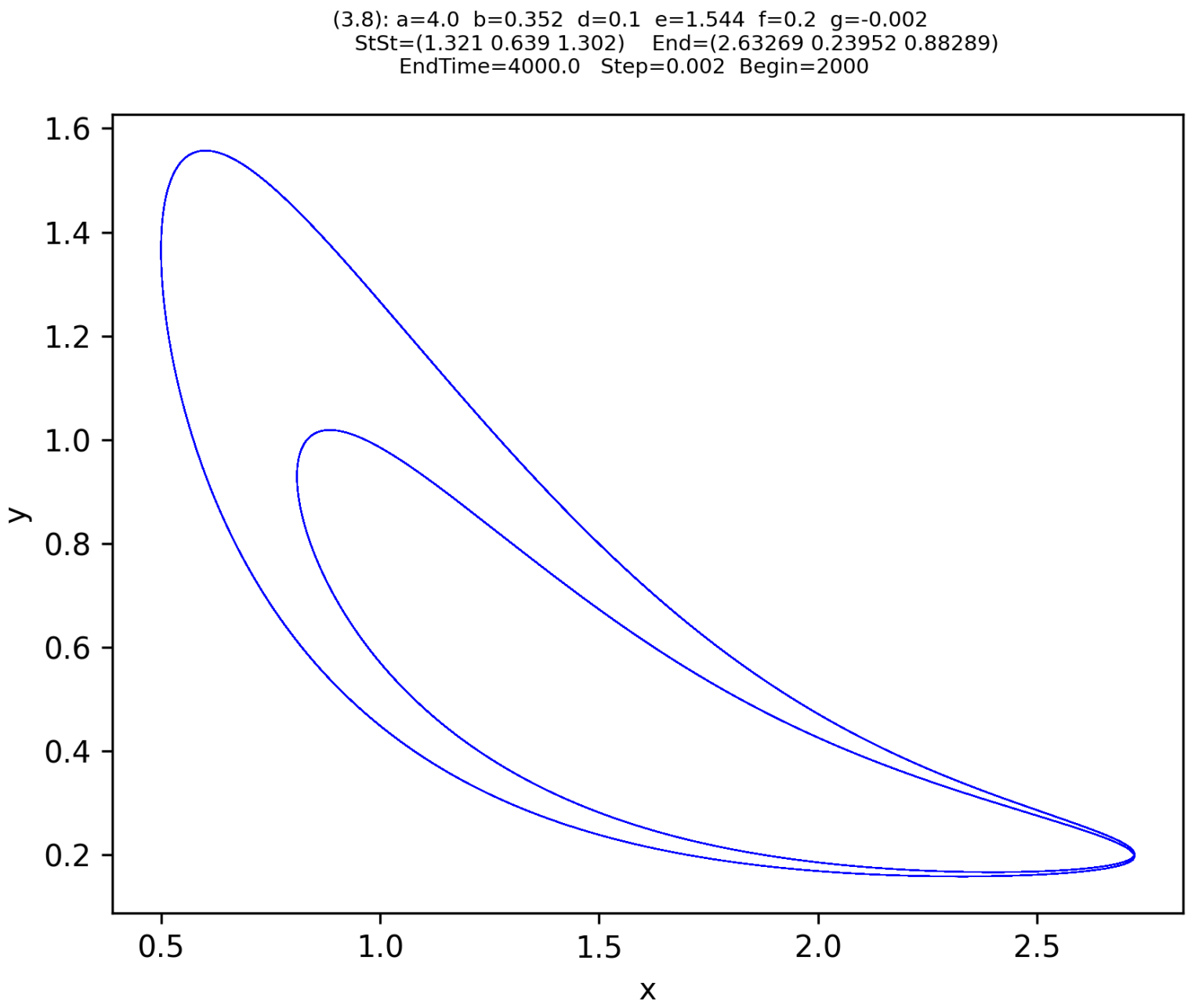
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.33, f=0.2 IV=[0.06257, 6.67221, 2.39945]
StSt=(0.97384, 1.53521, 1.98841) End=[1.66637, 0.92367, 2.00449] Time=2000.0 Step=0.004

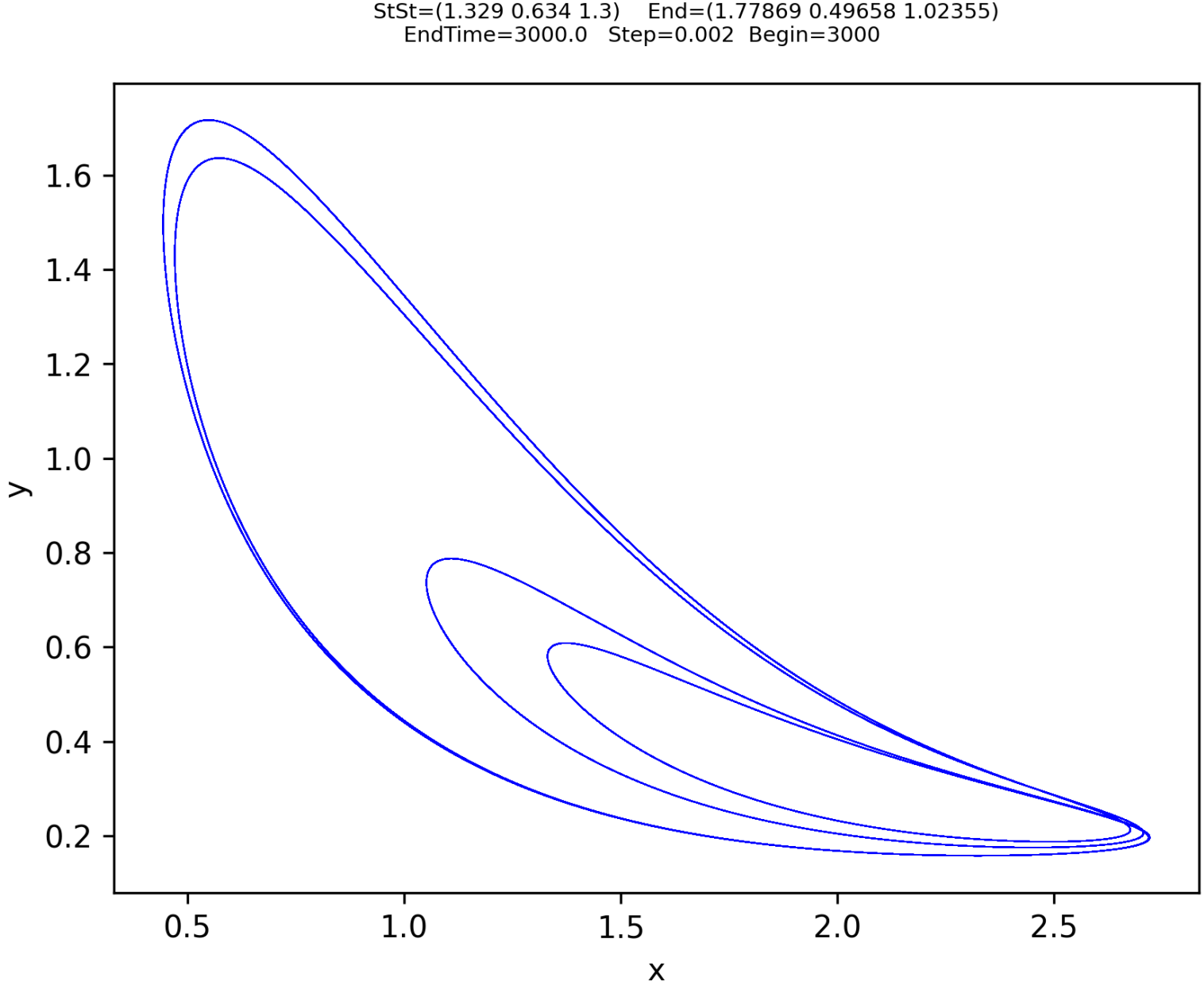


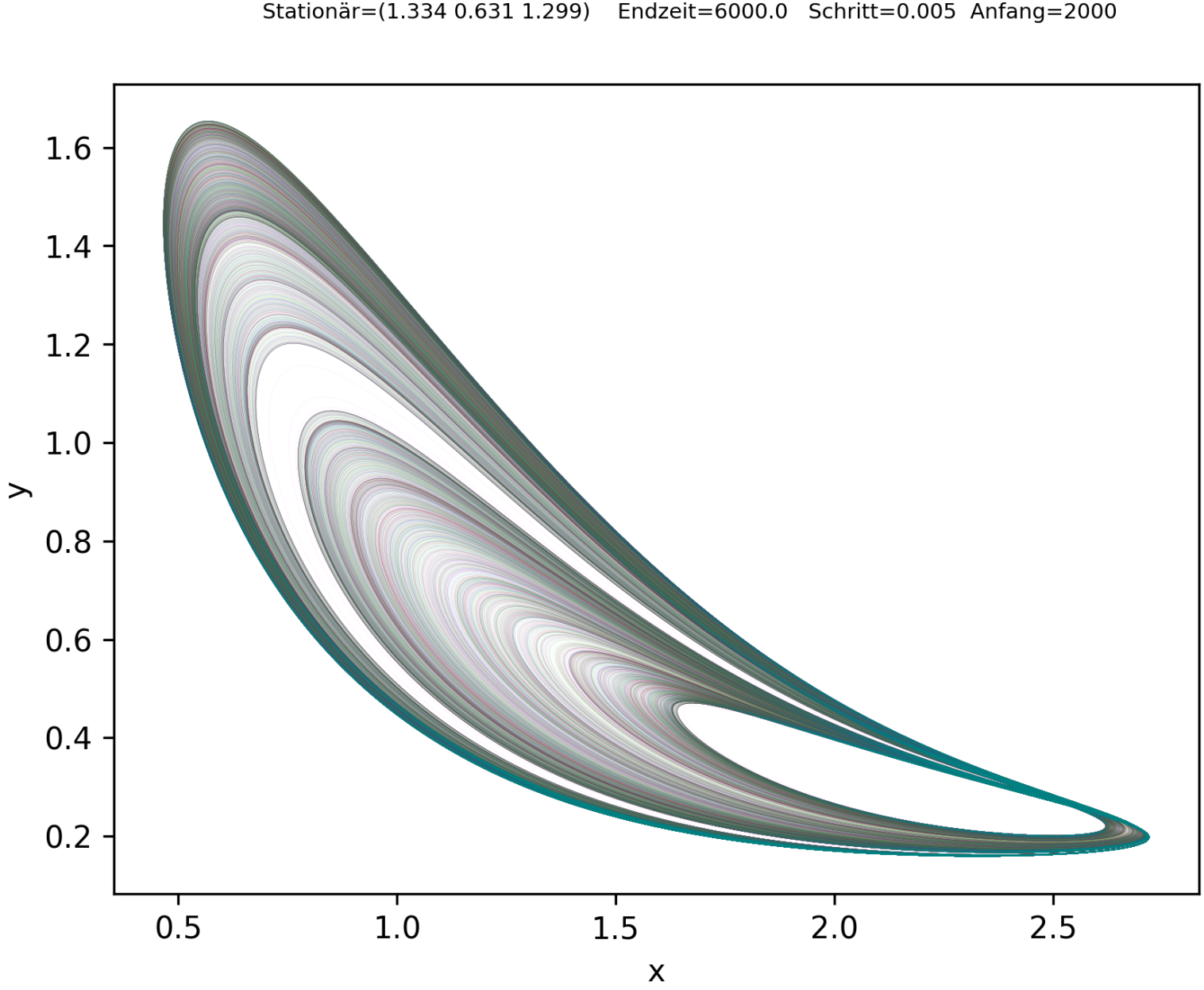
(3.9): a=1.89, b=-1.33, d=-0.76, e=1.35, f=0.2 IV=[1.56184, 0.93761, 2.01293]
StSt=(0.97384, 1.53521, 2.01831) End=[0.26856, 2.79138, 2.1769] Time=1000.0 Step=0.004

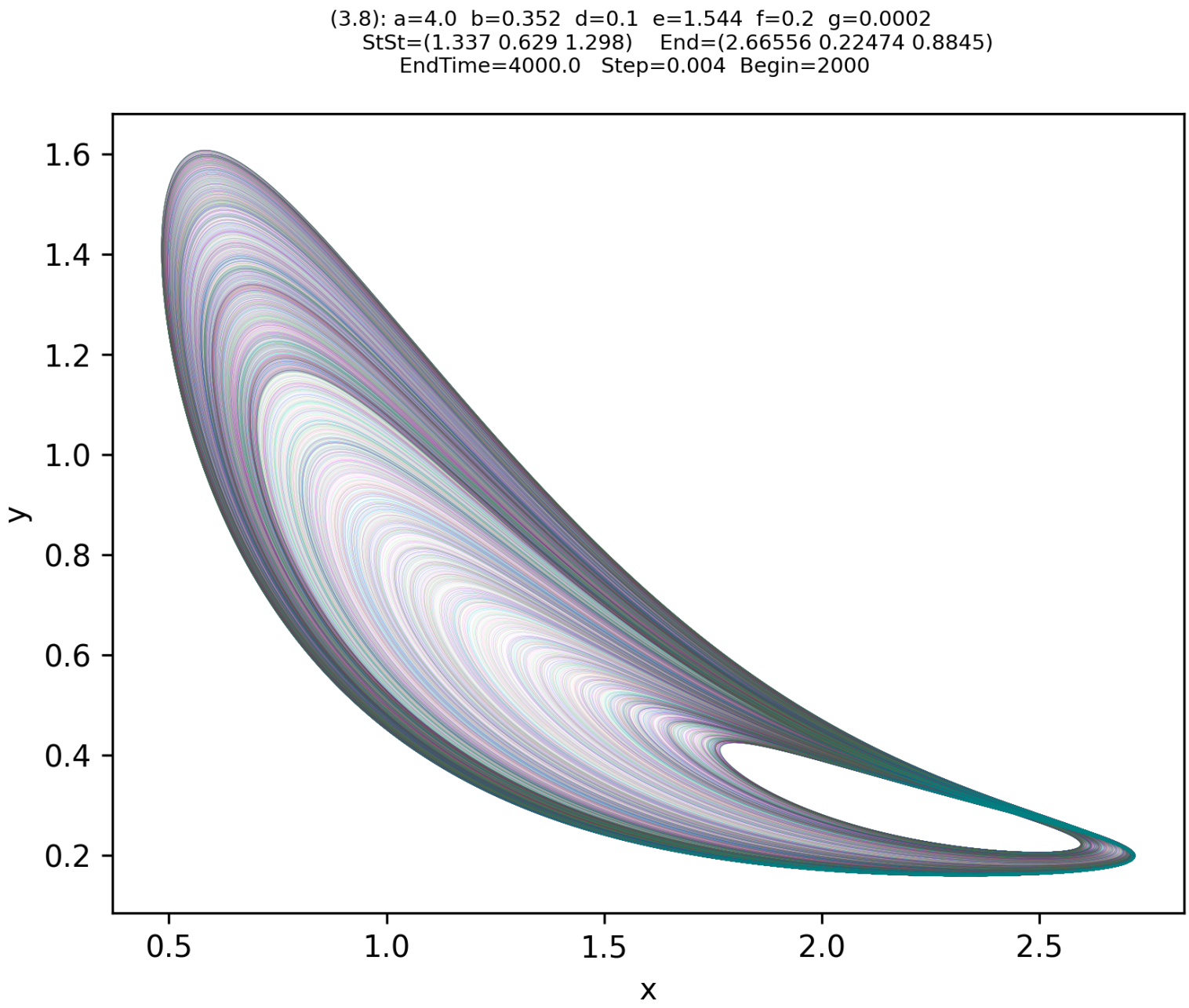


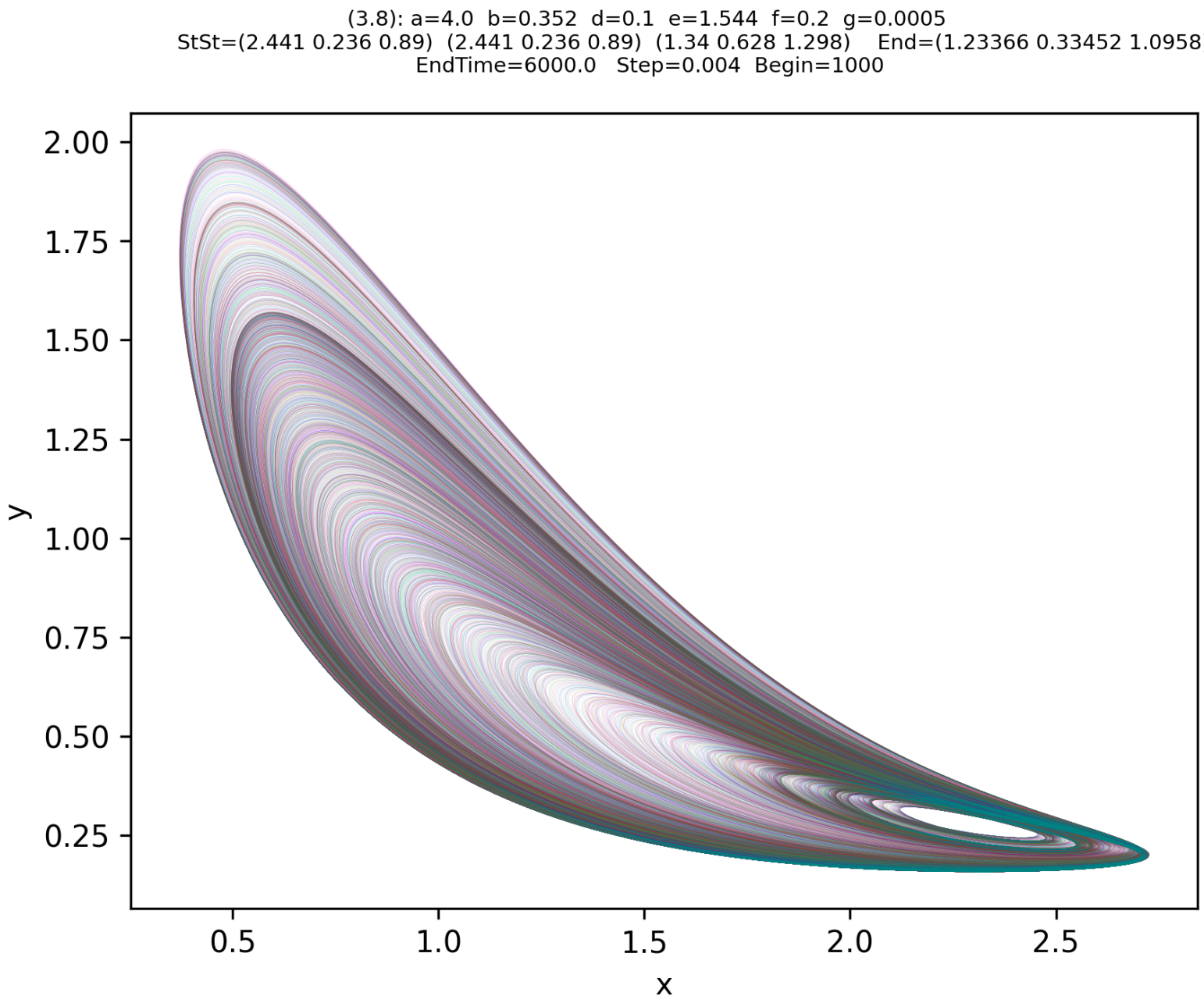

(3.8): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2 g=-0.01
StSt=(1.272 0.668 1.313) End=(2.07335 0.4858 0.97062)
EndTime=2000.0 Step=0.005 Begin=2000
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x


(3.8): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2 g=-0.002
StSt=(1.321 0.639 1.302) End=(2.63269 0.23952 0.88289)
EndTime=4000.0 Step=0.002 Begin=2000
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

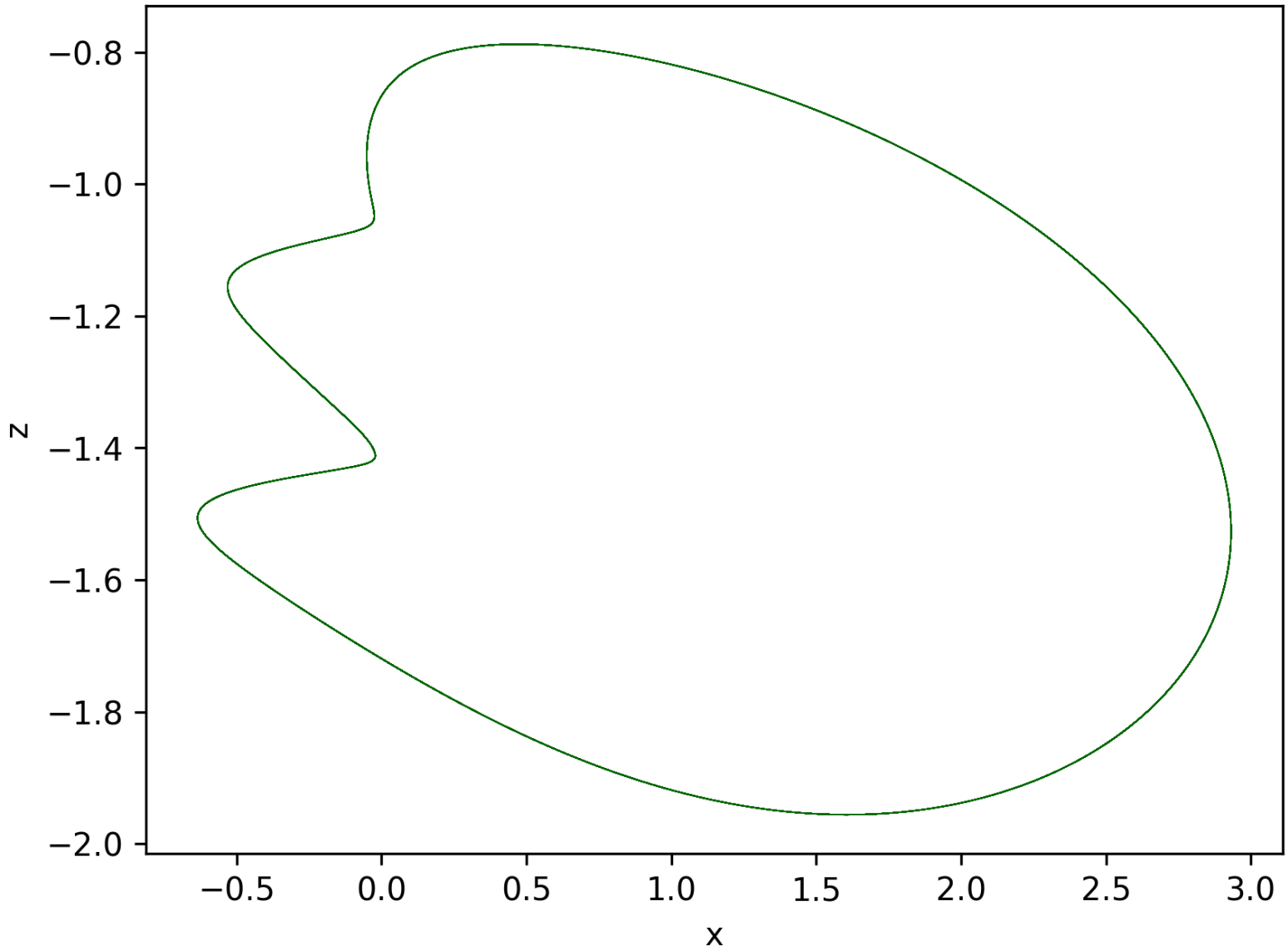

(3.8): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2 g=-0.0008
StSt=(1.329 0.634 1.3) End=(1.77869 0.49658 1.02355)
EndTime=3000.0 Step=0.002 Begin=3000
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

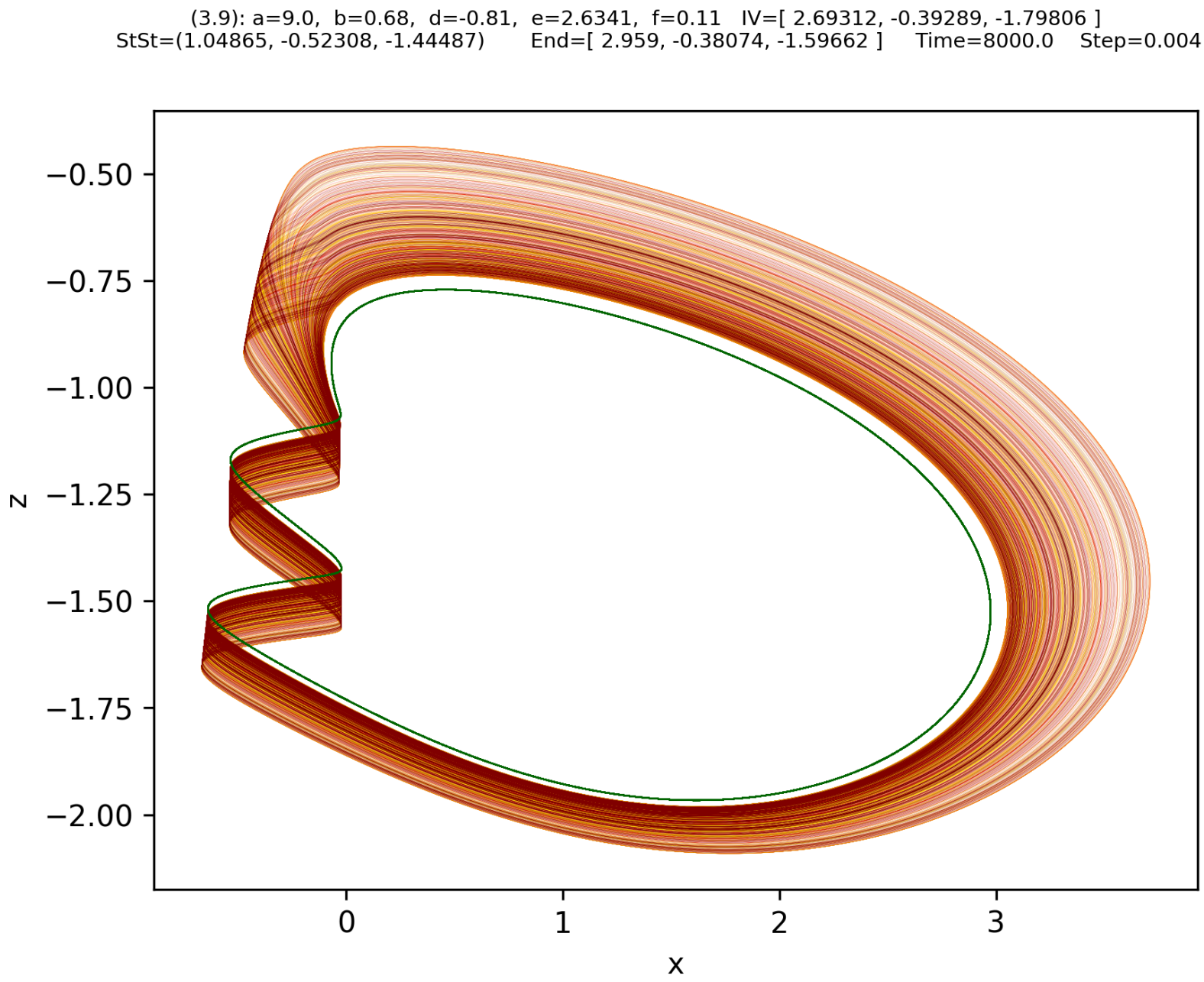

(3.8): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2 g=-0.0002
Stationär=(1.334 0.631 1.299) Endzeit=6000.0 Schritt=0.005 Anfang=2000
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

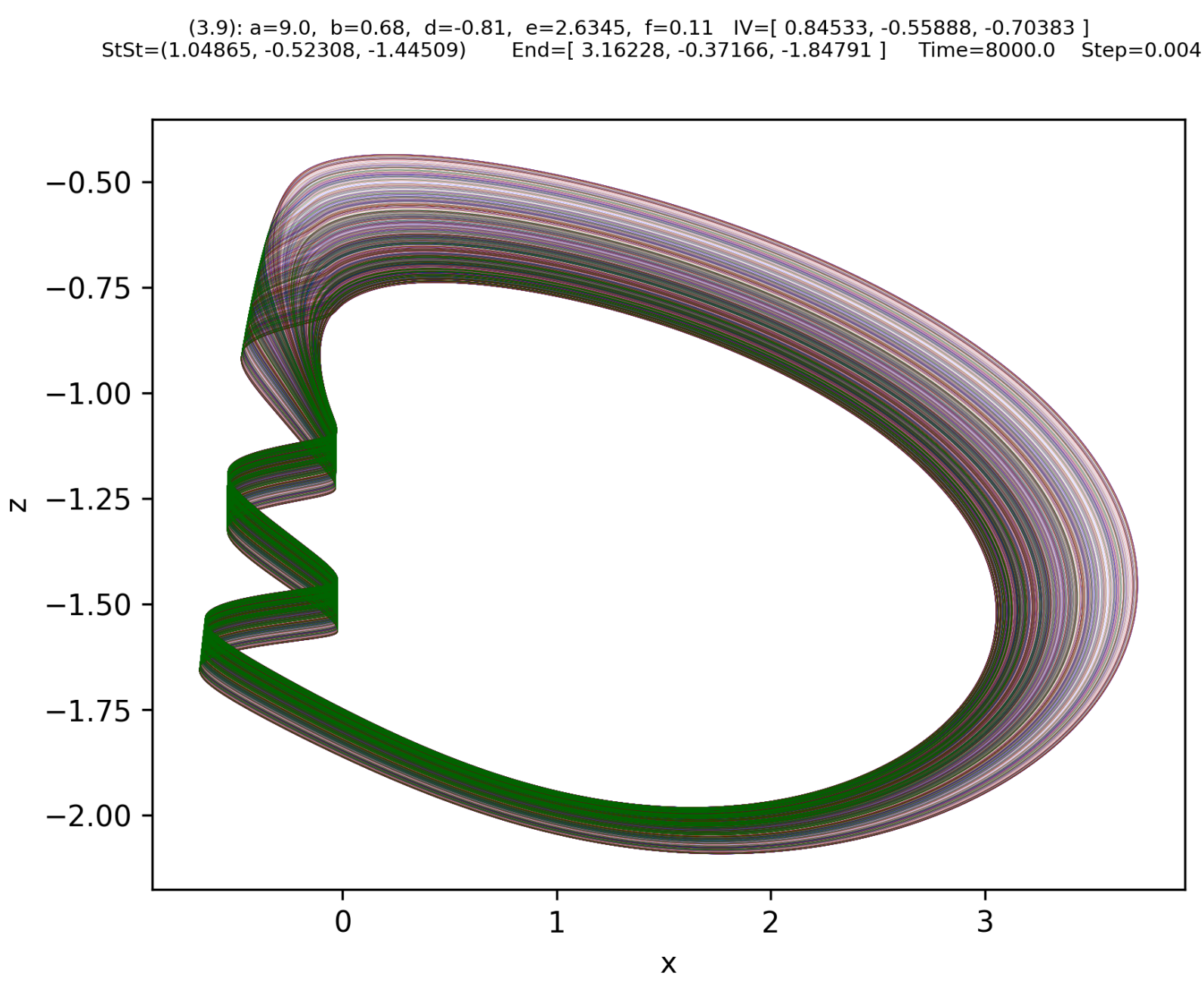

(3.8): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2 g=0.0002
StSt=(1.337 0.629 1.298) End=(2.66556 0.22474 0.8845)
EndTime=4000.0 Step=0.004 Begin=2000
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x


(3.8): a=4.0 b=0.352 d=0.1 e=1.544 f=0.2 g=0.0005
StSt=(2.441 0.236 0.89) (2.441 0.236 0.89) (1.34 0.628 1.298) End=(1.23366 0.33452 1.0958)
EndTime=6000.0 Step=0.004 Begin=1000
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

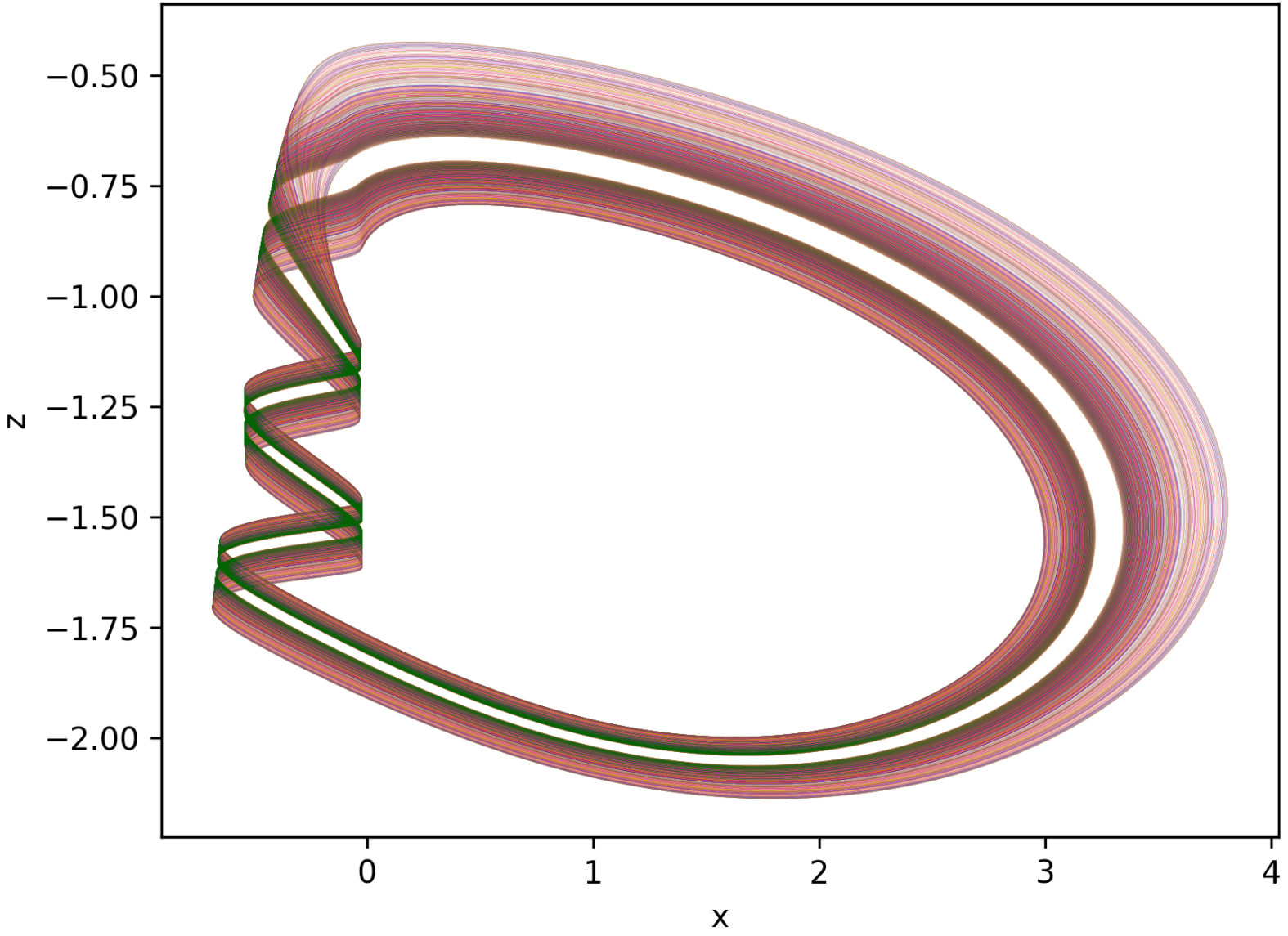
(3.9): a=9.0, b=0.68, d=-0.81, e=2.632, f=0.11   IV=[1.77758, -0.45207, -0.94156]
StSt=(1.04865, -0.52308, -1.44372)   End=[2.35352, -0.41077, -1.8849]   Time=1000.0   Step=0.004

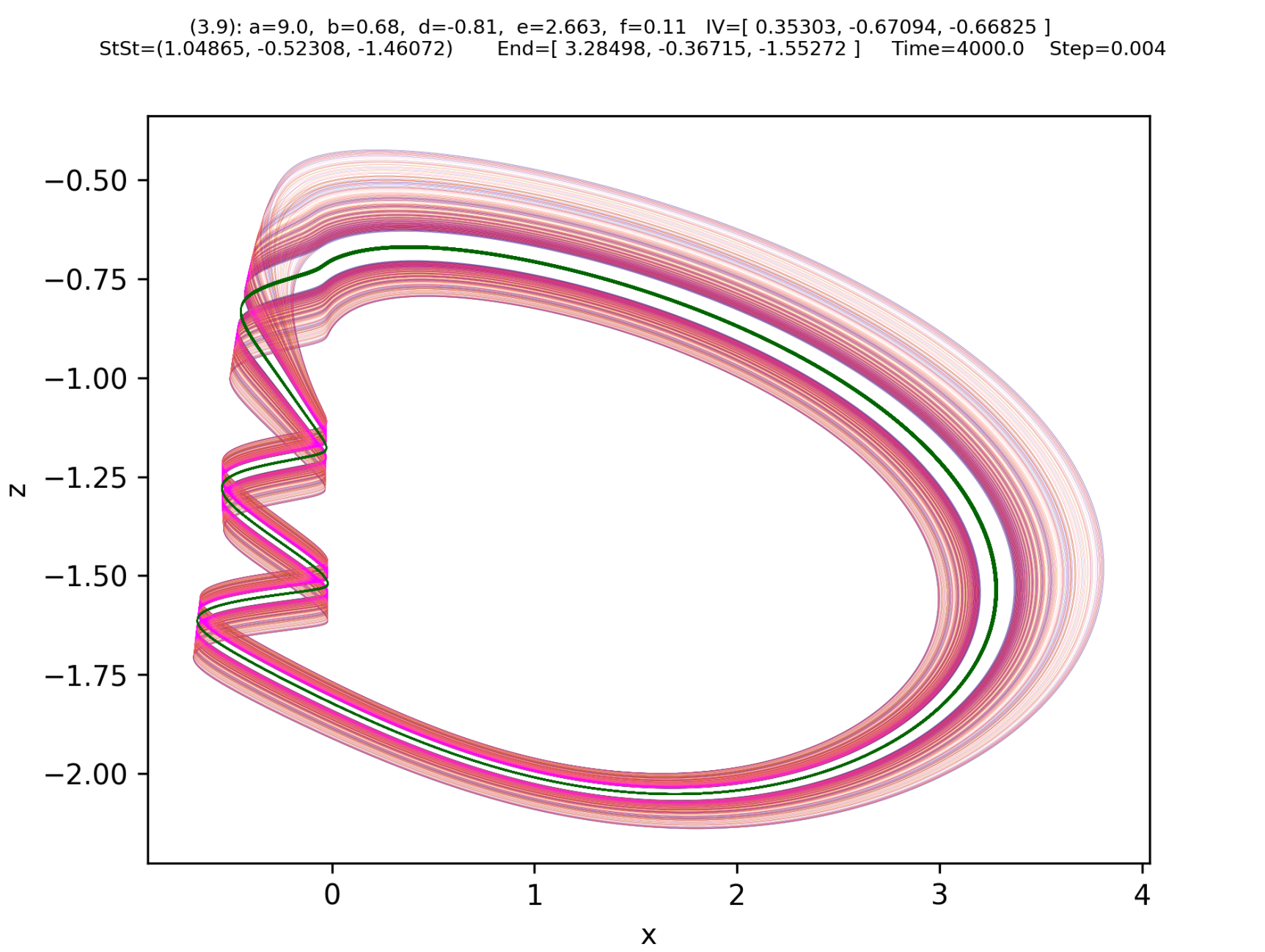



(3.9): a=9.0, b=0.68, d=-0.81, e=2.6341, f=0.11 IV=[2.69312, -0.39289, -1.79806]
StSt=(1.04865, -0.52308, -1.44487) End=[2.959, -0.38074, -1.59662] Time=8000.0 Step=0.004
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
z
0
1
2
3
x

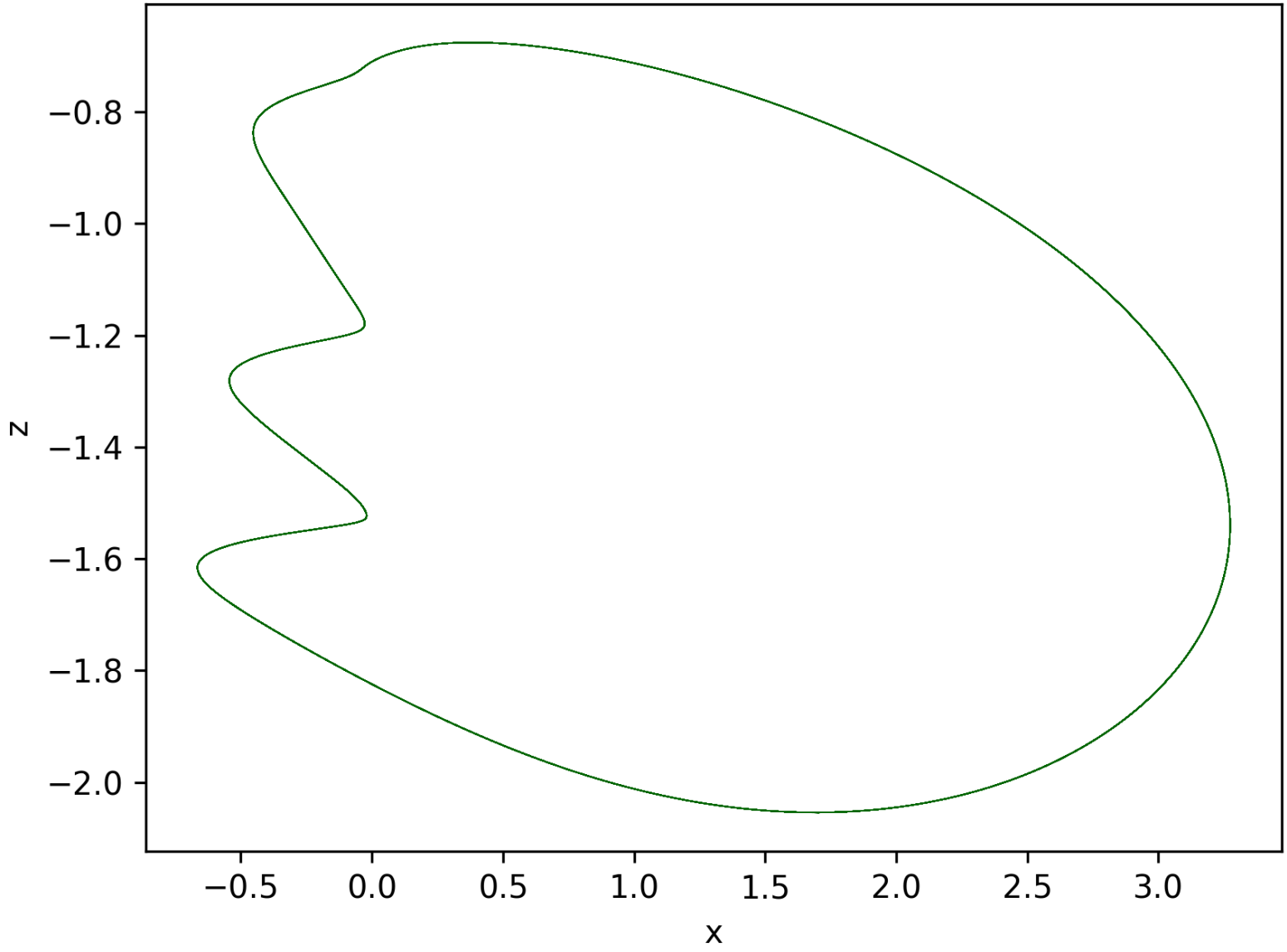

(3.9): a=9.0, b=0.68, d=-0.81, e=2.6345, f=0.11 IV=[0.84533, -0.55888, -0.70383]
StSt=(1.04865, -0.52308, -1.44509) End=[3.16228, -0.37166, -1.84791] Time=8000.0 Step=0.004
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
z
0
1
2
3
x

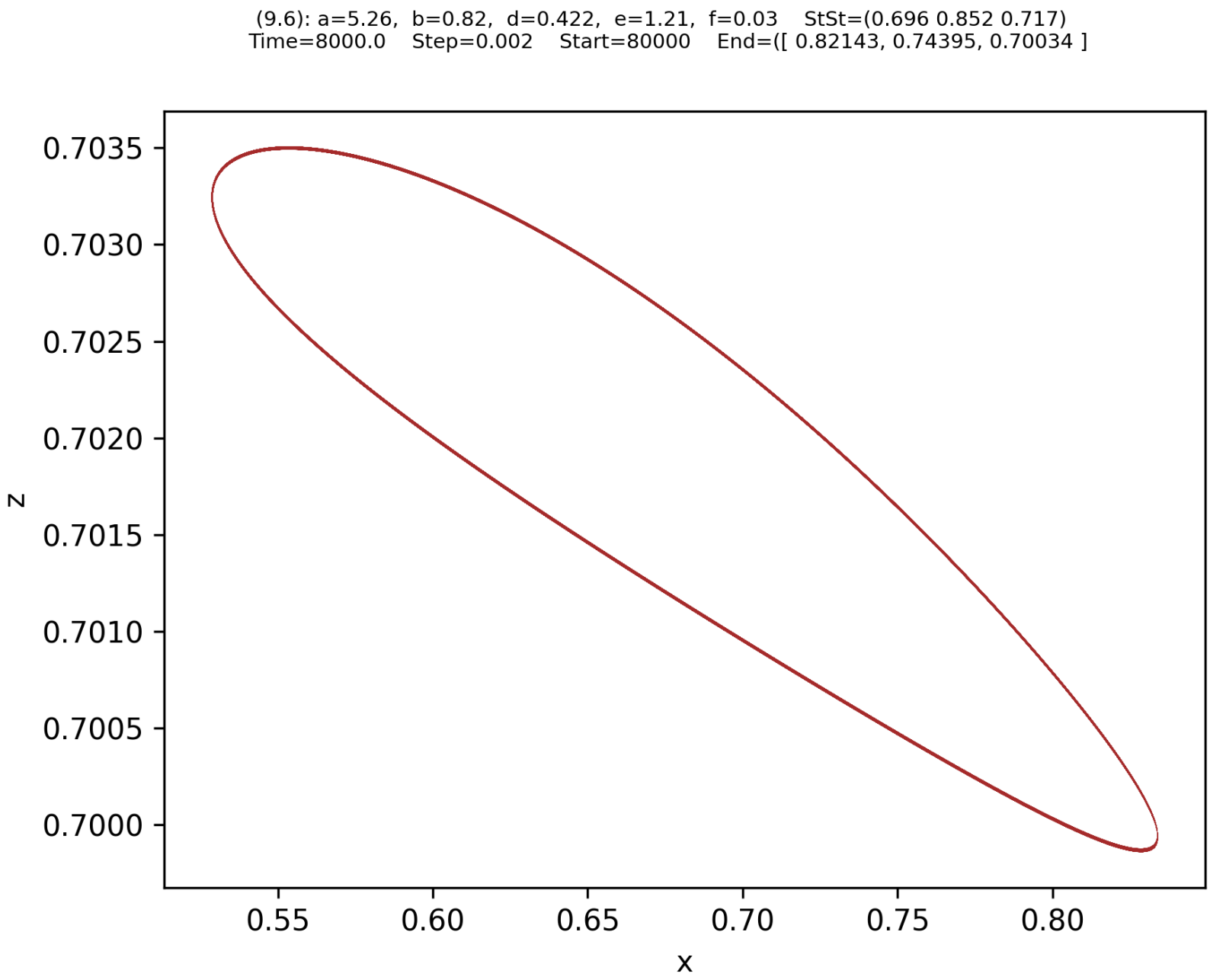
(3.9): a=9.0, b=0.68, d=-0.81, e=2.662, f=0.11   IV=[1.66786, -0.45721, -2.00525]
StSt=(1.04865, -0.52308, -1.46017)   End=[1.95695, -0.43866, -0.92954]   Time=6000.0   Step=0.004

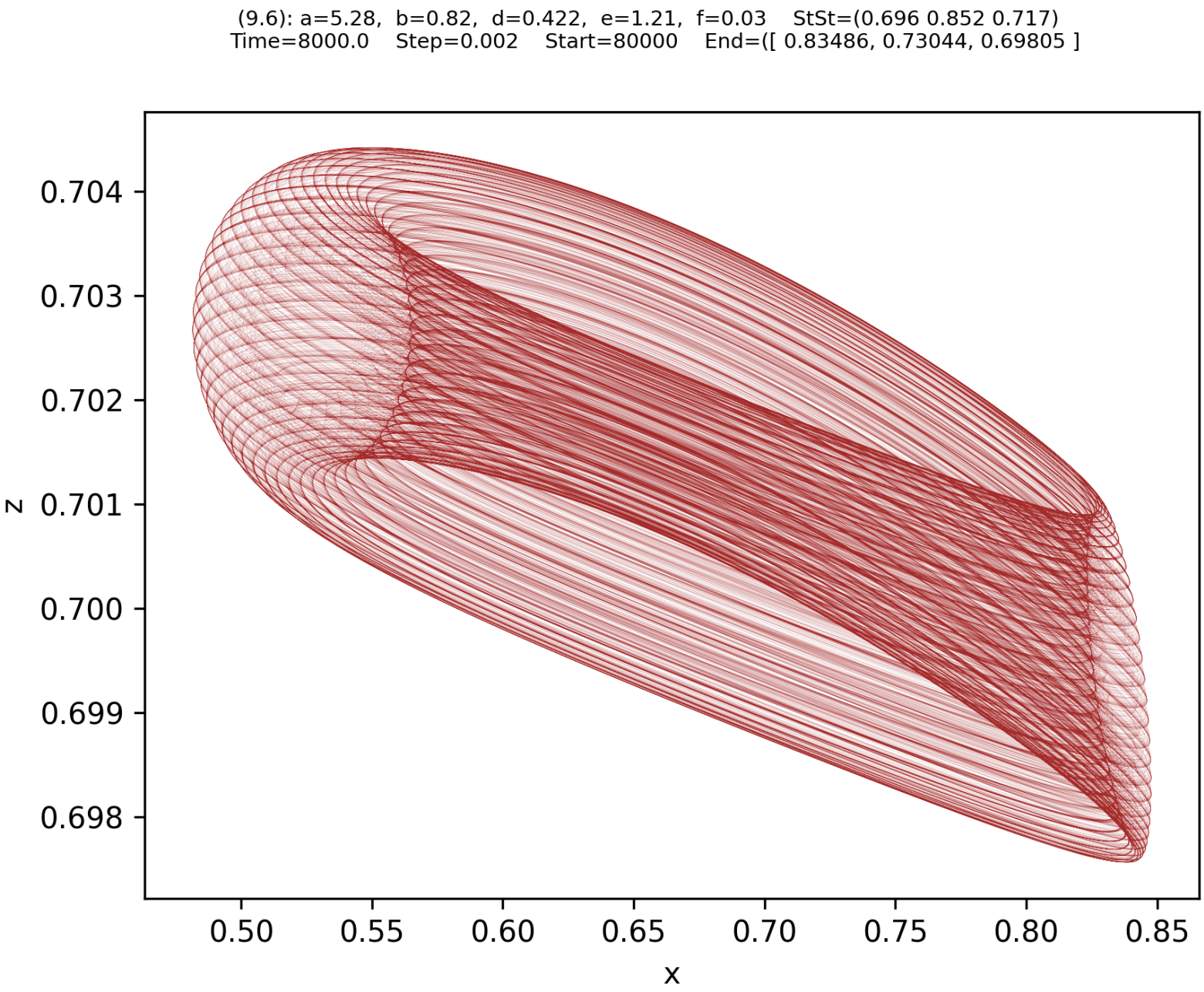



(3.9): a=9.0, b=0.68, d=-0.81, e=2.663, f=0.11 IV=[0.35303, -0.67094, -0.66825]
StSt=(1.04865, -0.52308, -1.46072) End=[3.28498, -0.36715, -1.55272] Time=4000.0 Step=0.004
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
z
0
1
2
3
4
x

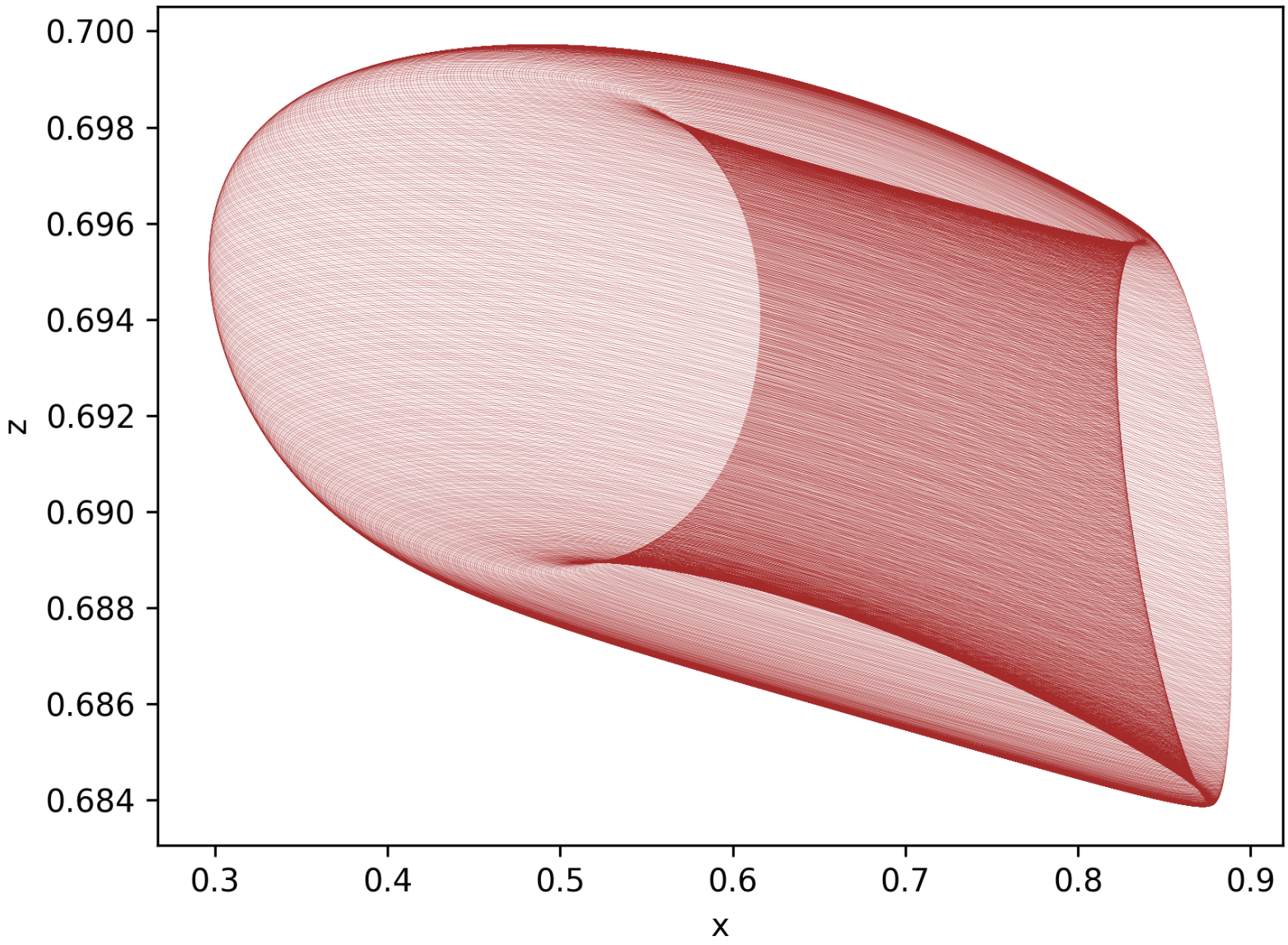
(3.9): a=9.0, b=0.68, d=-0.81, e=2.666, f=0.11   IV=[1.78617, -0.45188, -0.83042]
StSt=(1.04865, -0.52308, -1.46237)   End=[-0.23703, -8.40446, -1.54849]   Time=1000.0   Step=0.004

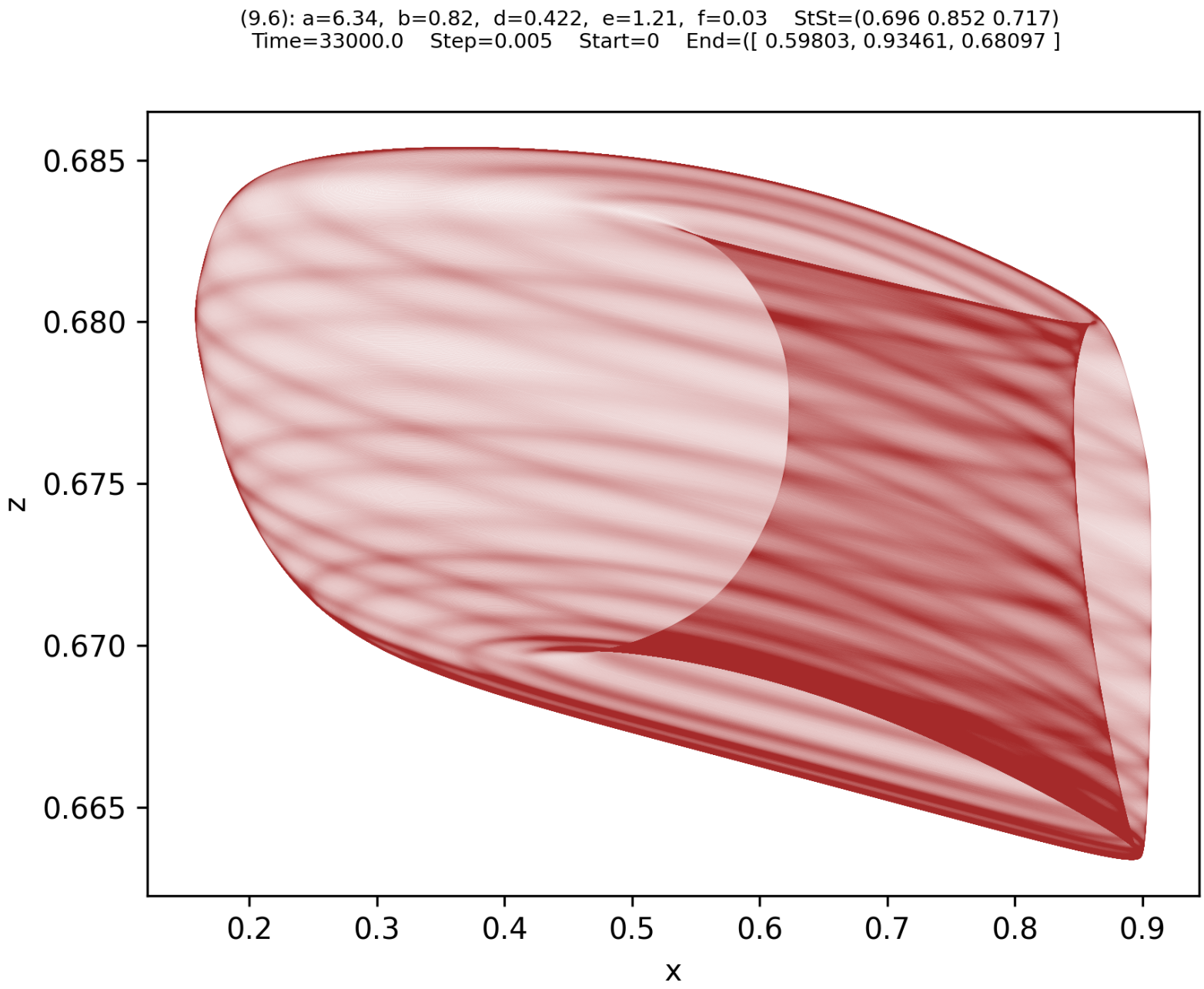


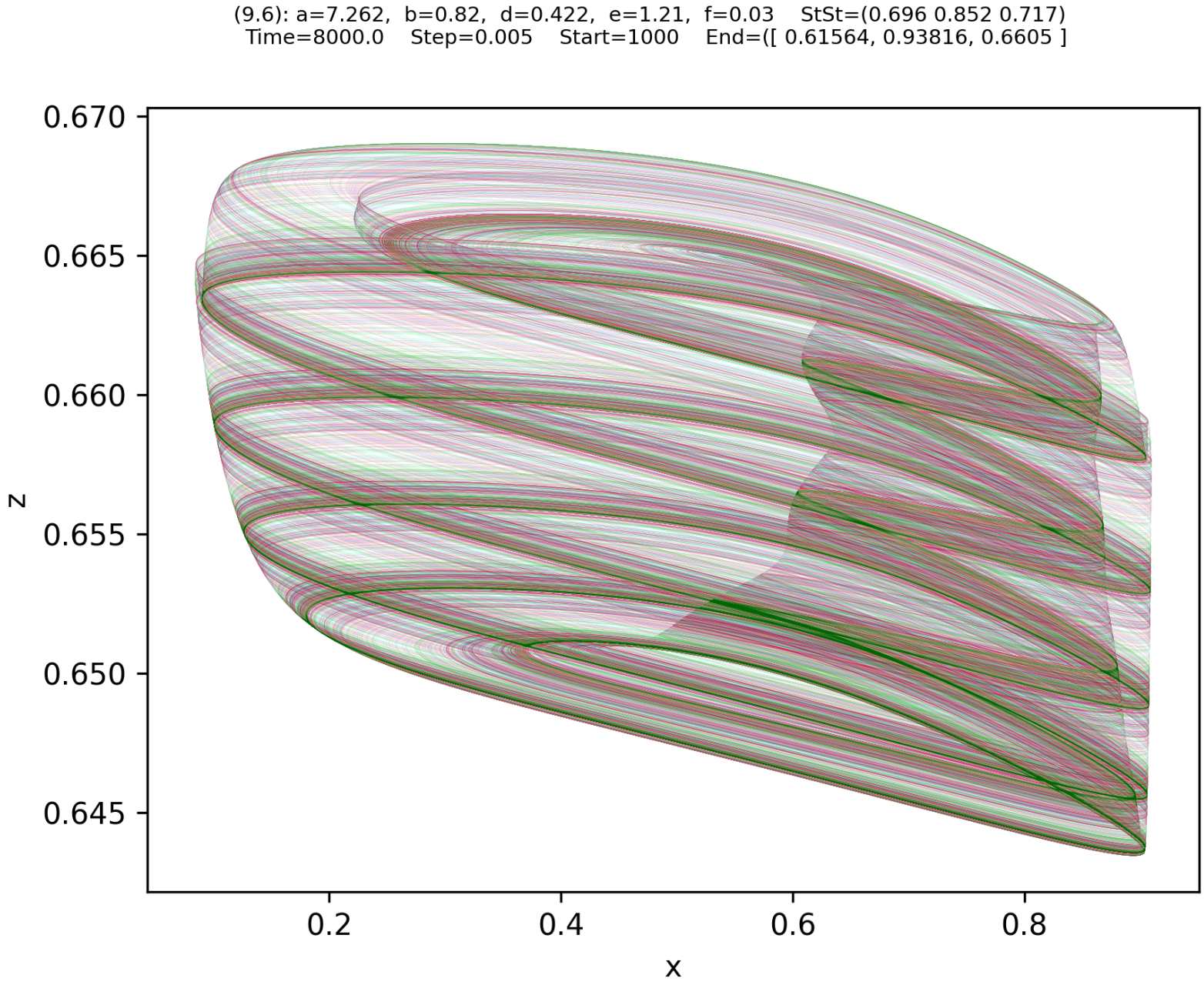

(9.6): a=5.26, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=8000.0 Step=0.002 Start=80000 End=([0.82143, 0.74395, 0.70034]
0.7035
0.7030
0.7025
0.7020
0.7015
0.7010
0.7005
0.7000
z
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
x


(9.6): a=5.28, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=8000.0 Step=0.002 Start=80000 End=([0.83486, 0.73044, 0.69805]
0.704
0.703
0.702
0.701
0.700
0.699
0.698
z
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
x

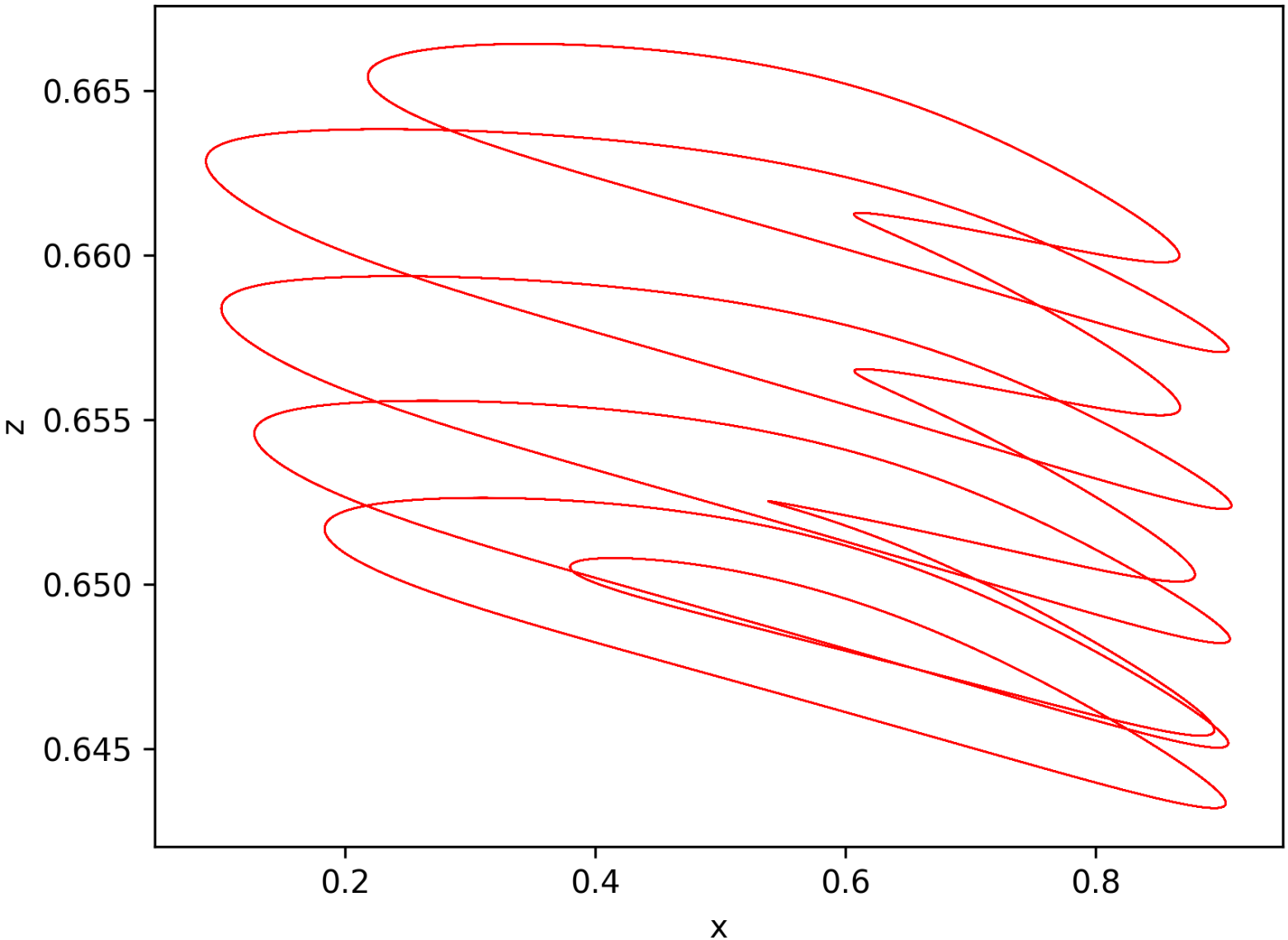
(9.6): a=5.61, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03   StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=8000.0   Step=0.005   Start=0   End=([0.58533, 1.06746, 0.69059]



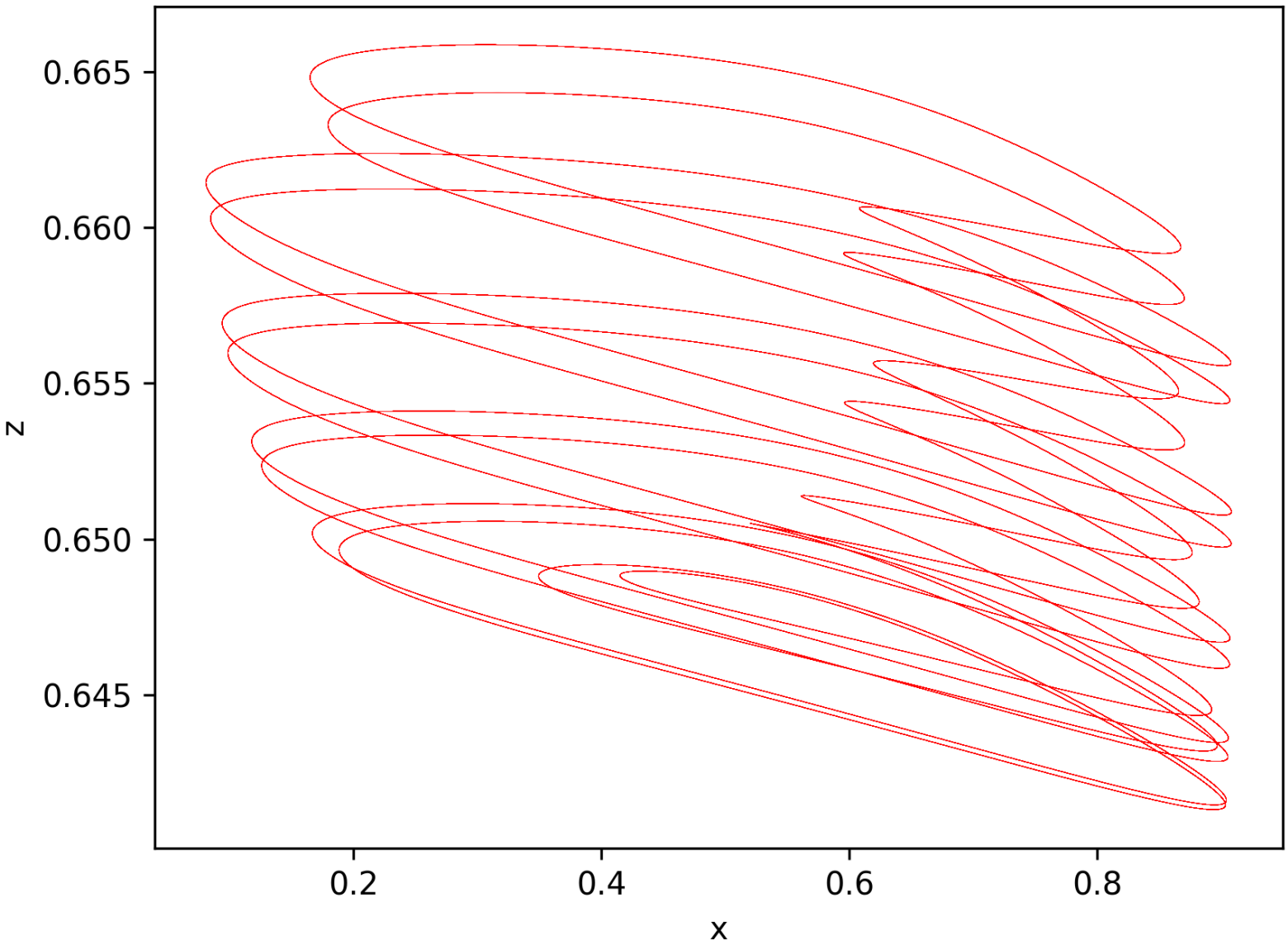

(9.6): a=6.34, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=33000.0 Step=0.005 Start=0 End=([0.59803, 0.93461, 0.68097]
0.685
0.680
0.675
0.670
0.665
z
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
x

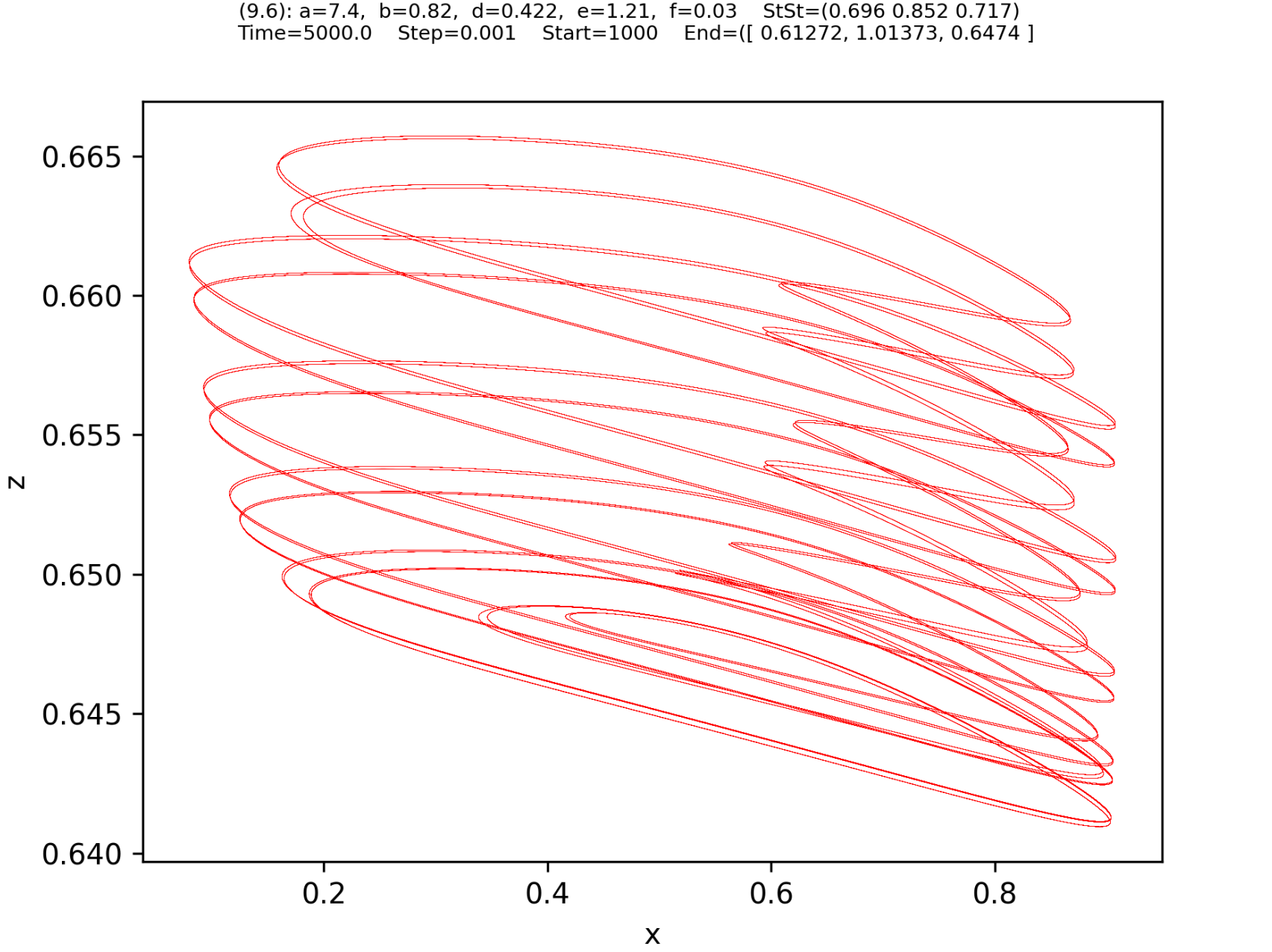

(9.6): a=7.262, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=8000.0 Step=0.005 Start=1000 End=([0.61564, 0.93816, 0.6605]
0.670
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

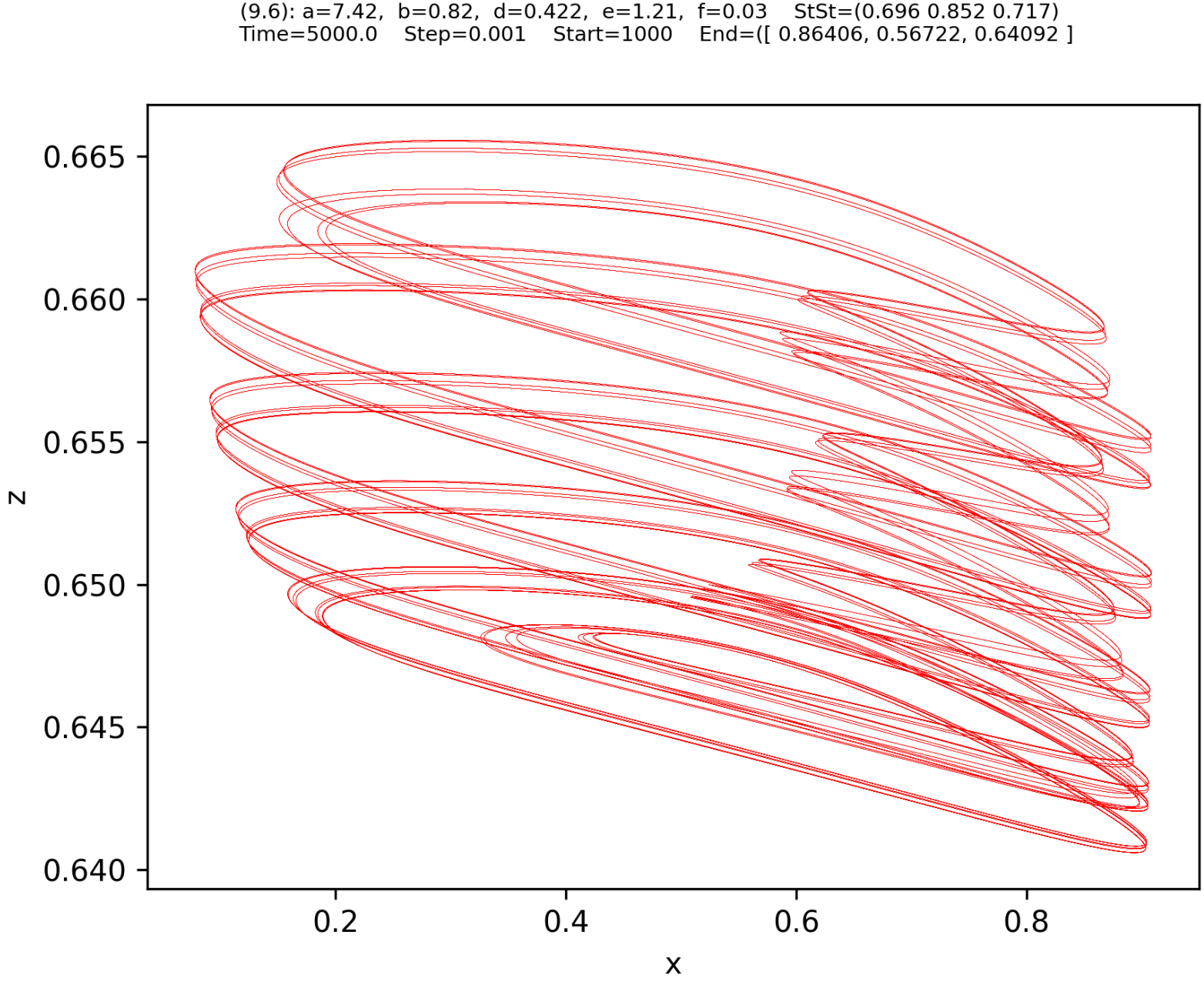
(9.6): a=7.28, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03   StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=2000.0   Step=0.005   Start=1000   End=([0.73616, 0.68036, 0.66051]

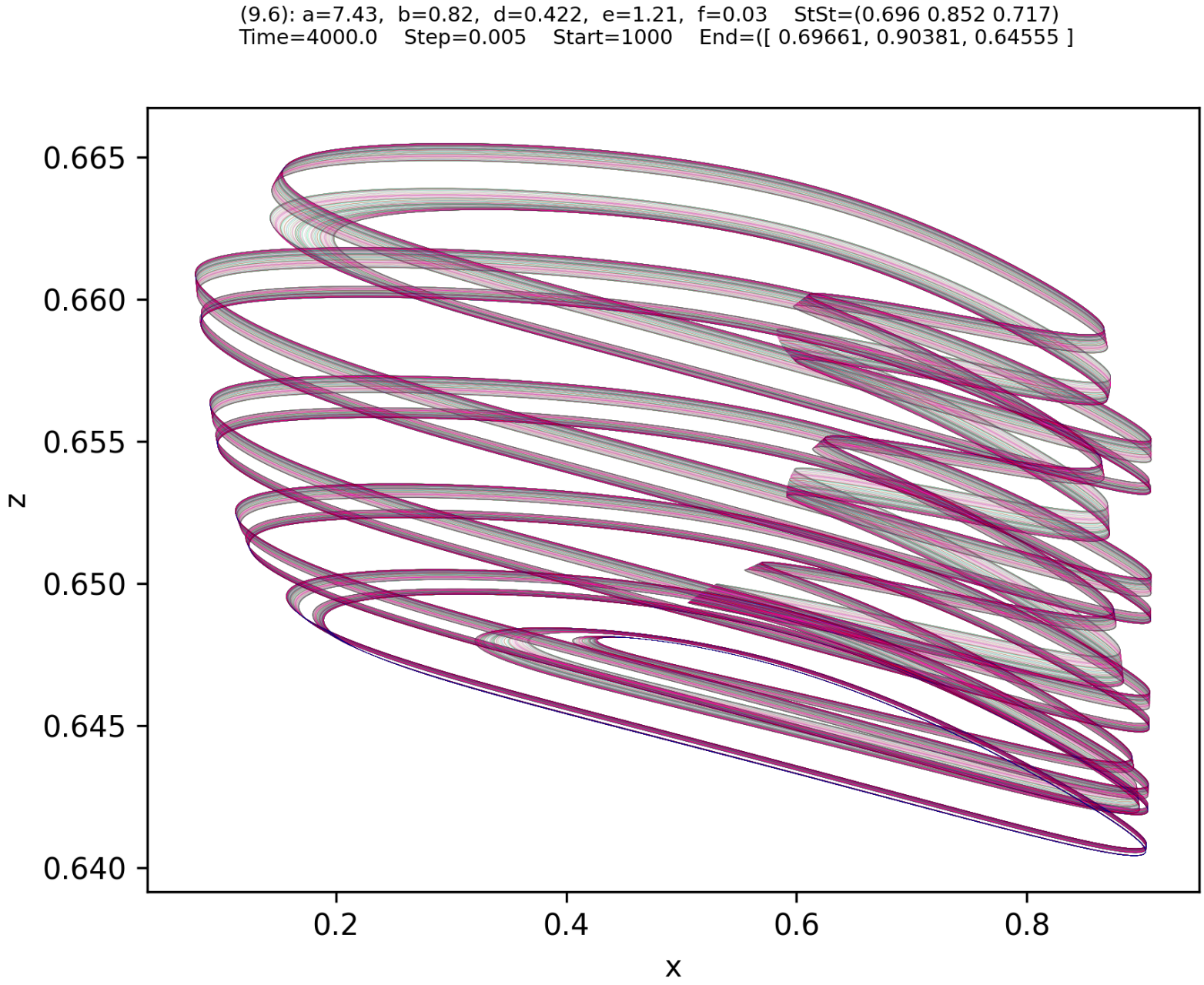


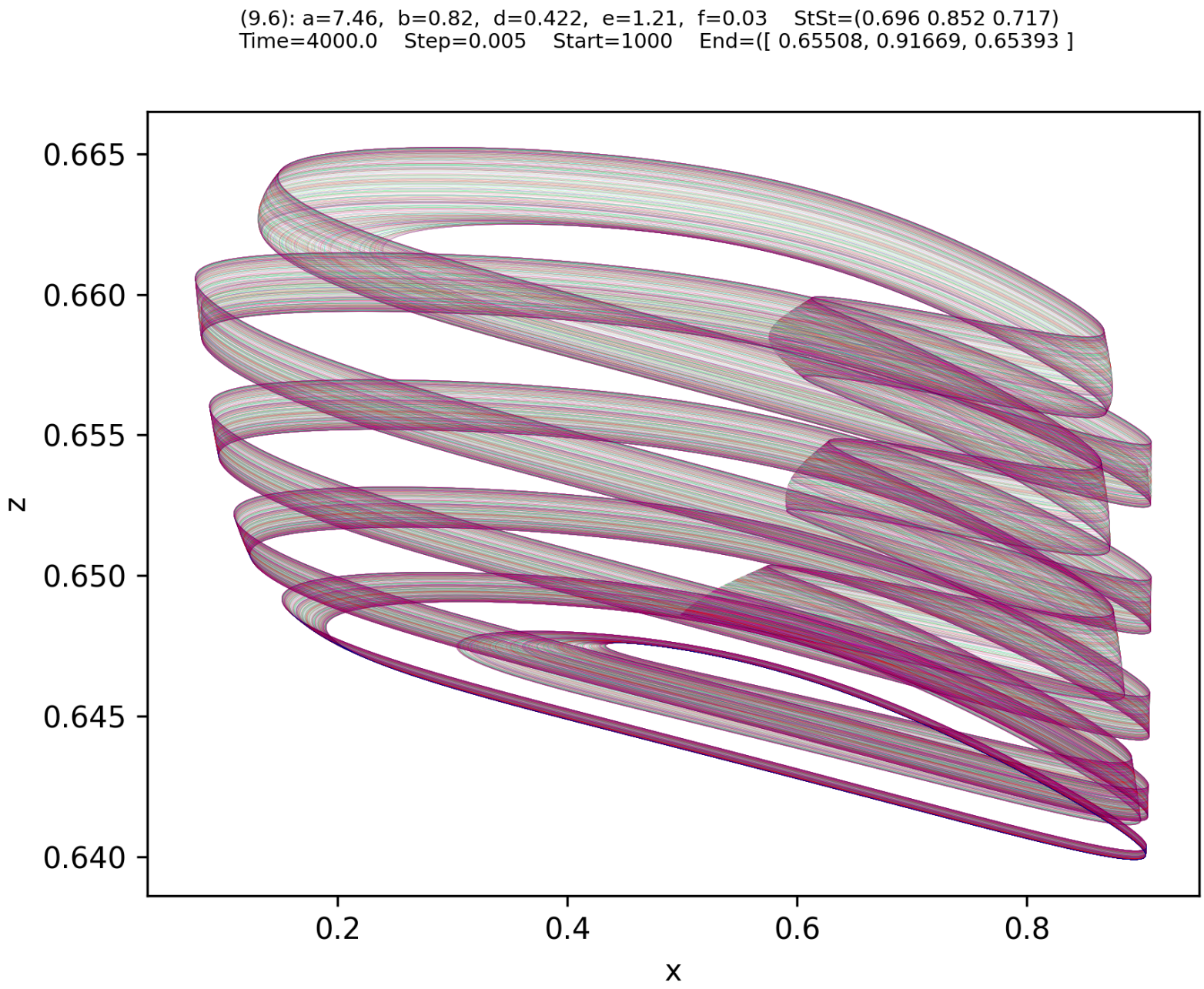
(9.6): a=7.38, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03   StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0   Step=0.001   Start=1000   End=([0.88638, 0.58431, 0.64132]

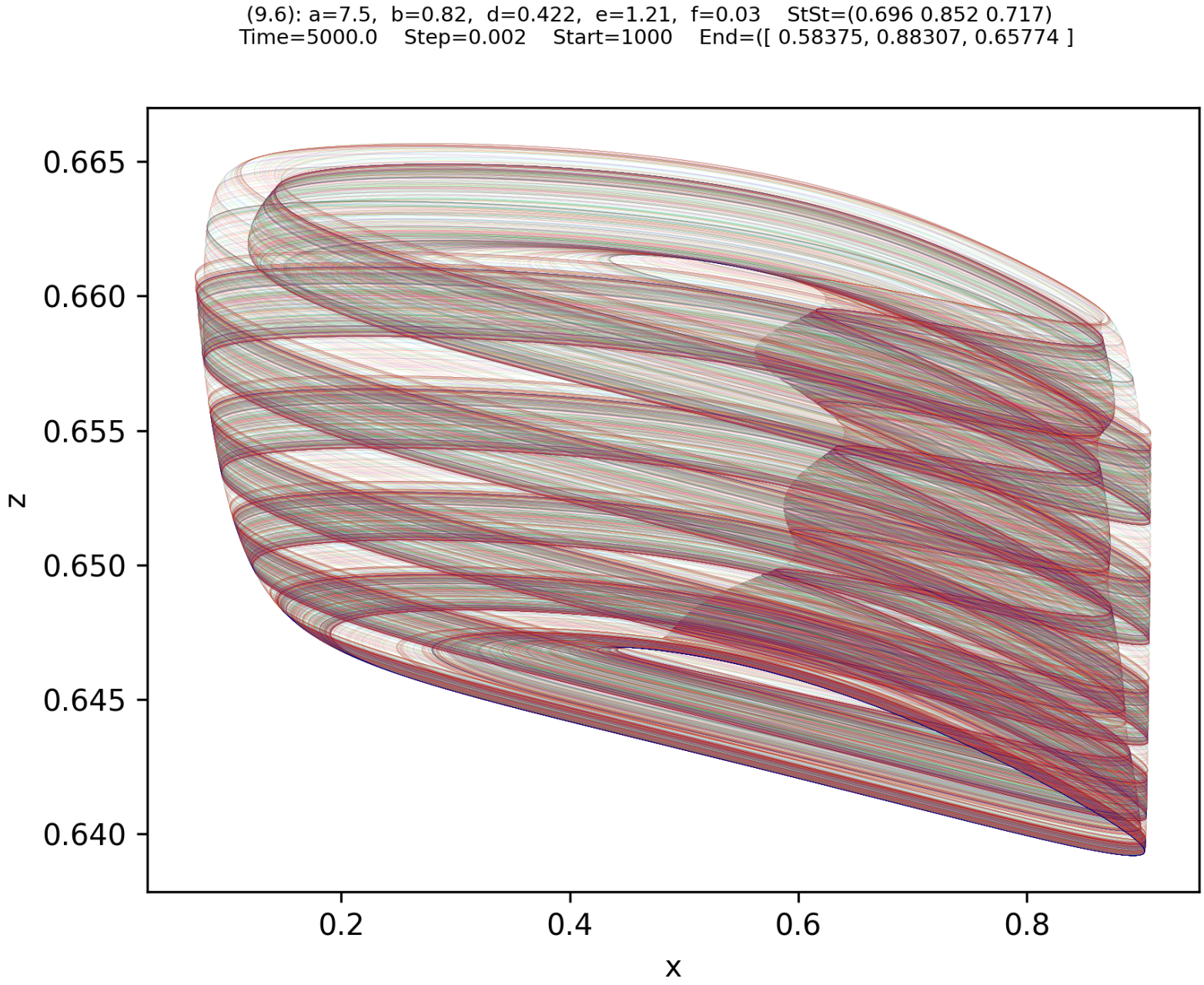


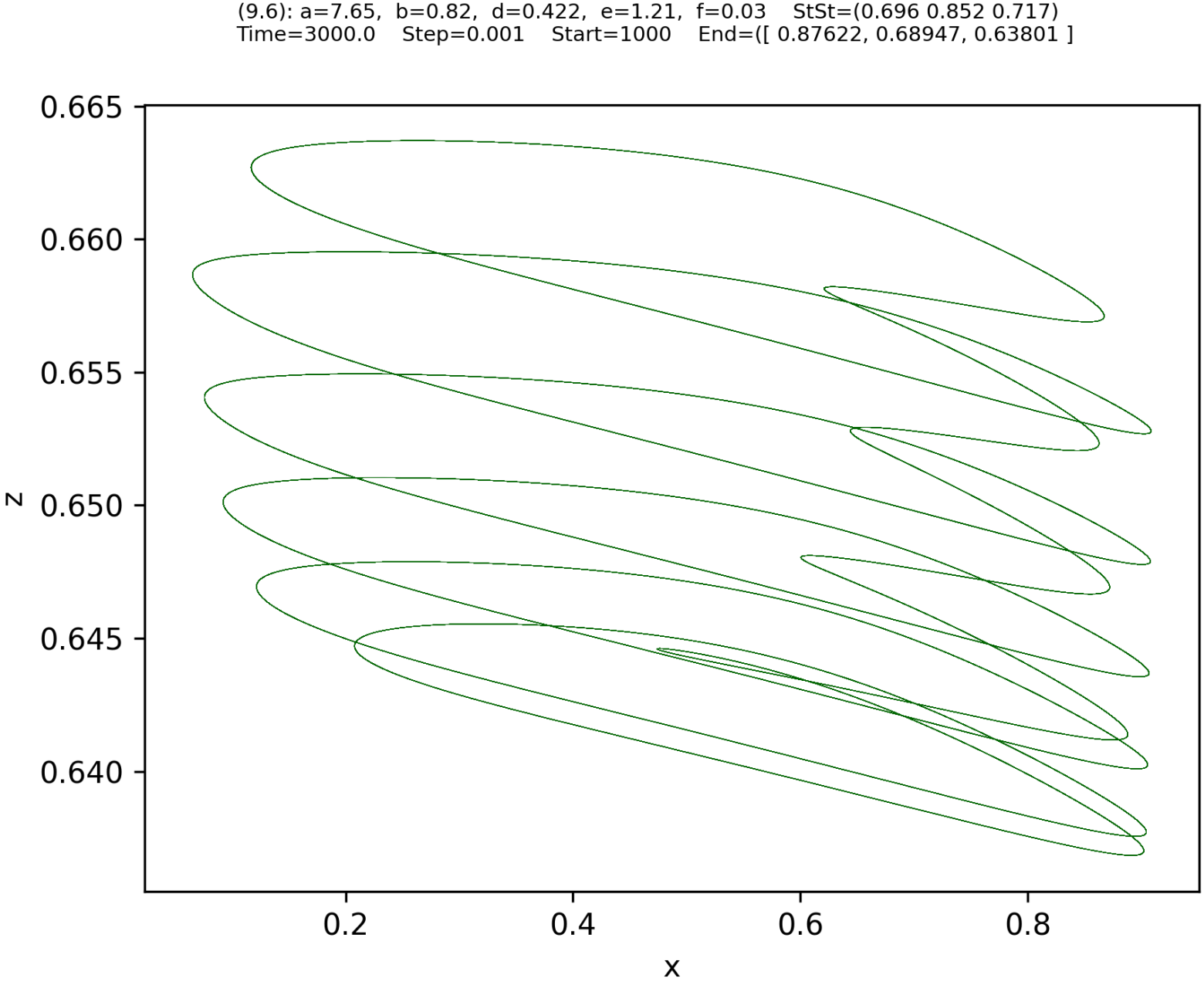

(9.6): a=7.4, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=5000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.61272, 1.01373, 0.6474]
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

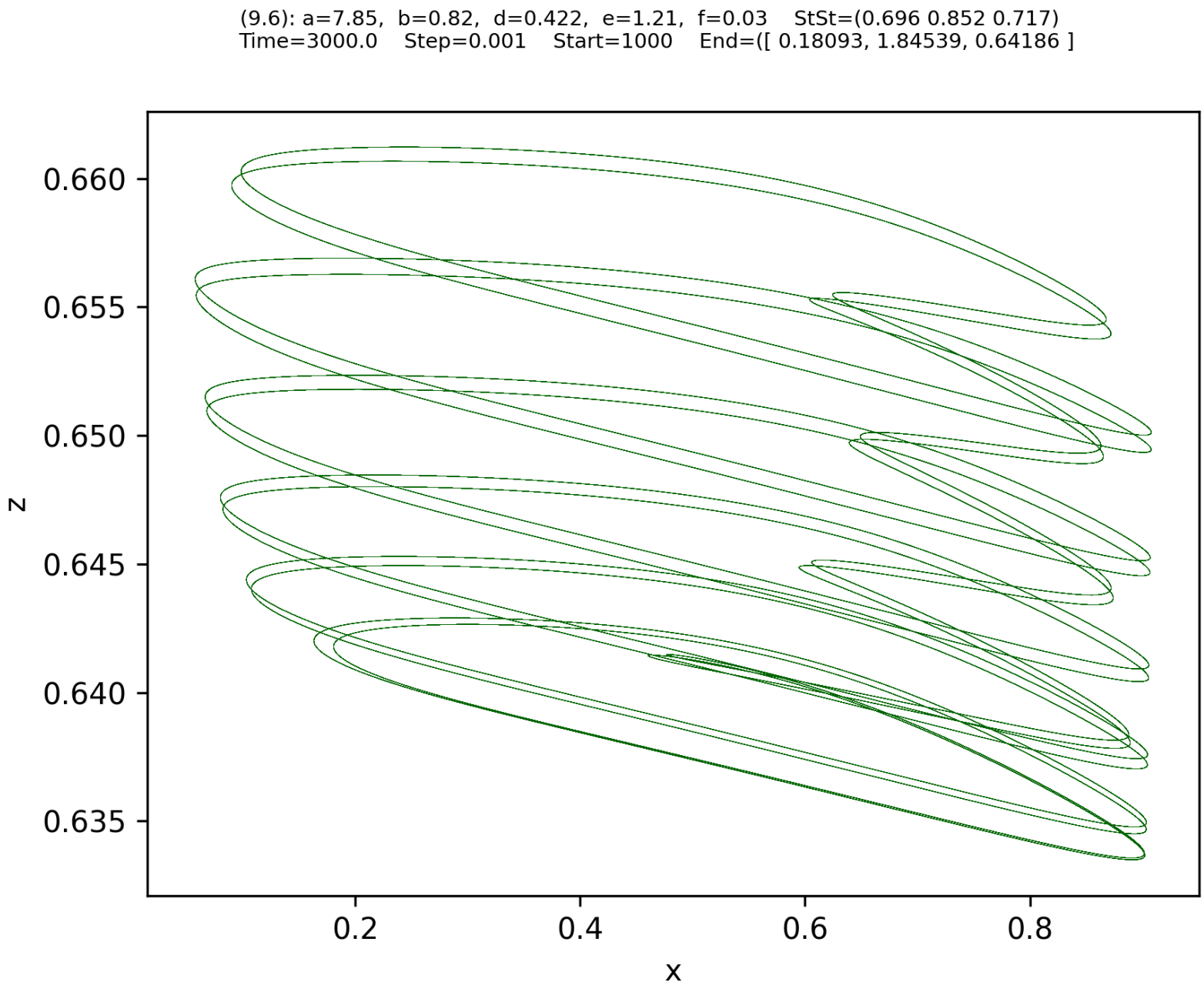

(9.6): a=7.42, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=5000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.86406, 0.56722, 0.64092]
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

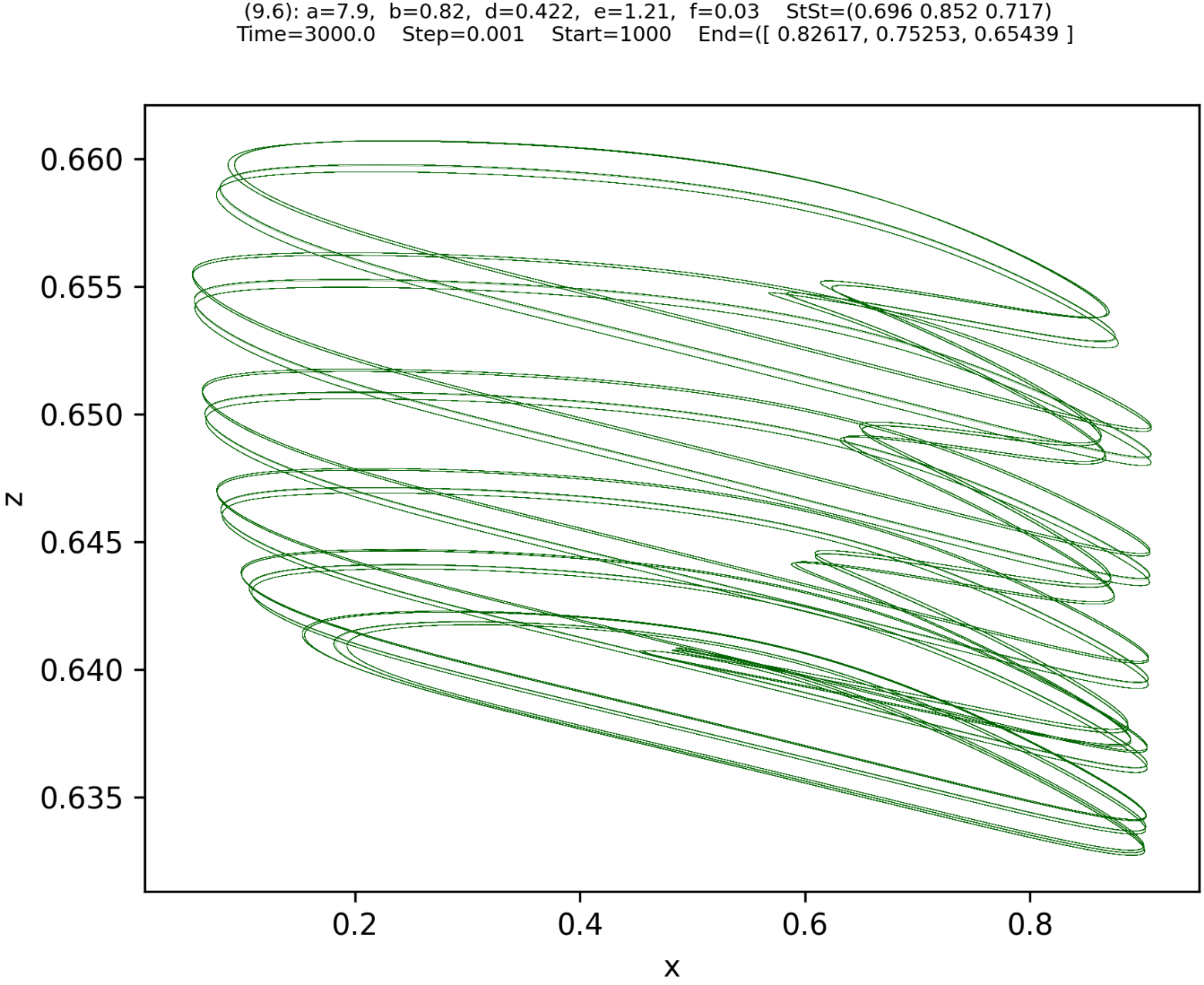

(9.6): a=7.43, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0 Step=0.005 Start=1000 End=([0.69661, 0.90381, 0.64555]
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

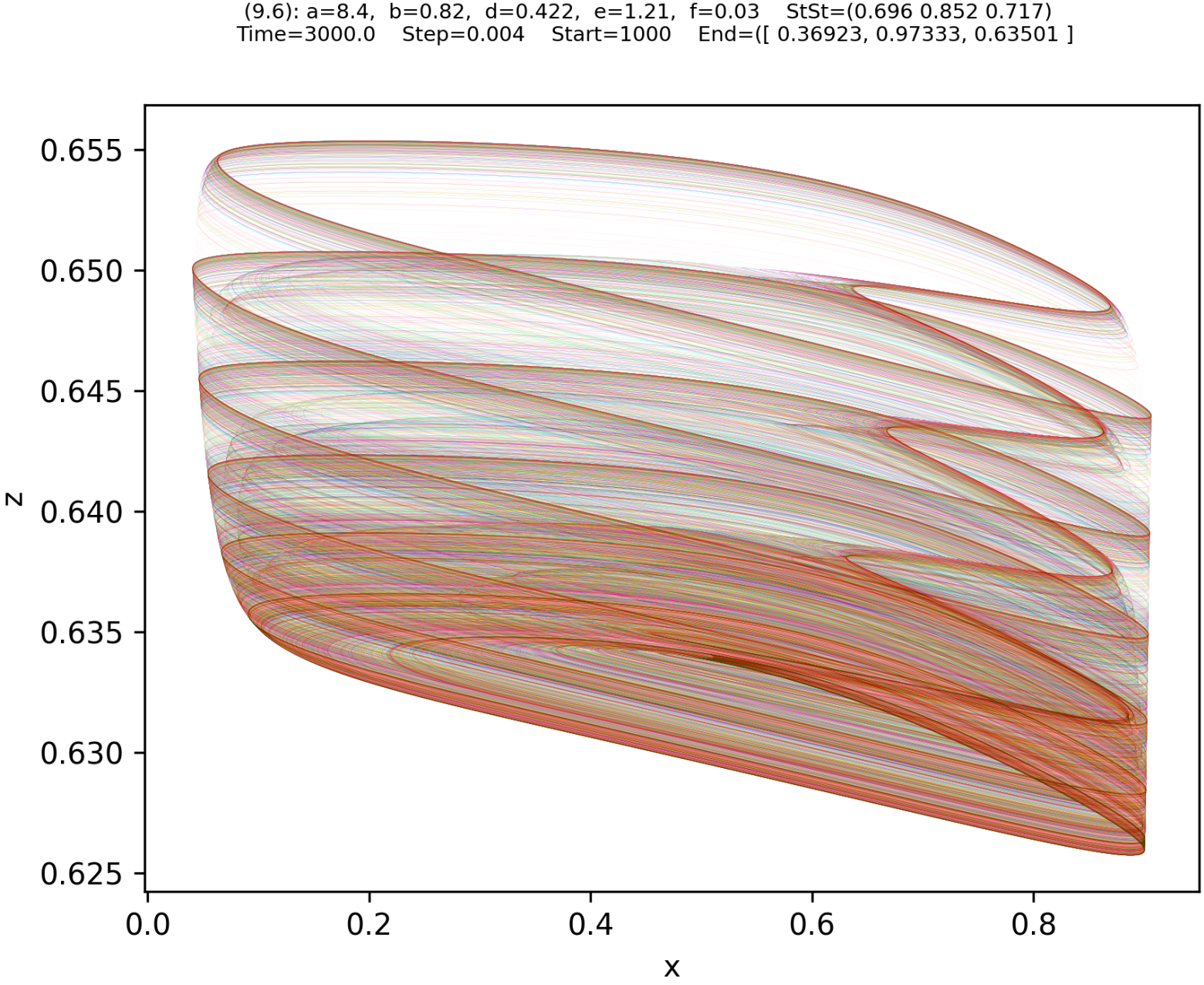

(9.6): a=7.46, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0 Step=0.005 Start=1000 End=([0.65508, 0.91669, 0.65393]
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

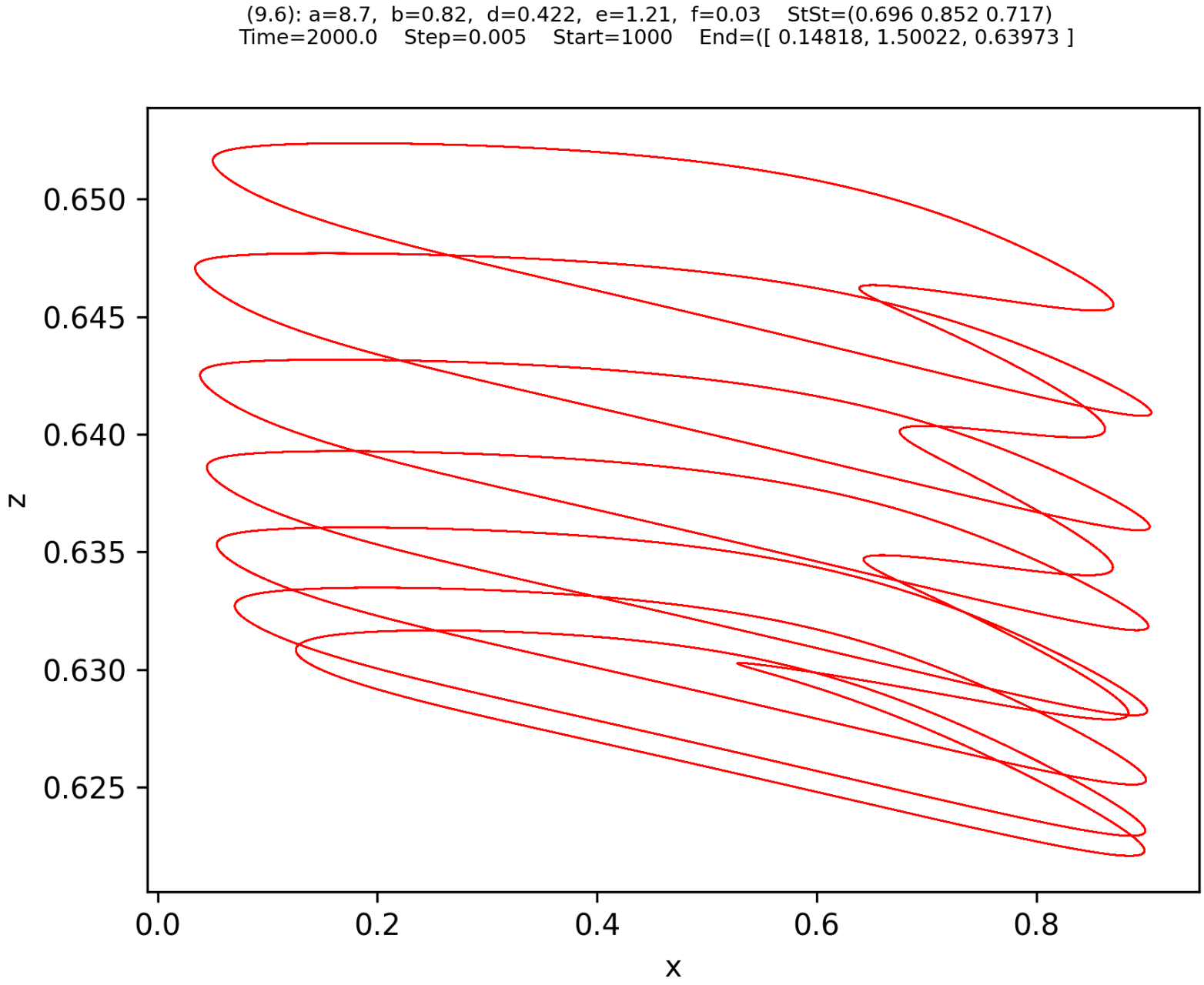

(9.6): a=7.5, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=5000.0 Step=0.002 Start=1000 End=([0.58375, 0.88307, 0.65774]
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

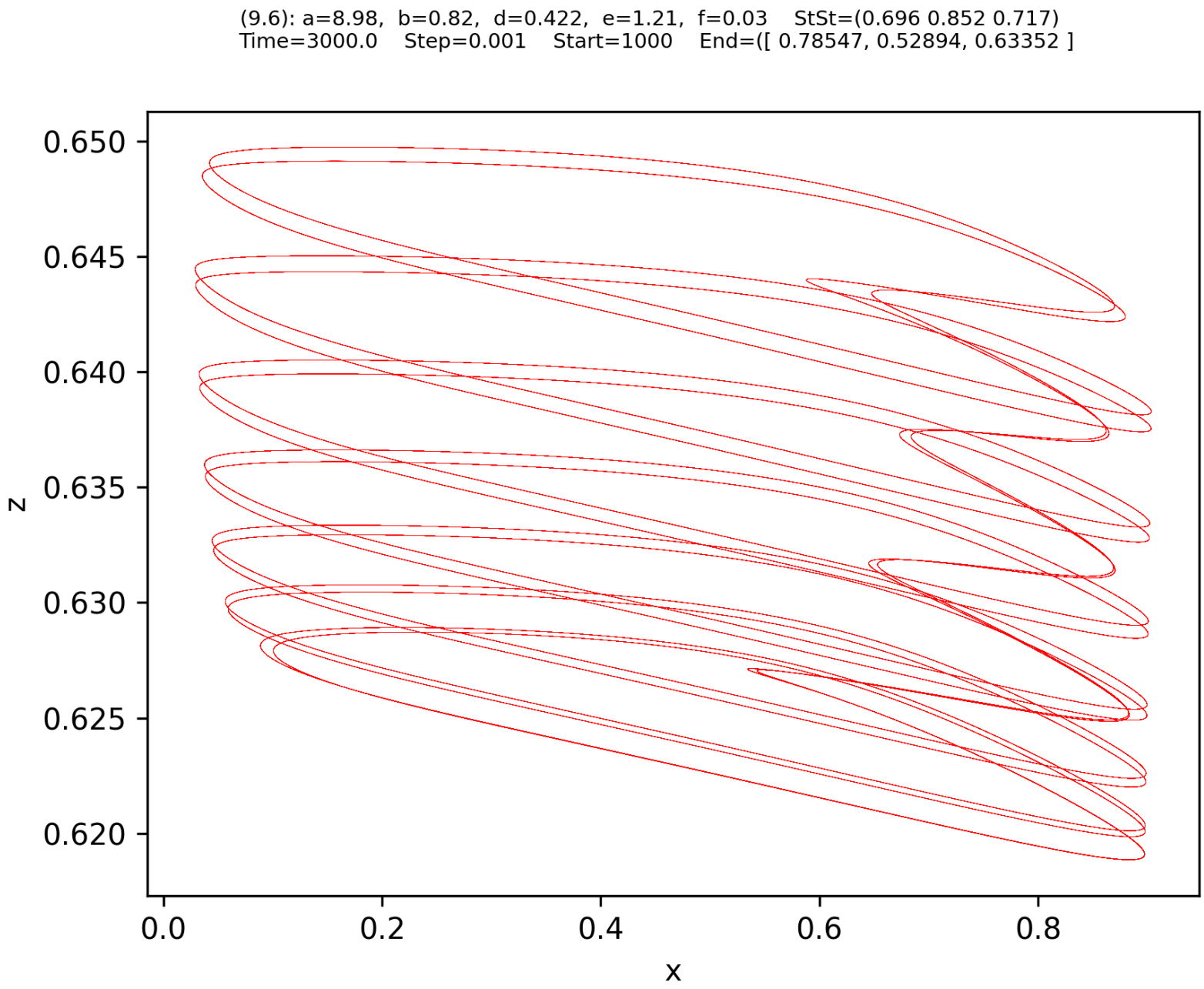

(9.6): a=7.65, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=3000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.87622, 0.68947, 0.63801]
0.665
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

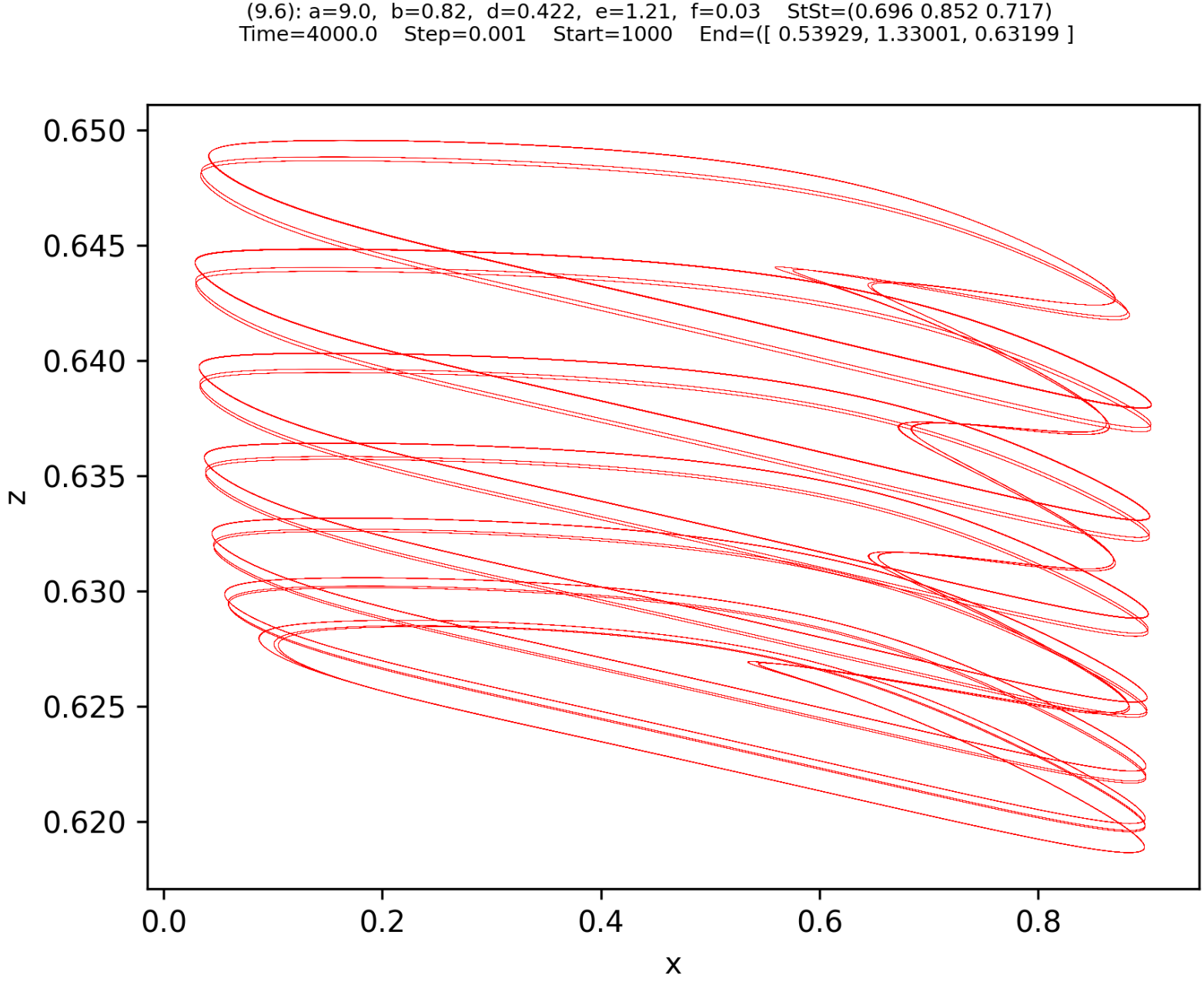

(9.6): a=7.85, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=3000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.18093, 1.84539, 0.64186]
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
0.635
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

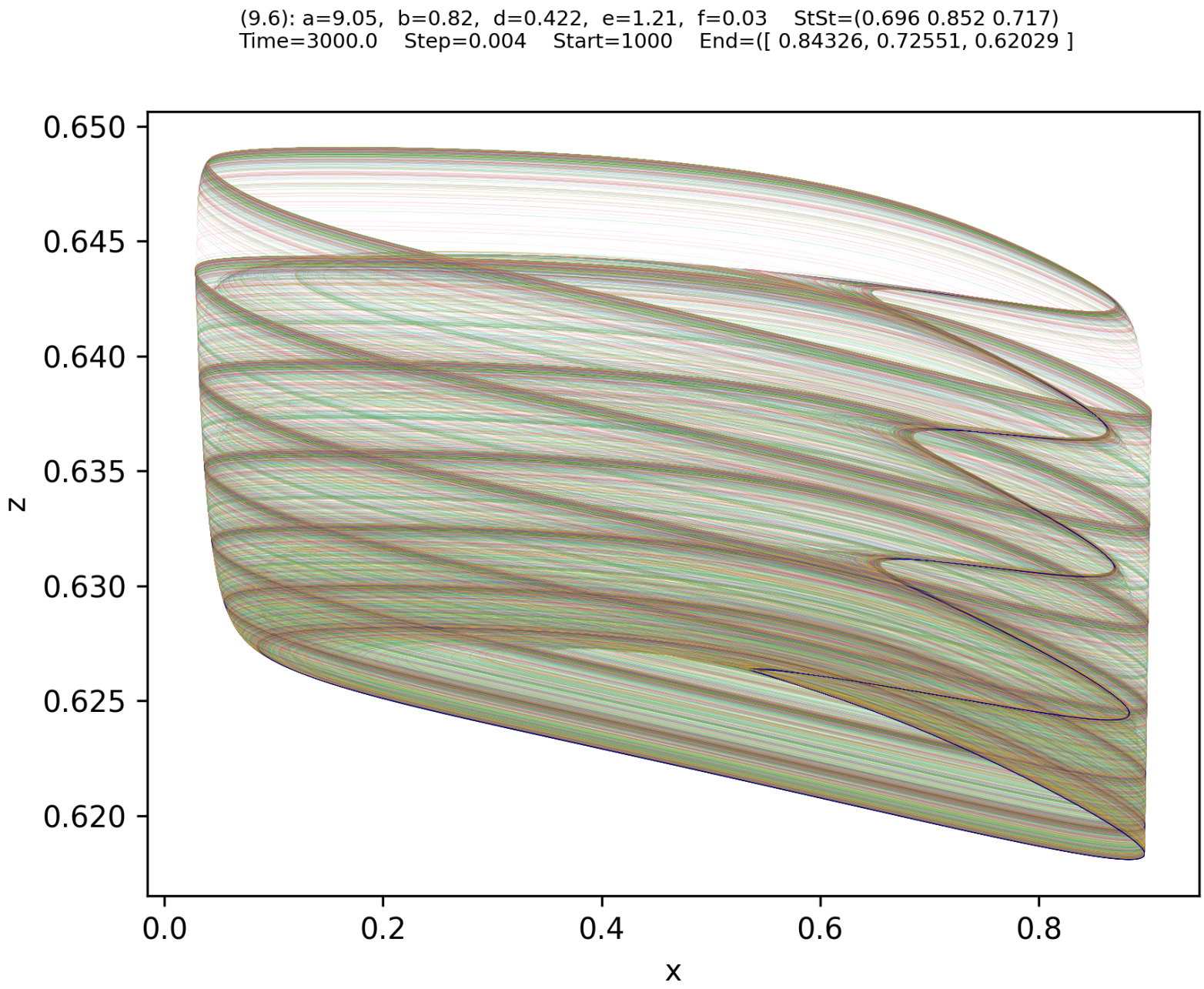

(9.6): a=7.9, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=3000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.82617, 0.75253, 0.65439]
0.660
0.655
0.650
0.645
0.640
0.635
z
0.2
0.4
0.6
0.8
x

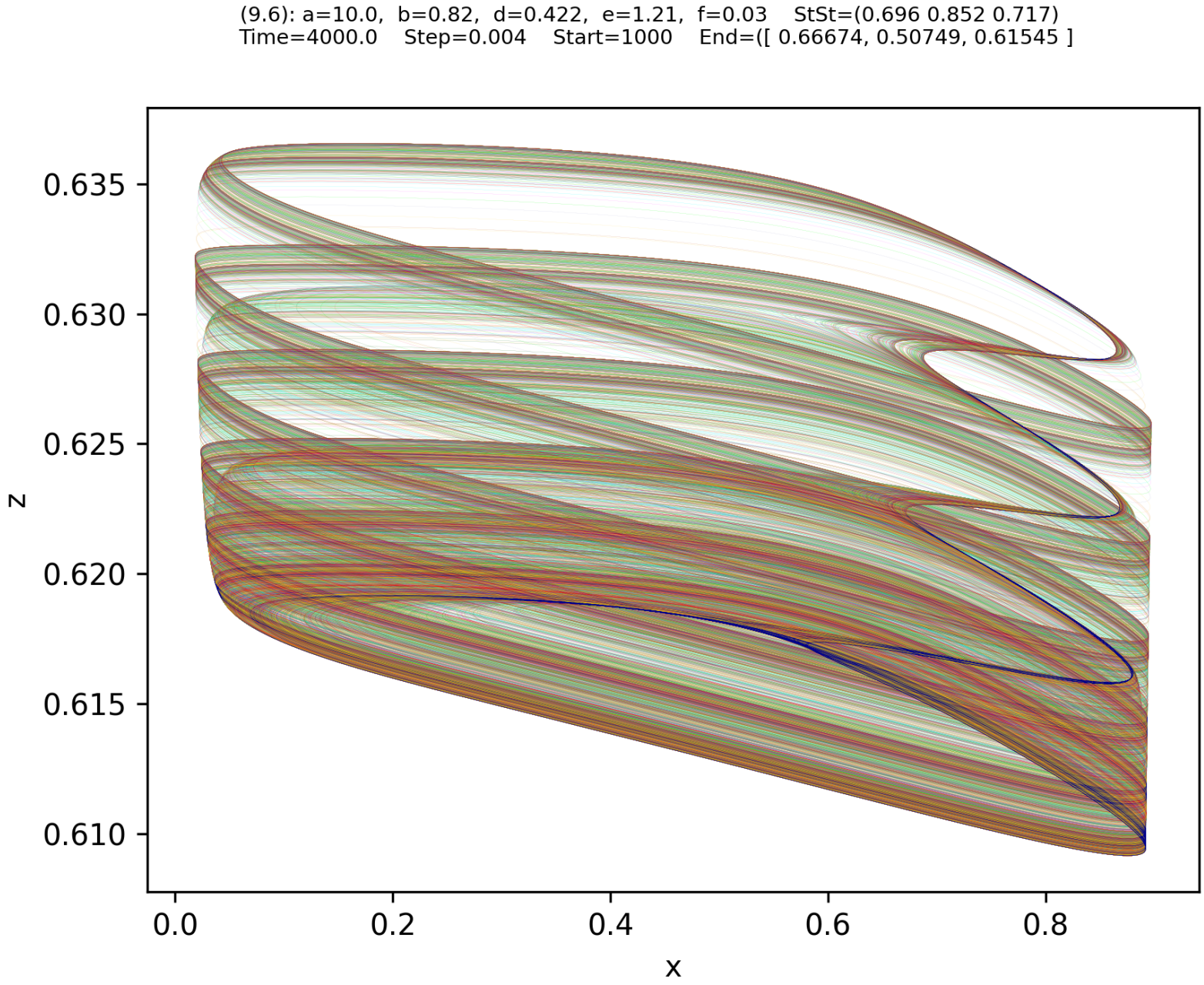

(9.6): a=8.4, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=3000.0 Step=0.004 Start=1000 End=([0.36923, 0.97333, 0.63501]
0.655
0.650
0.645
0.640
0.635
0.630
0.625
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

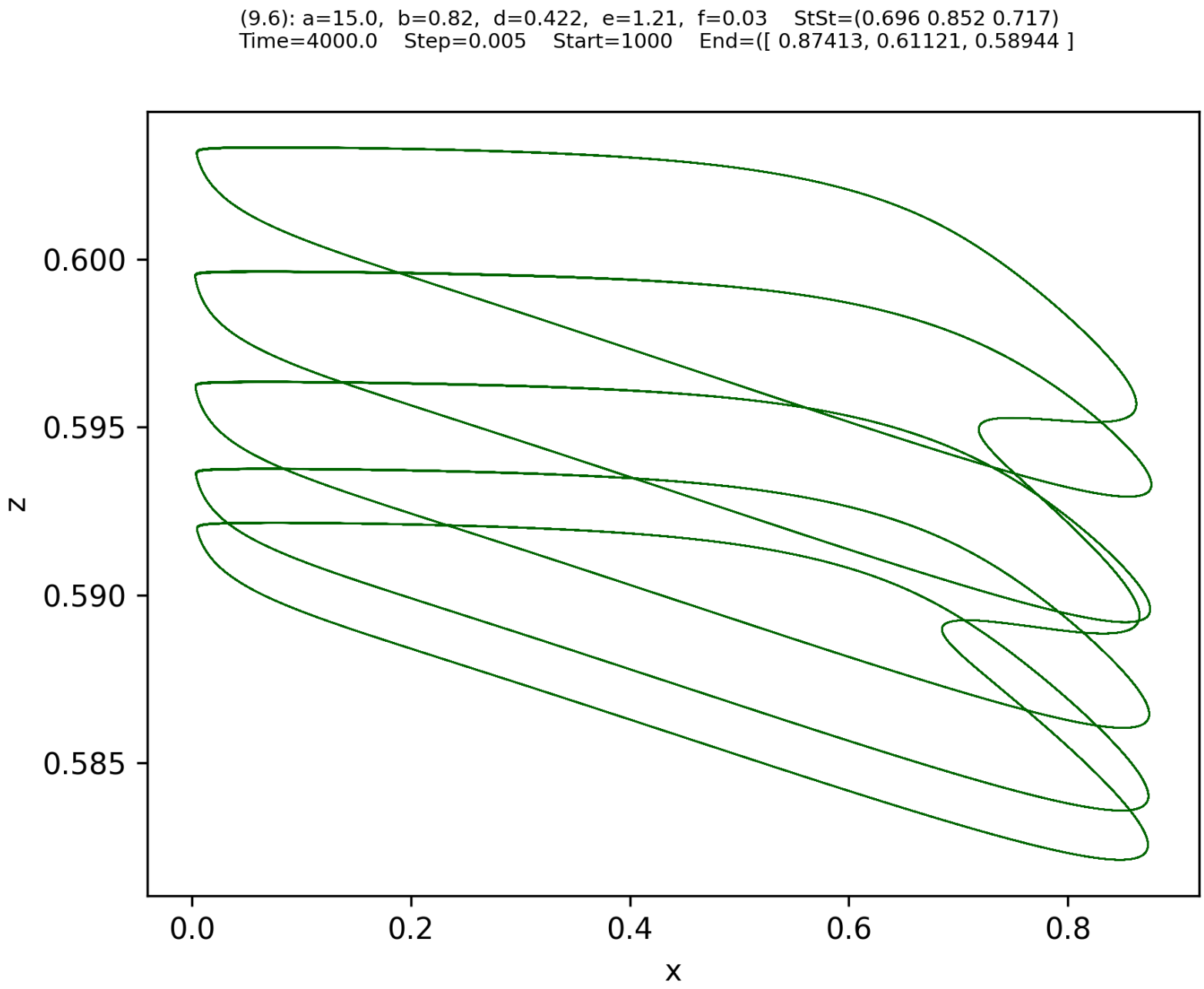

(9.6): a=8.7, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=2000.0 Step=0.005 Start=1000 End=([0.14818, 1.50022, 0.63973]
0.650
0.645
0.640
0.635
0.630
0.625
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

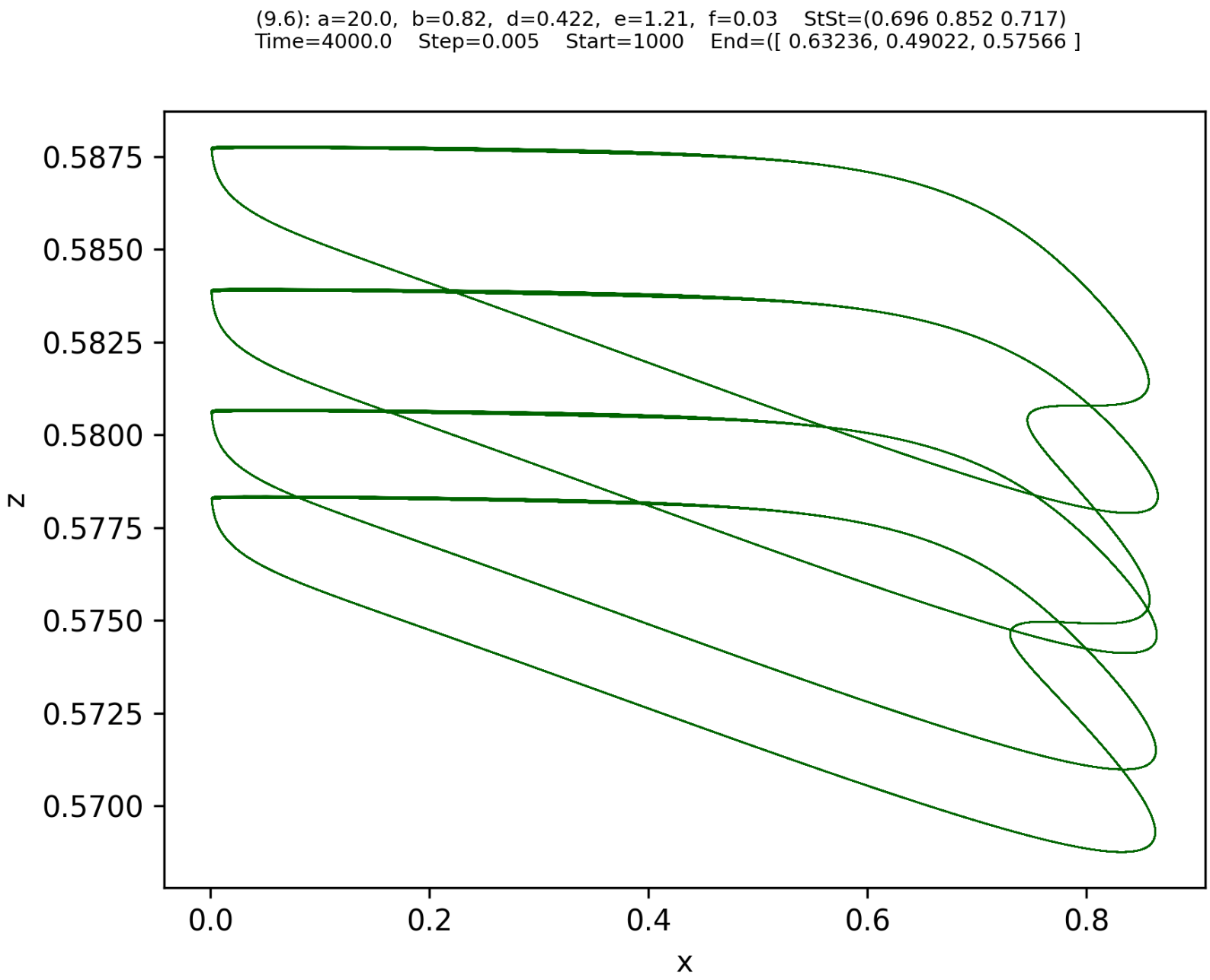

(9.6): a=8.98, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=3000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.78547, 0.52894, 0.63352]
0.650
0.645
0.640
0.635
0.630
0.625
0.620
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

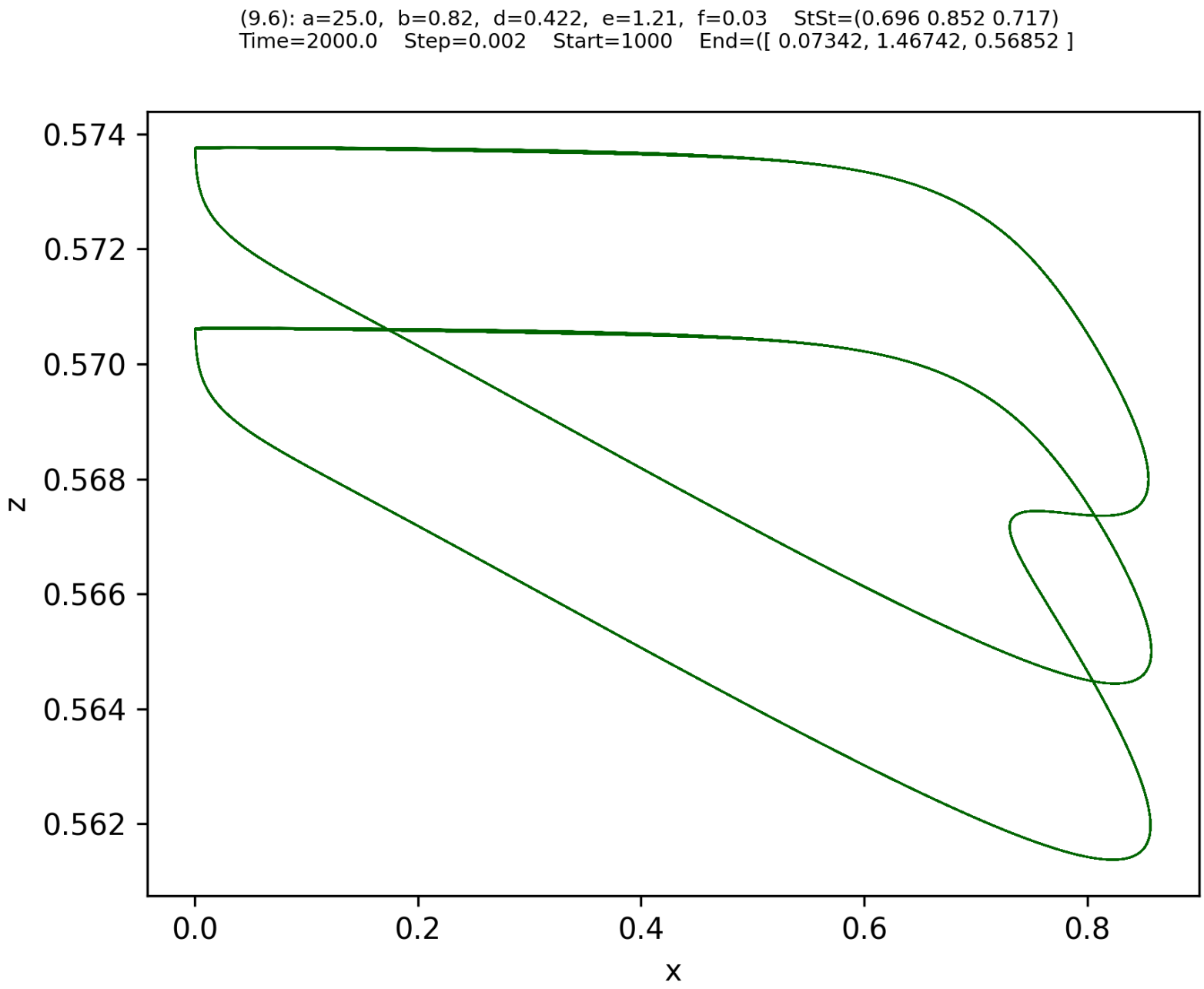

(9.6): a=9.0, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0 Step=0.001 Start=1000 End=([0.53929, 1.33001, 0.63199]
0.650
0.645
0.640
0.635
0.630
0.625
0.620
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

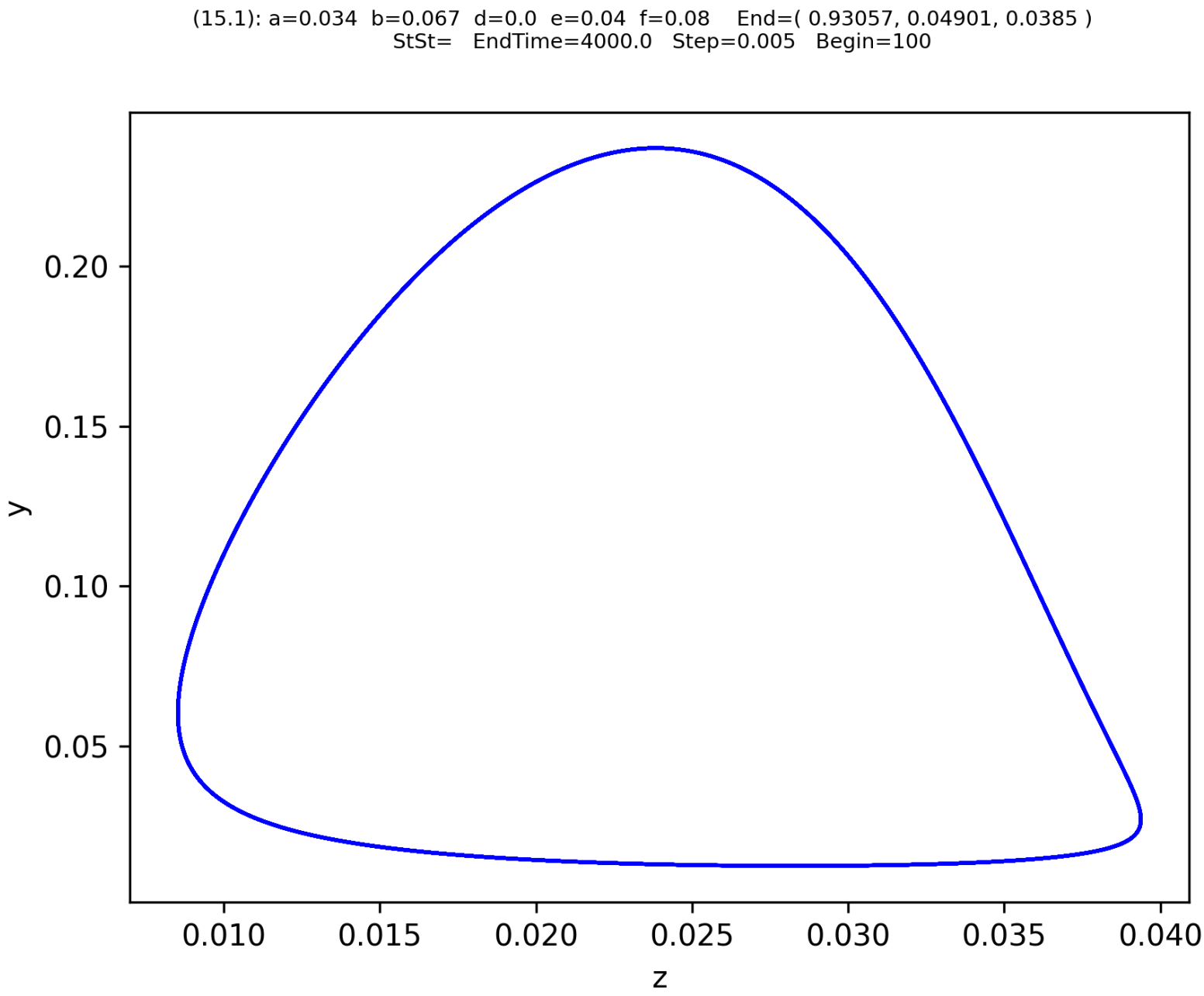

(9.6): a=9.05, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=3000.0 Step=0.004 Start=1000 End=([0.84326, 0.72551, 0.62029]
0.650
0.645
0.640
0.635
0.630
0.625
0.620
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

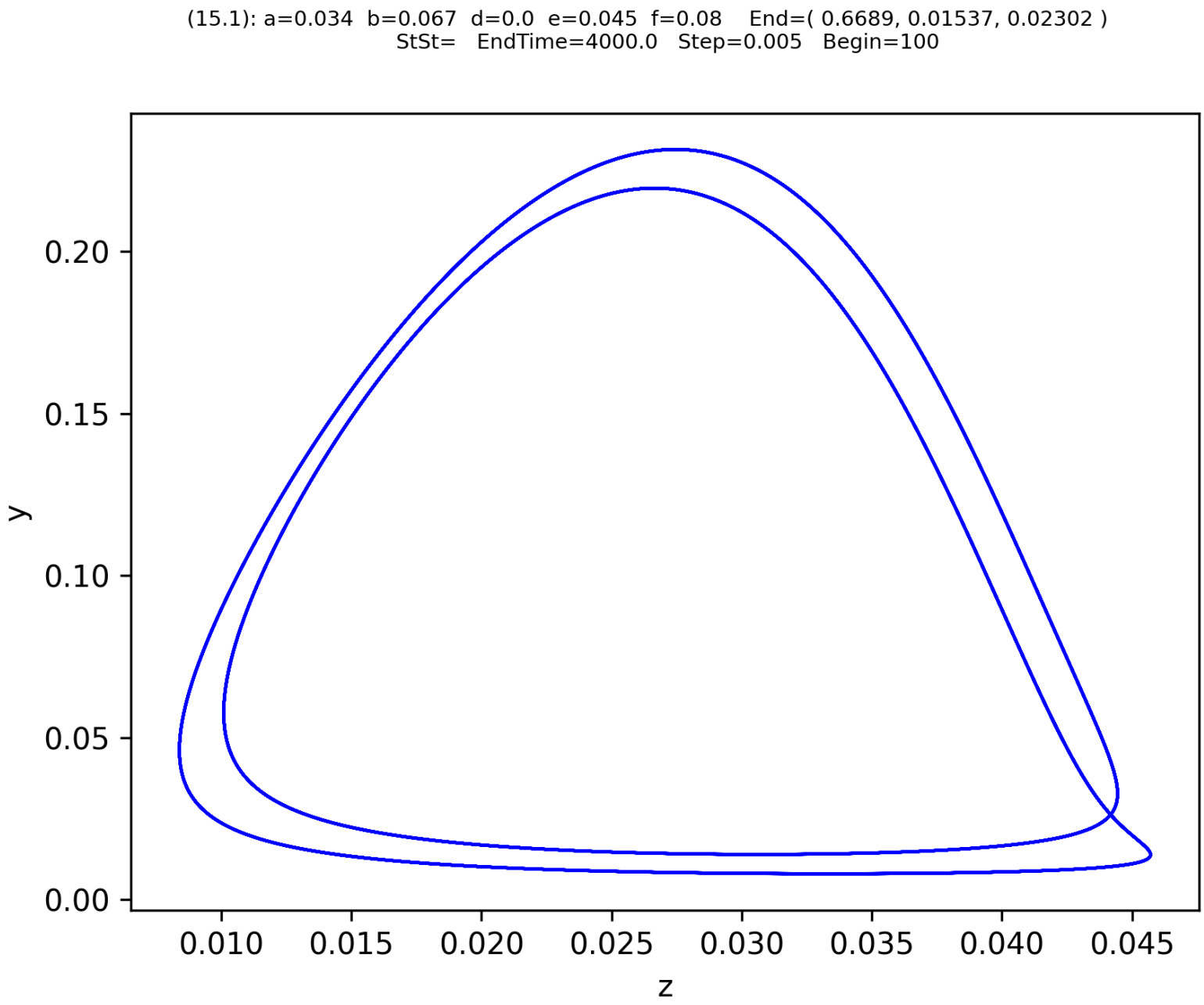

(9.6): a=10.0, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0 Step=0.004 Start=1000 End=([0.66674, 0.50749, 0.61545]
0.635
0.630
0.625
0.620
0.615
0.610
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

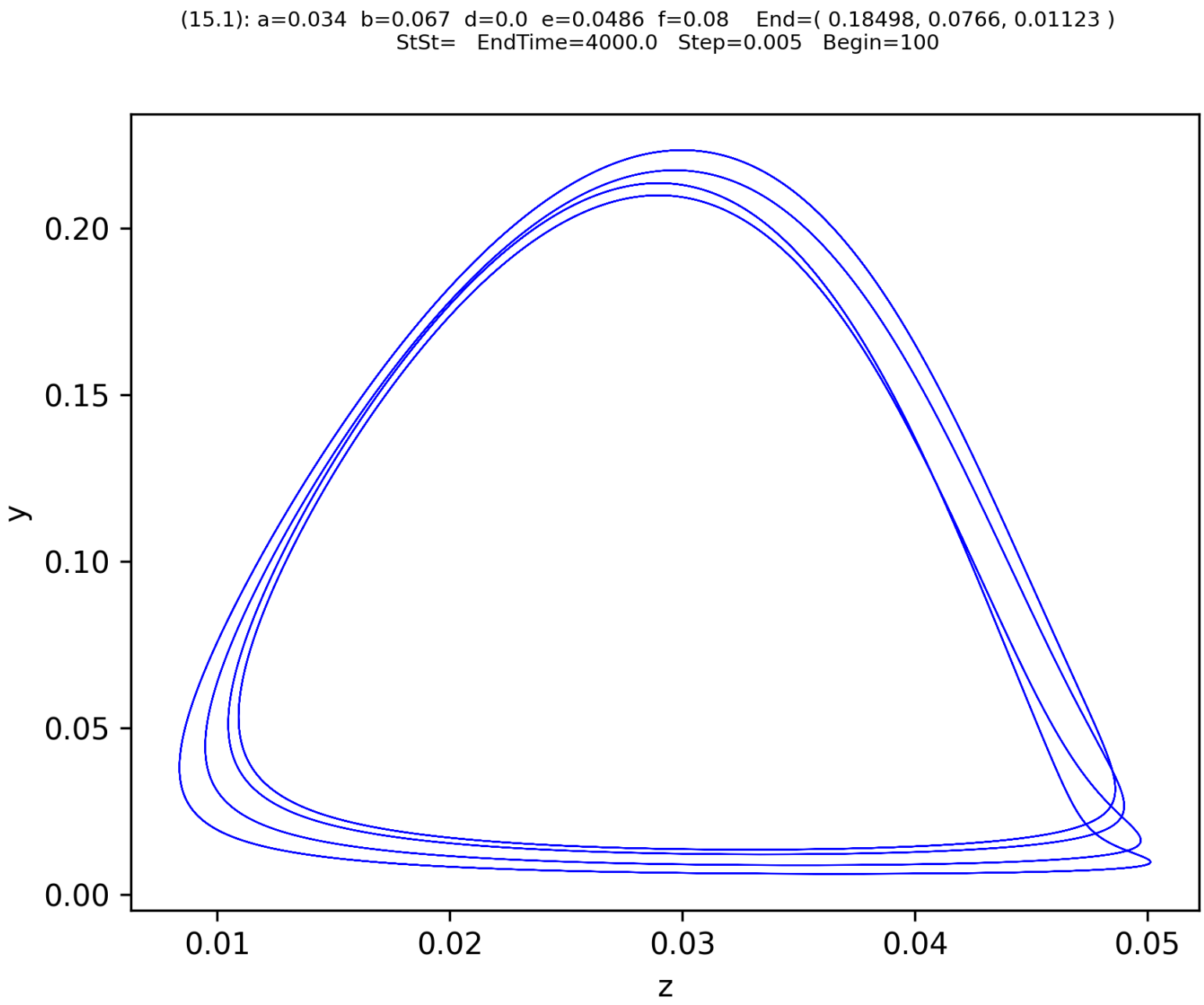

(9.6): a=15.0, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0 Step=0.005 Start=1000 End=([0.87413, 0.61121, 0.58944]
0.600
0.595
0.590
0.585
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

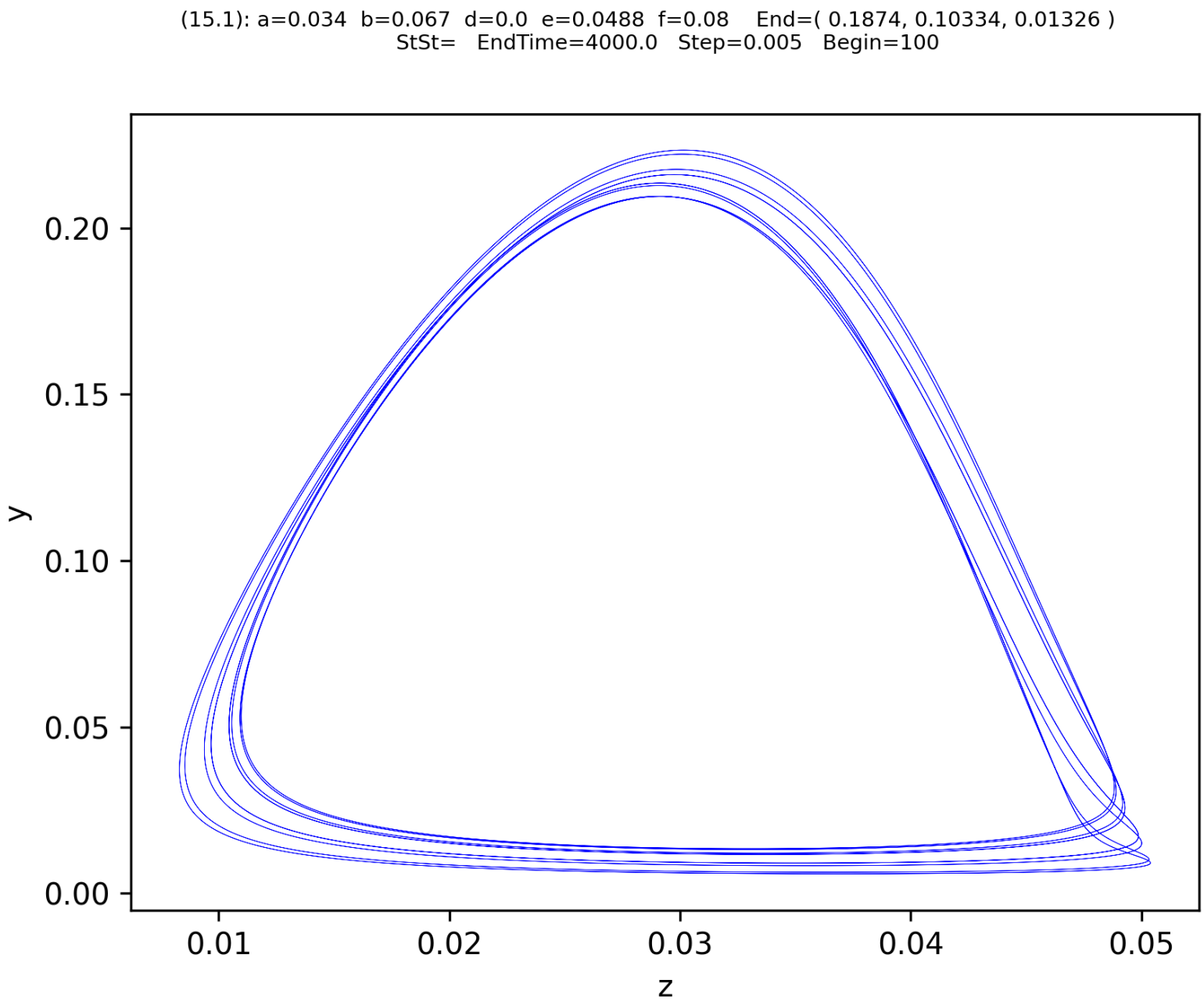

(9.6): a=20.0, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=4000.0 Step=0.005 Start=1000 End=([0.63236, 0.49022, 0.57566]
0.5875
0.5850
0.5825
0.5800
0.5775
0.5750
0.5725
0.5700
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

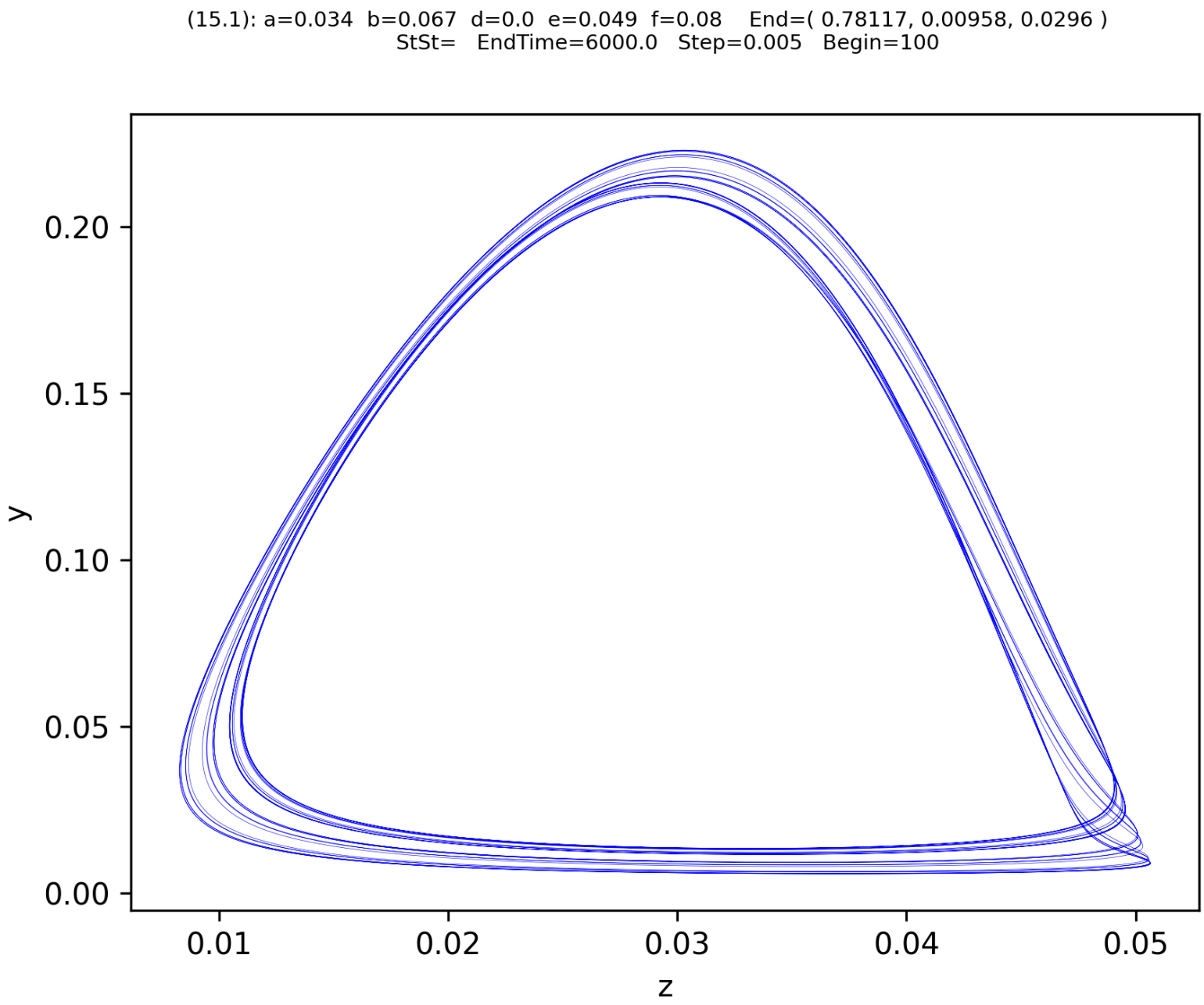

(9.6): a=25.0, b=0.82, d=0.422, e=1.21, f=0.03 StSt=(0.696 0.852 0.717)
Time=2000.0 Step=0.002 Start=1000 End=([0.07342, 1.46742, 0.56852]
0.574
0.572
0.570
0.568
0.566
0.564
0.562
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x

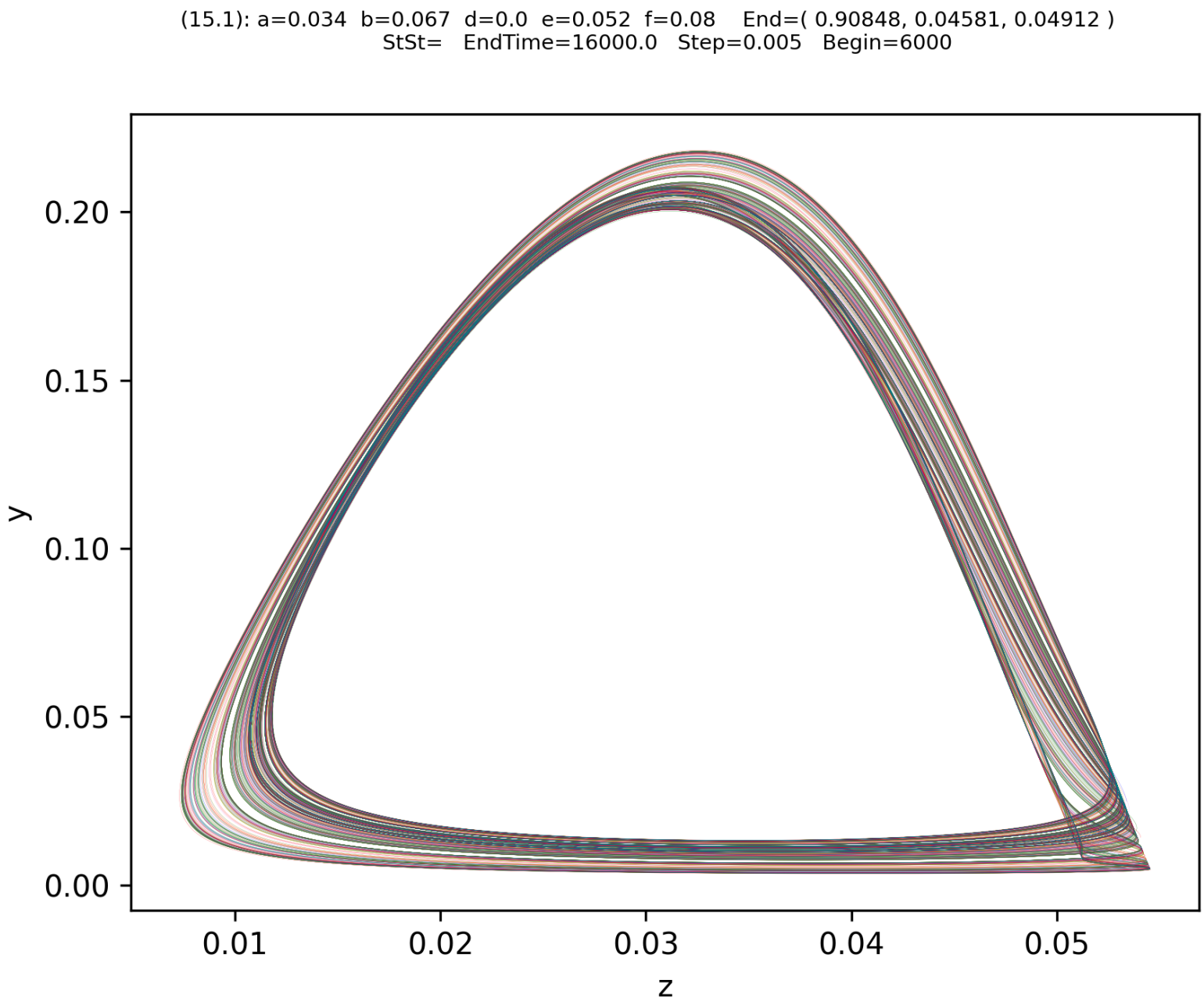

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.04 f=0.08 End=(0.93057, 0.04901, 0.0385)
StSt= EndTime=4000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0.040
z

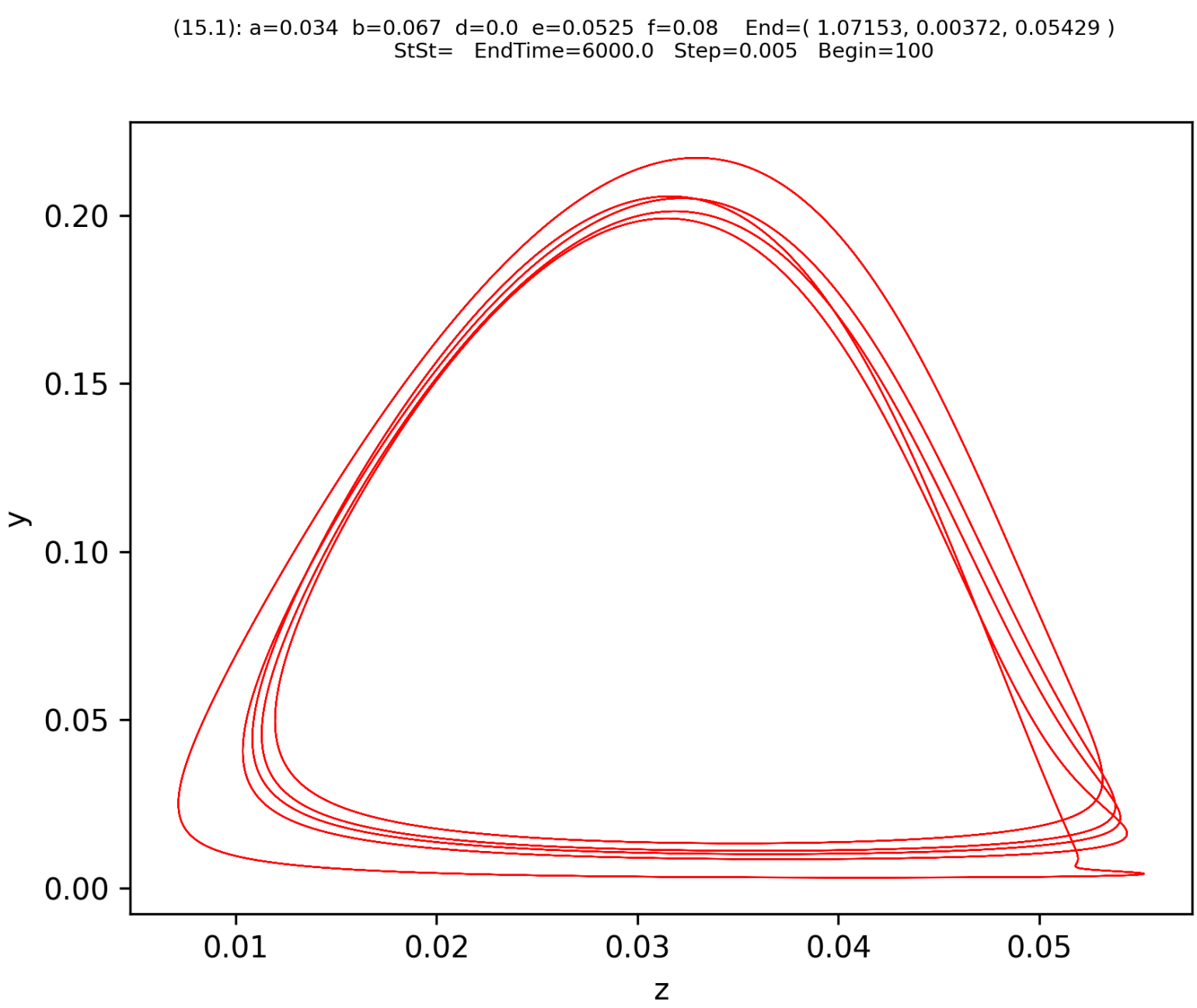

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.045 f=0.08 End=(0.6689, 0.01537, 0.02302)
StSt= EndTime=4000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0.040
0.045
z

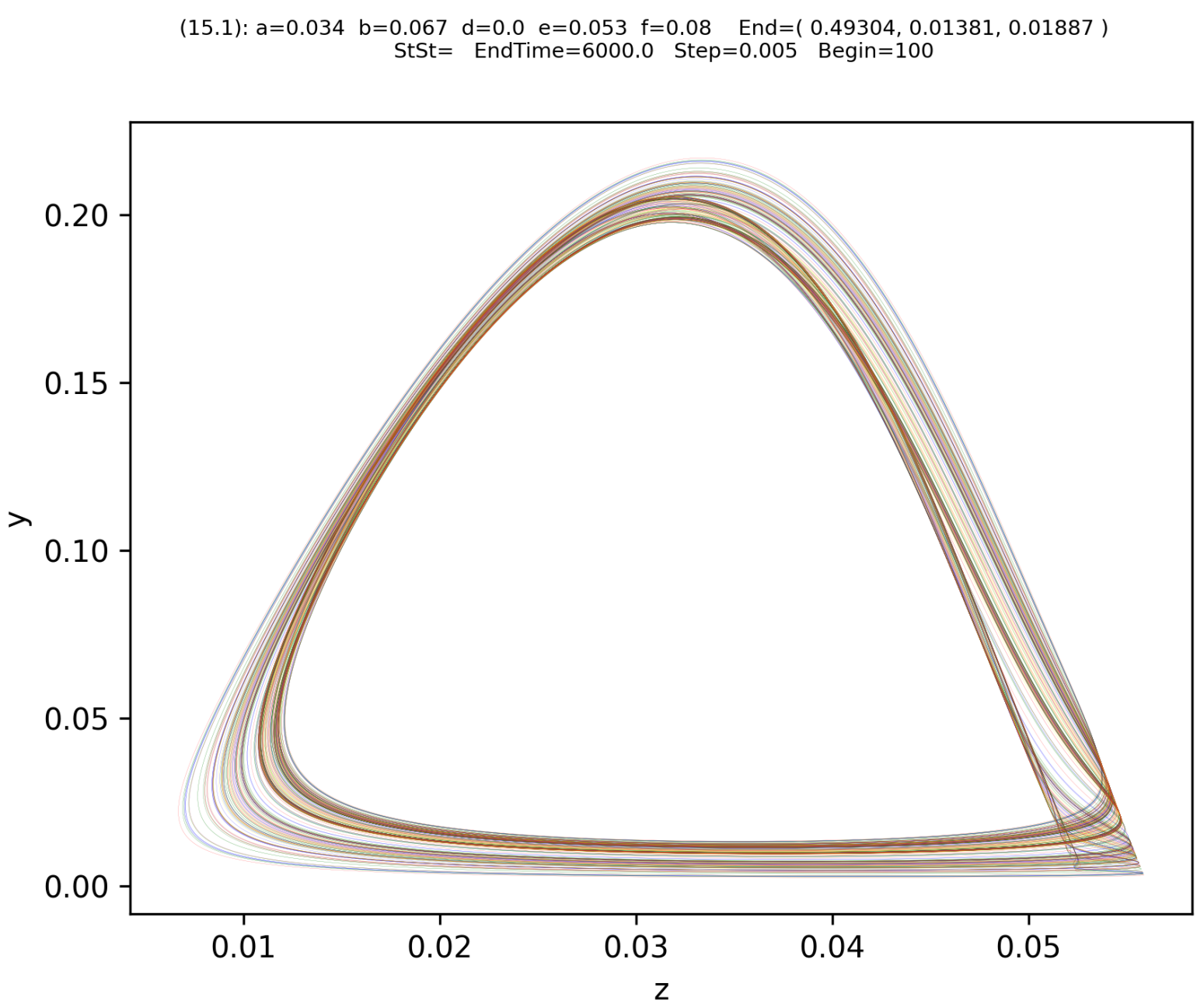

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.0486 f=0.08 End=(0.18498, 0.0766, 0.01123)
StSt= EndTime=4000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z


(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.0488 f=0.08 End=(0.1874, 0.10334, 0.01326)
StSt= EndTime=4000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z

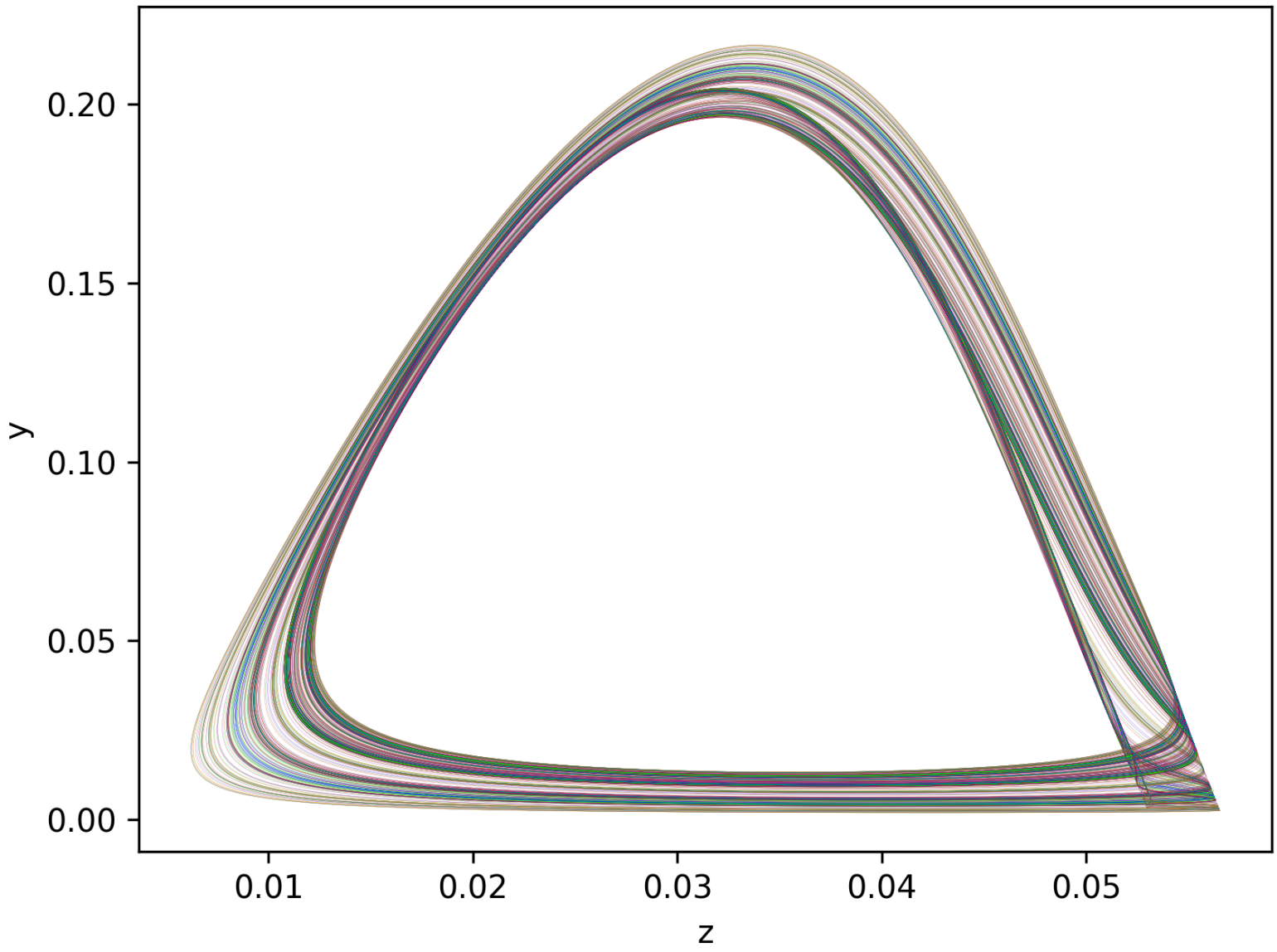

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.049 f=0.08 End=(0.78117, 0.00958, 0.0296)
StSt= EndTime=6000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z

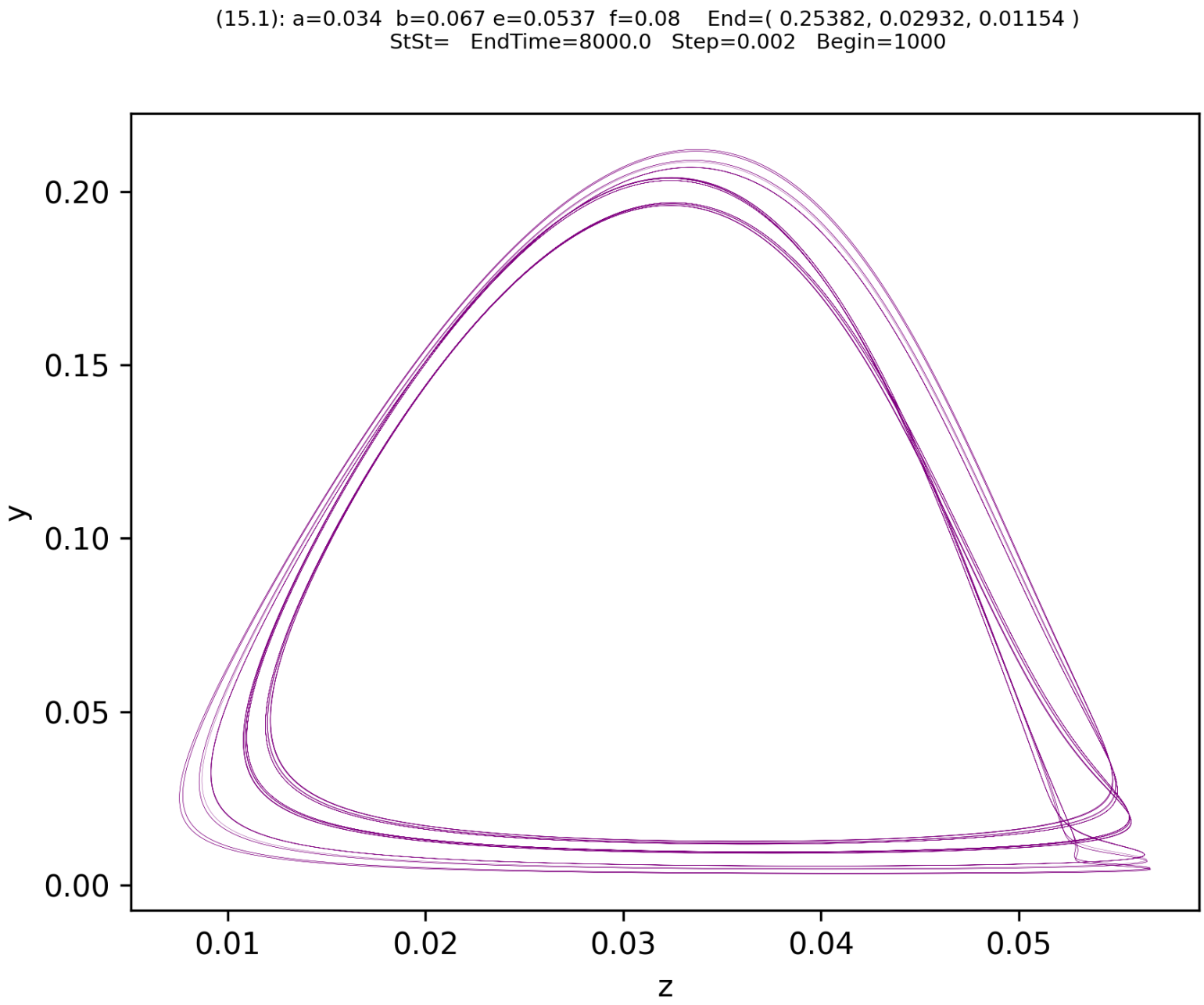

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.052 f=0.08 End=(0.90848, 0.04581, 0.04912)
StSt= EndTime=16000.0 Step=0.005 Begin=6000
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z

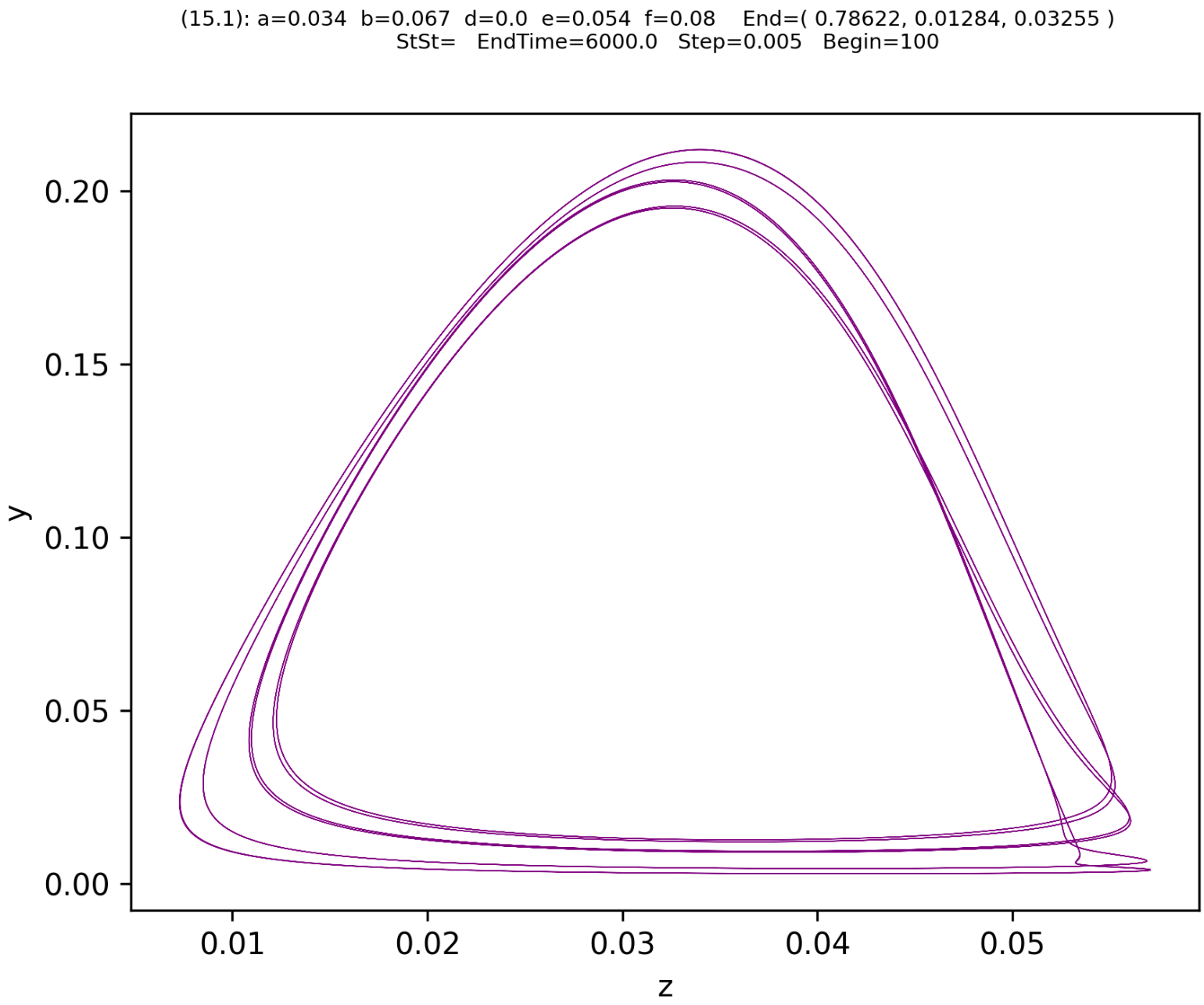

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.0525 f=0.08 End=(1.07153, 0.00372, 0.05429)
StSt= EndTime=6000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z

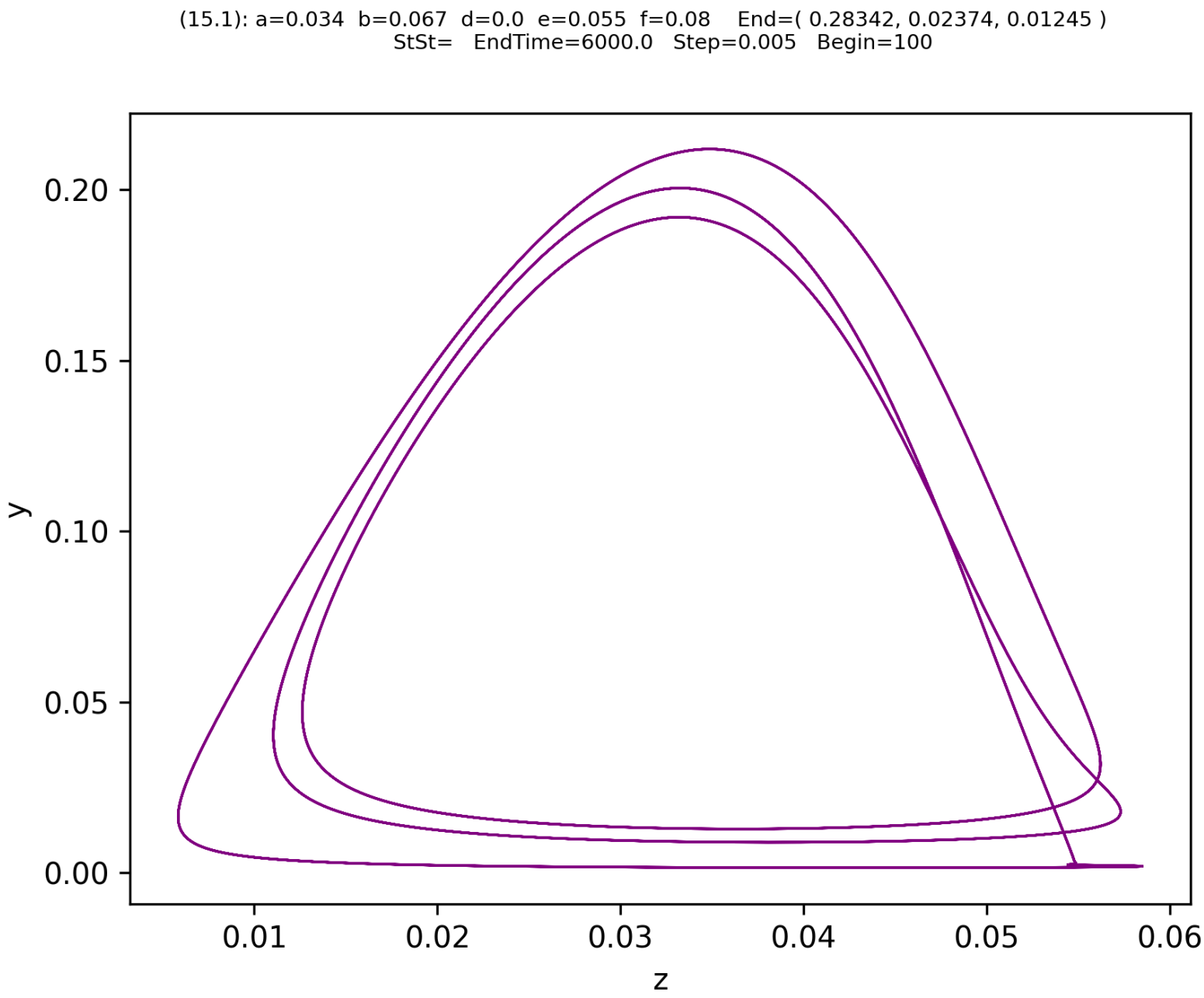

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.053 f=0.08 End=(0.49304, 0.01381, 0.01887)
StSt= EndTime=6000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.0535 f=0.08   End=(1.01639, 0.00605, 0.04667)
StSt=   EndTime=16000.0   Step=0.005   Begin=4000

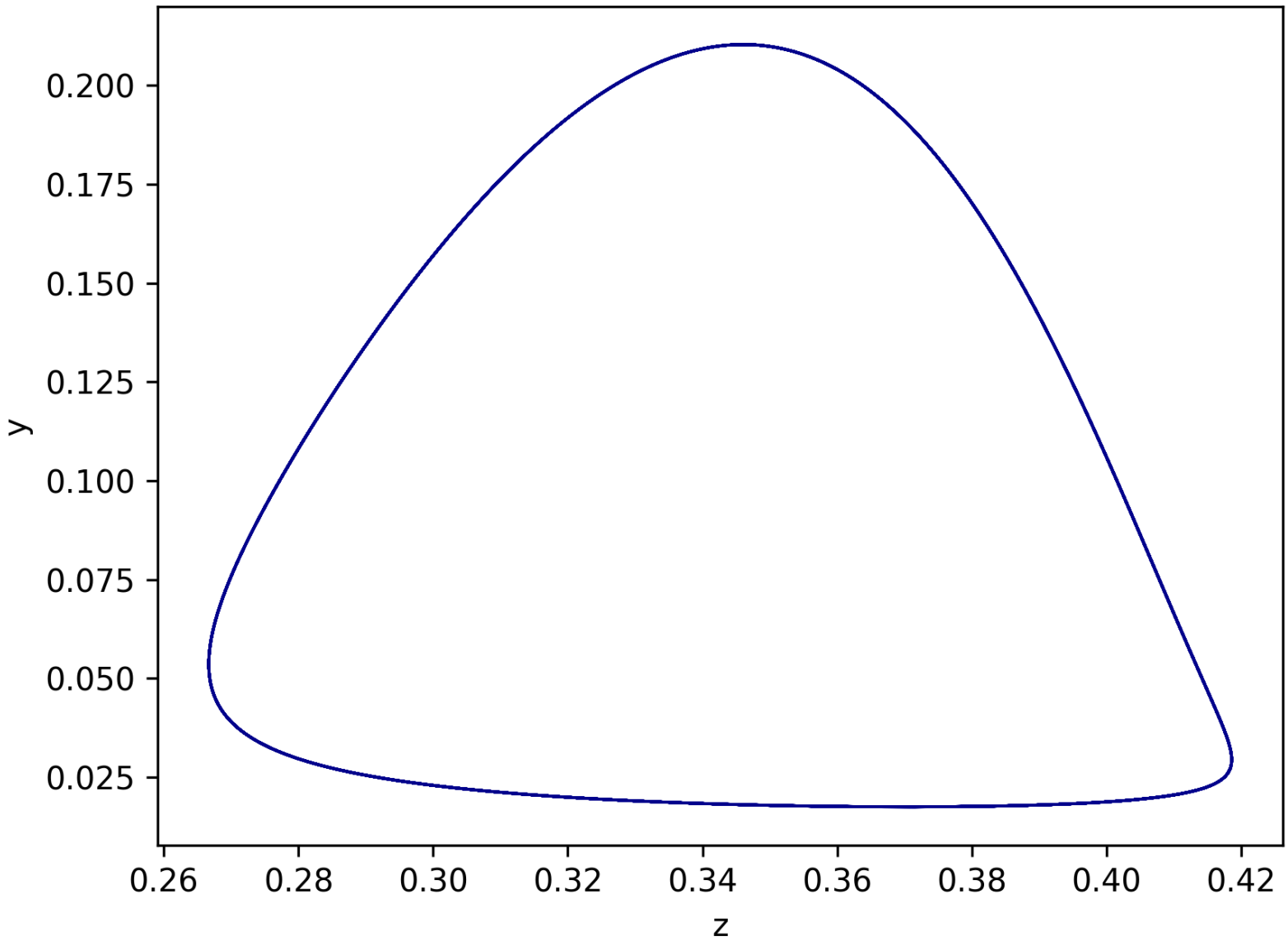


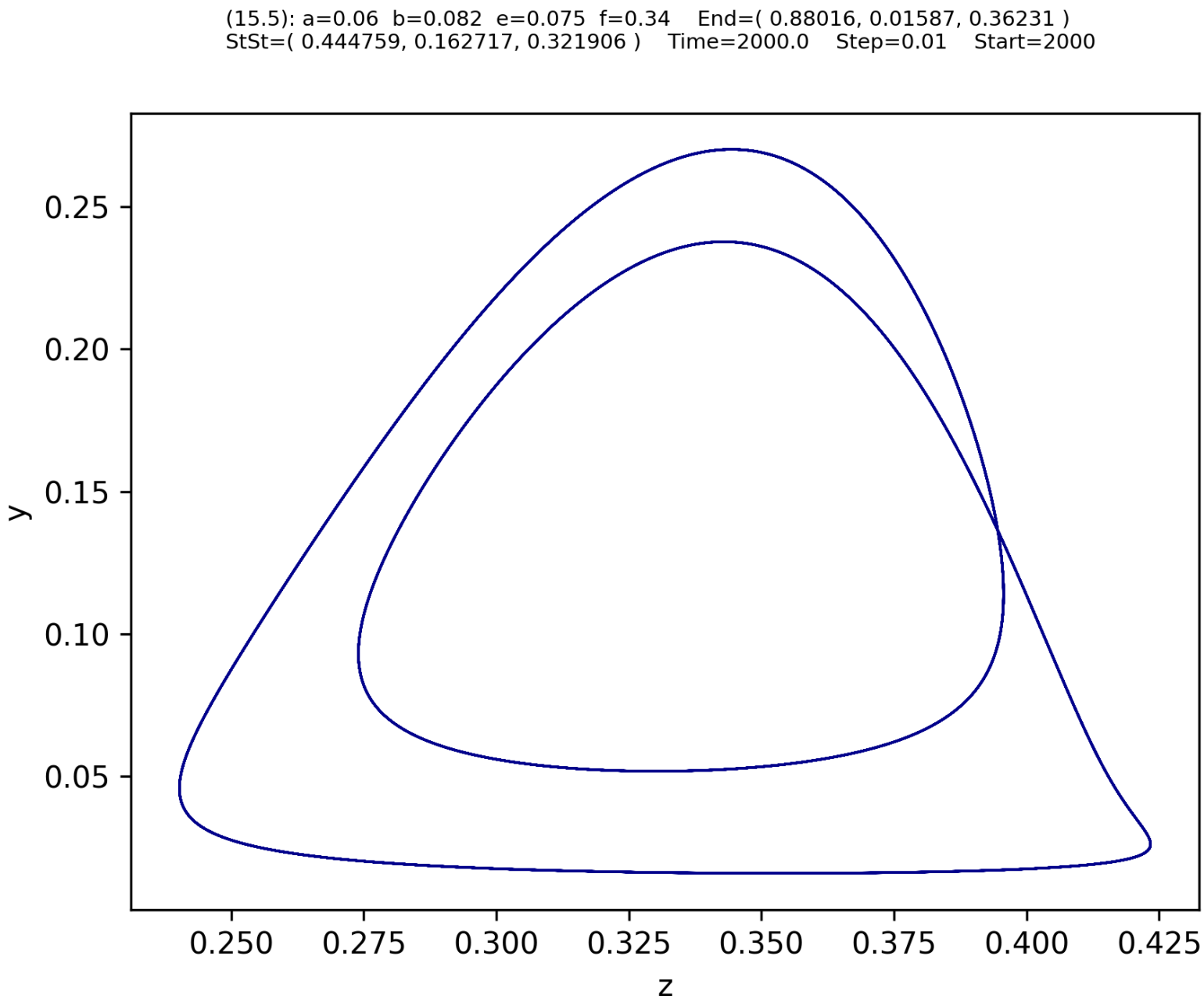

(15.1): a=0.034 b=0.067 e=0.0537 f=0.08 End=(0.25382, 0.02932, 0.01154)
StSt= EndTime=8000.0 Step=0.002 Begin=1000
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z


(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.054 f=0.08 End=(0.78622, 0.01284, 0.03255)
StSt= EndTime=6000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
z

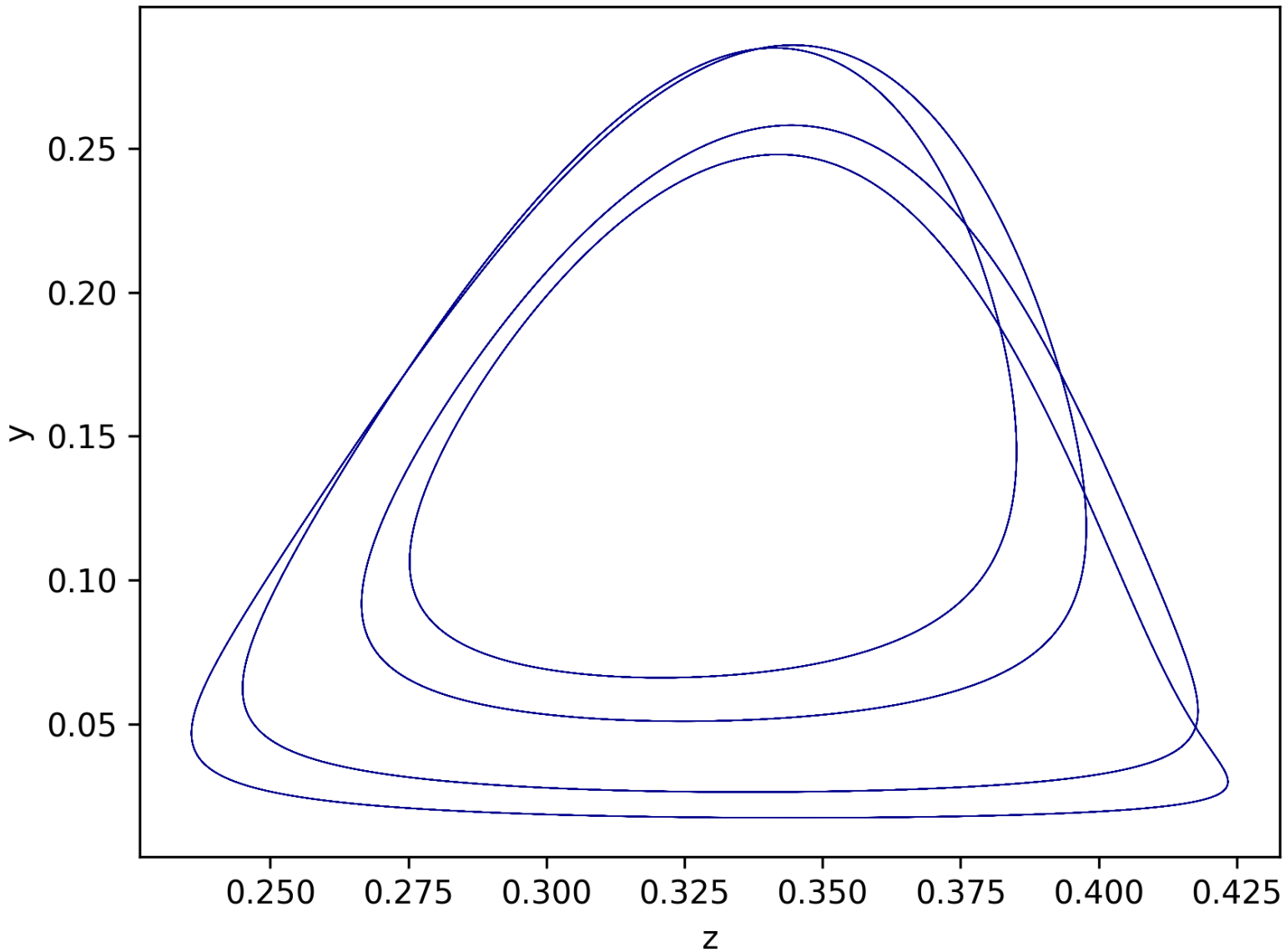

(15.1): a=0.034 b=0.067 d=0.0 e=0.055 f=0.08 End=(0.28342, 0.02374, 0.01245)
StSt= EndTime=6000.0 Step=0.005 Begin=100
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
y
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
z

(15.5): a=0.04 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.47508, 0.20293, 0.36112)
StSt=(0.501794, 0.122389, 0.335116)   Time=2000.0   Step=0.01   Start=2000

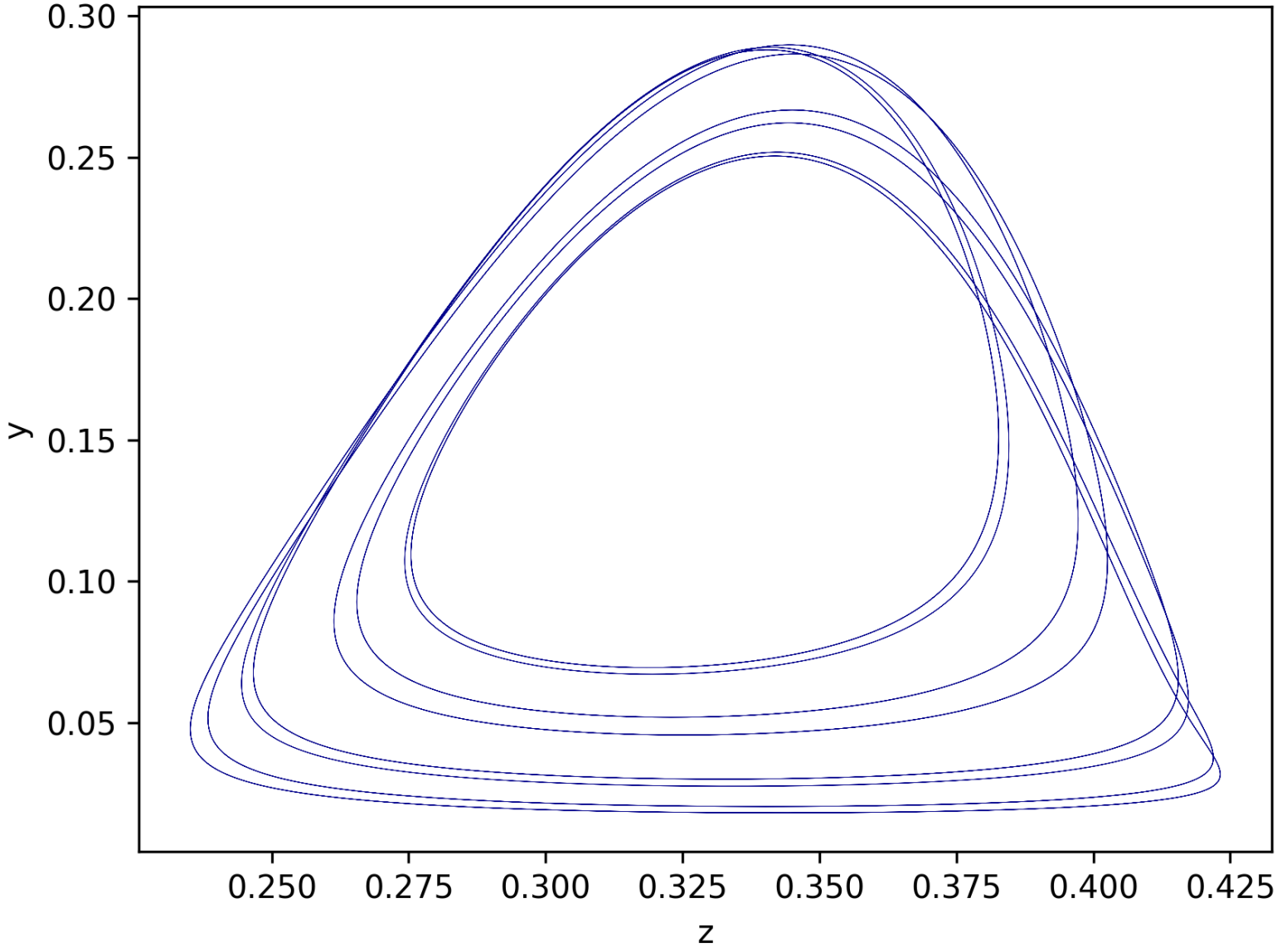



(15.5): a=0.06 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.88016, 0.01587, 0.36231)
StSt=(0.444759, 0.162717, 0.321906) Time=2000.0 Step=0.01 Start=2000
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.250
0.275
0.300
0.325
0.350
0.375
0.400
0.425
z

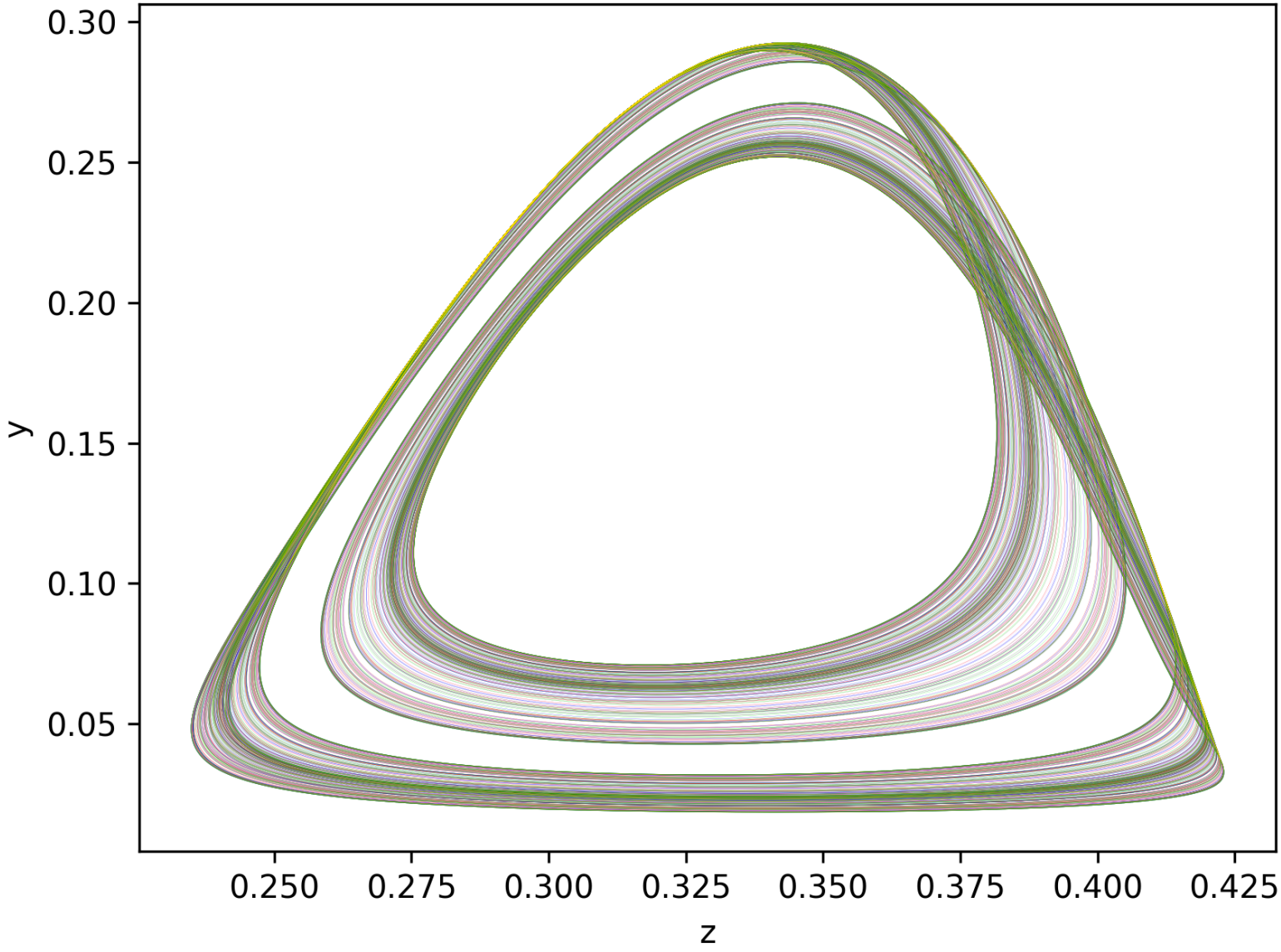
(15.5): a=0.068 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.72857, 0.05143, 0.33738)
StSt=(0.427545, 0.177275, 0.317698)   Time=3000.0   Step=0.01   Start=2000



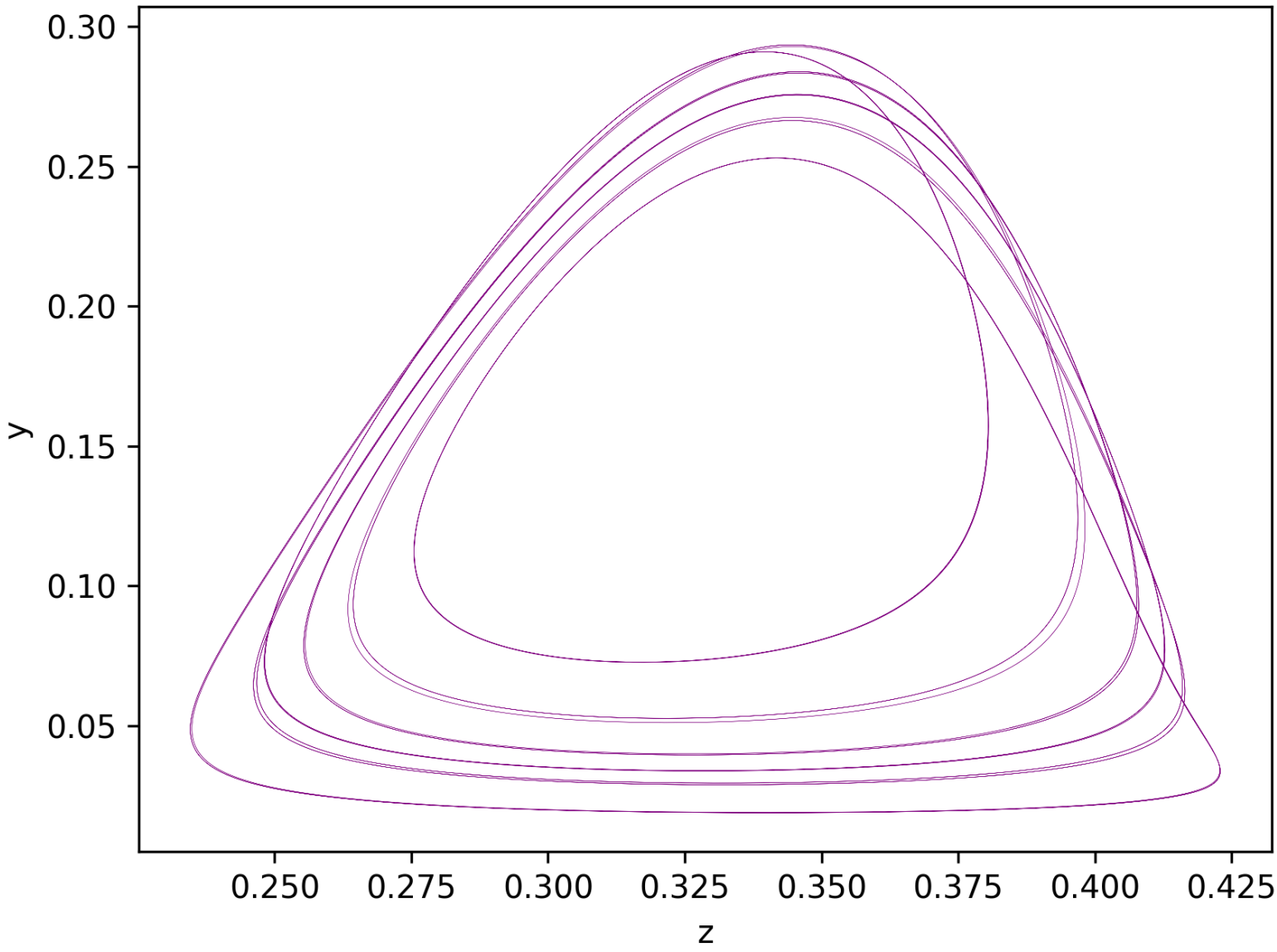
(15.5): a=0.07 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.2517, 0.2206, 0.30905)
StSt=(0.423588, 0.1808, 0.316715)   Time=3000.0   Step=0.01   Start=2000

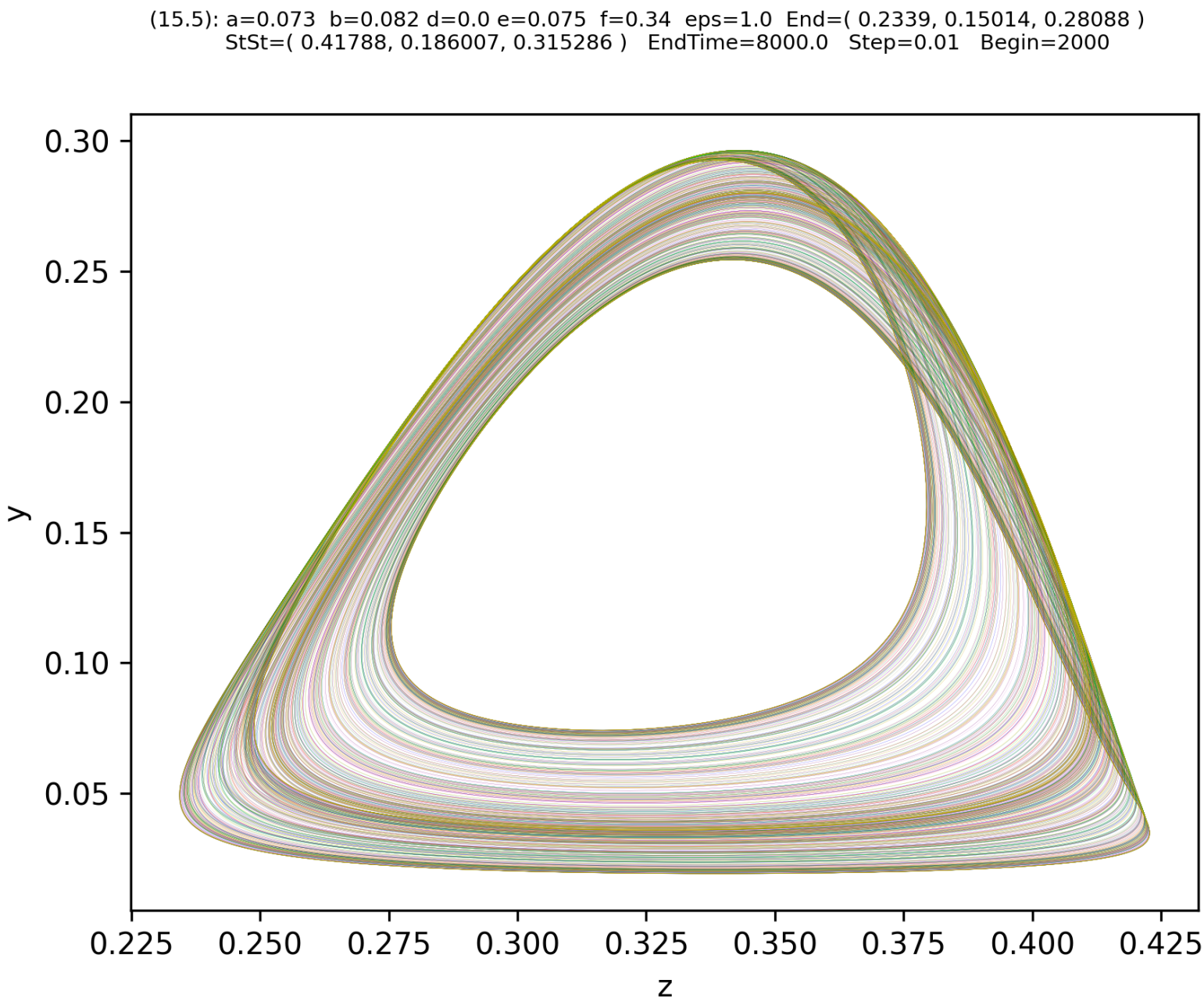


(15.5): a=0.071 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.4735, 0.07145, 0.29343)
StSt=(0.421656, 0.182546, 0.316232) EndTime=12000.0 Step=0.005 Begin=2000

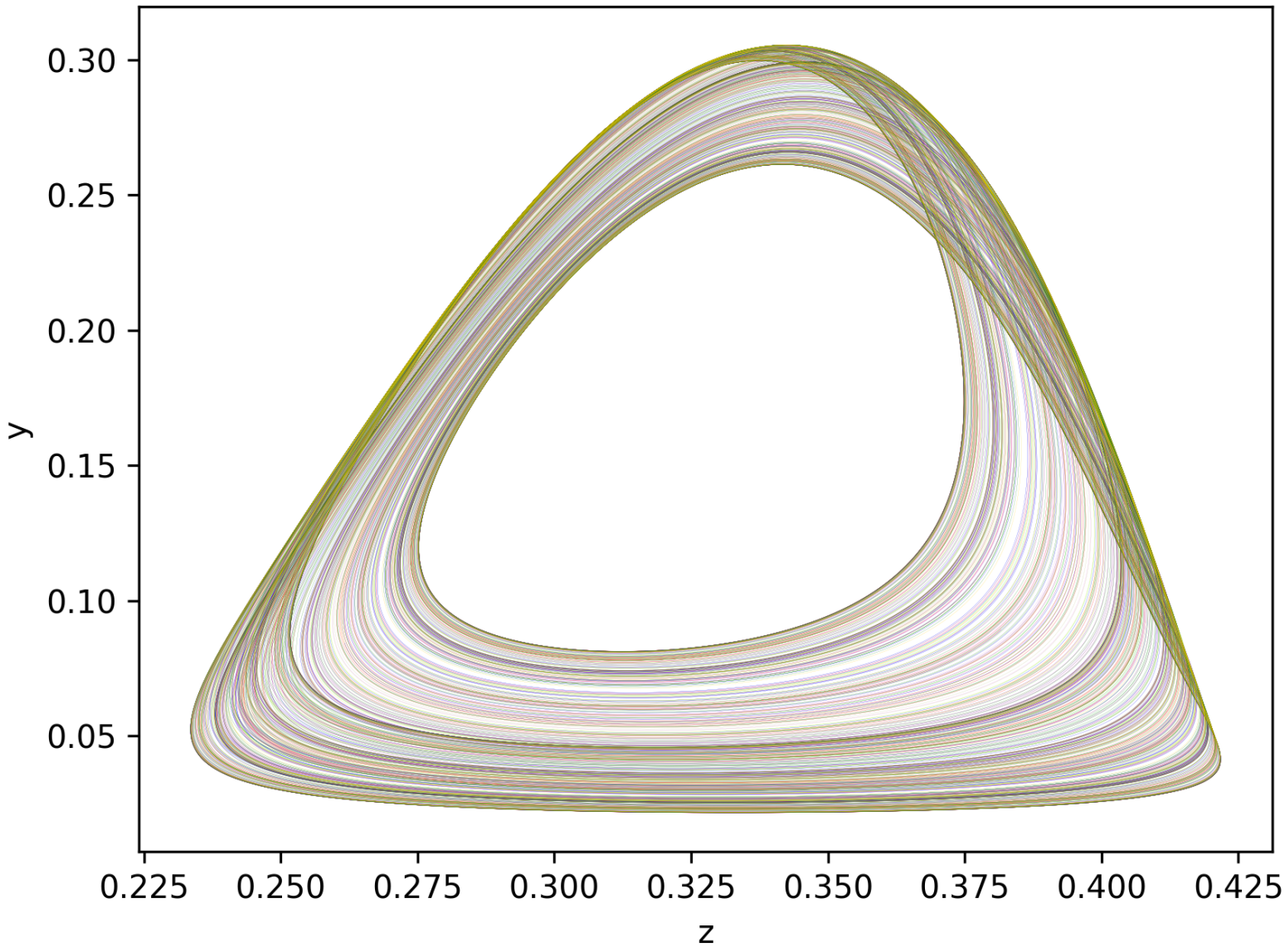


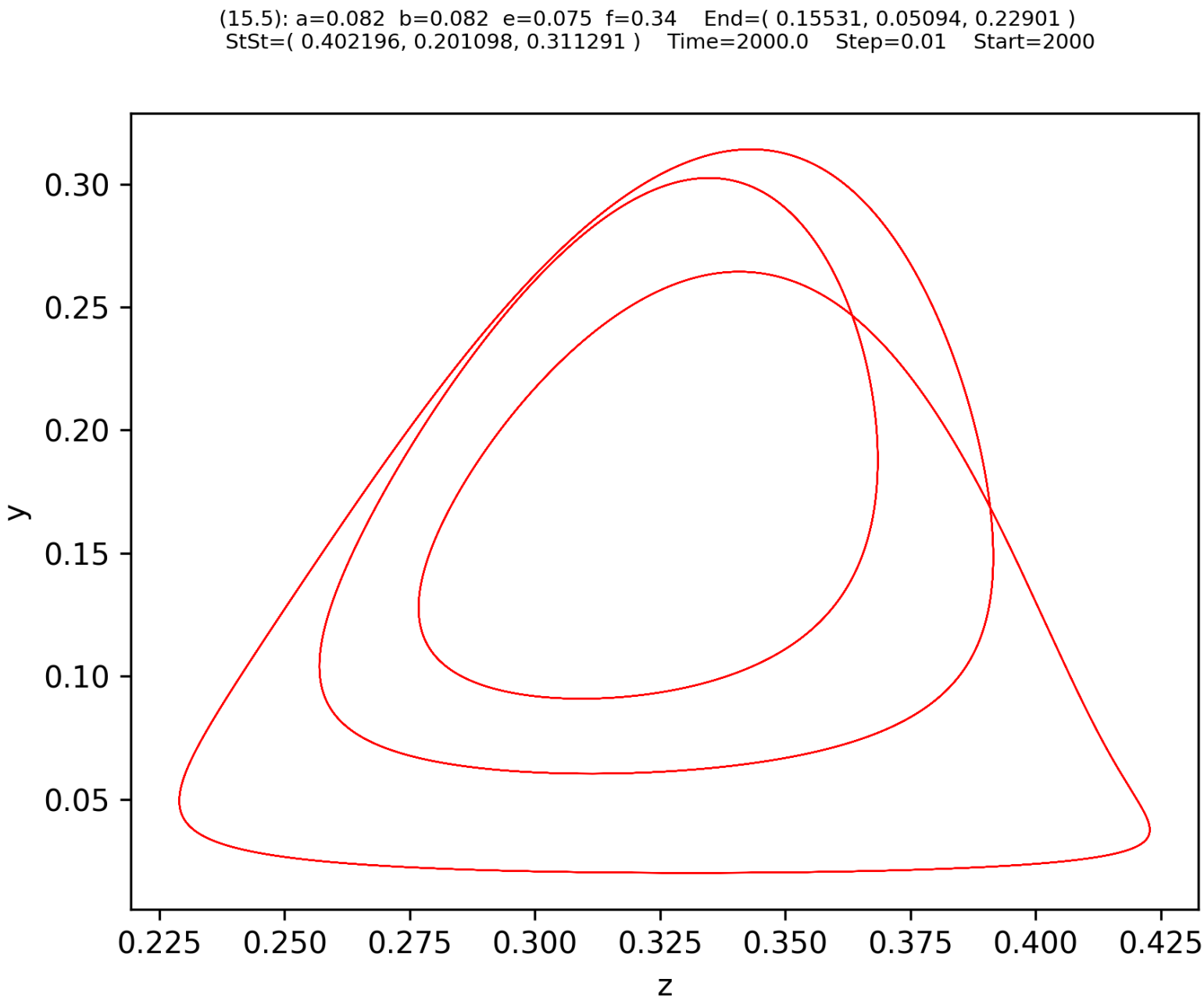
(15.5): a=0.072 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.73634, 0.15732, 0.39917)
StSt=(0.419753, 0.184282, 0.315756) Time=3000.0 Step=0.01 Start=2000

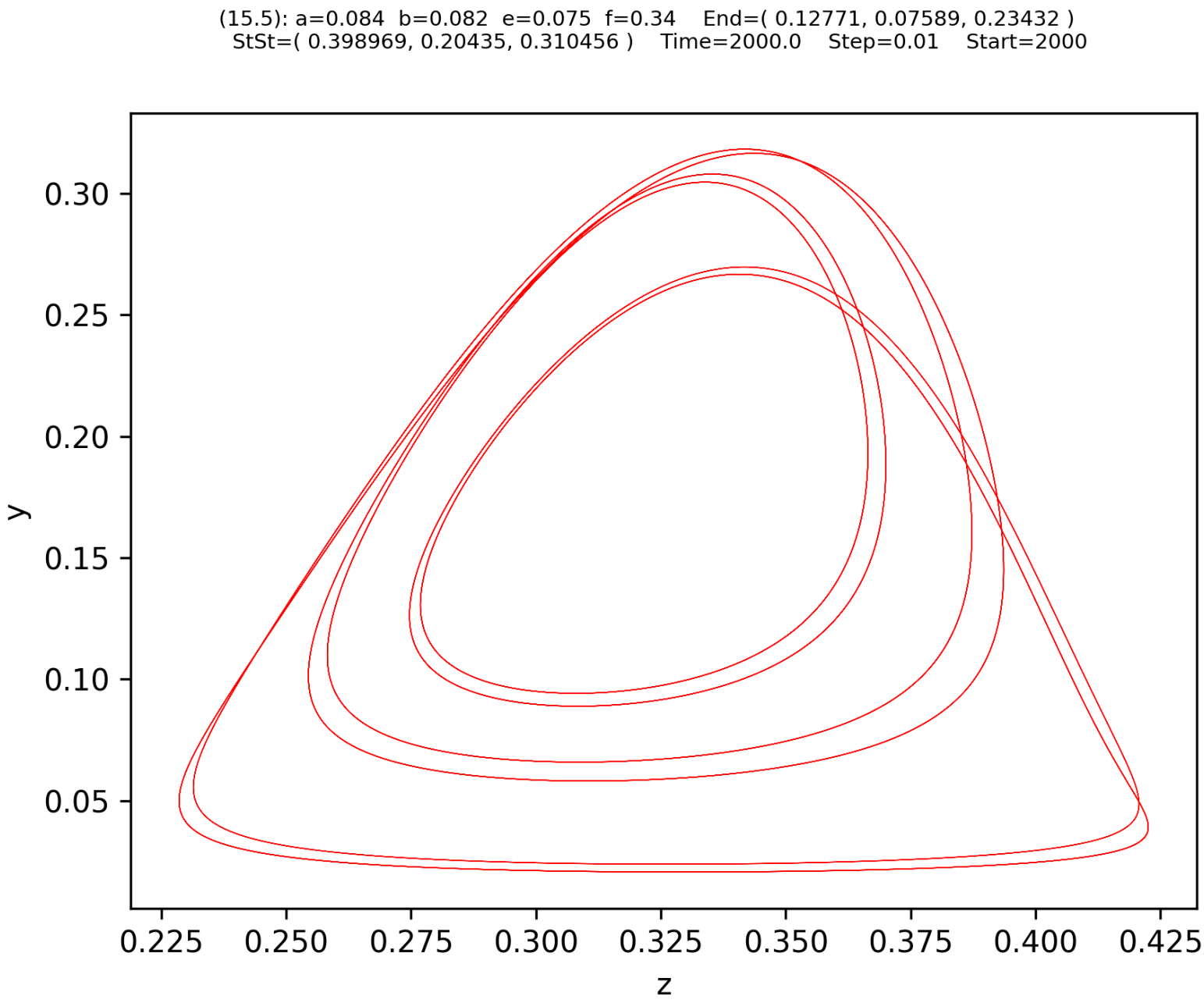


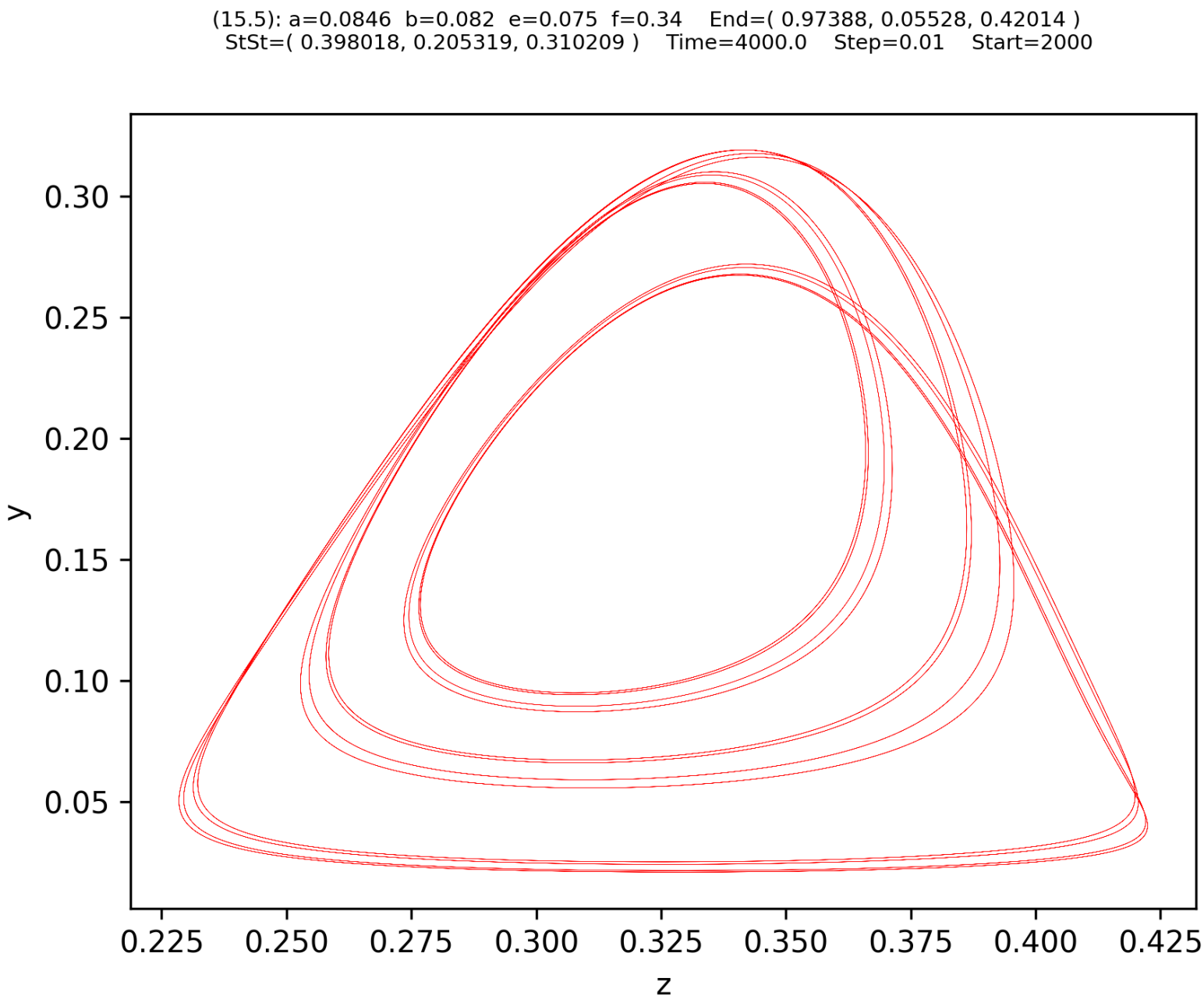

(15.5): a=0.073 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.2339, 0.15014, 0.28088)
StSt=(0.41788, 0.186007, 0.315286) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
0.350
0.375
0.400
0.425
z

(15.5): a=0.078 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.14626, 0.1478, 0.26511)
StSt=(0.408919, 0.194486, 0.313016) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000

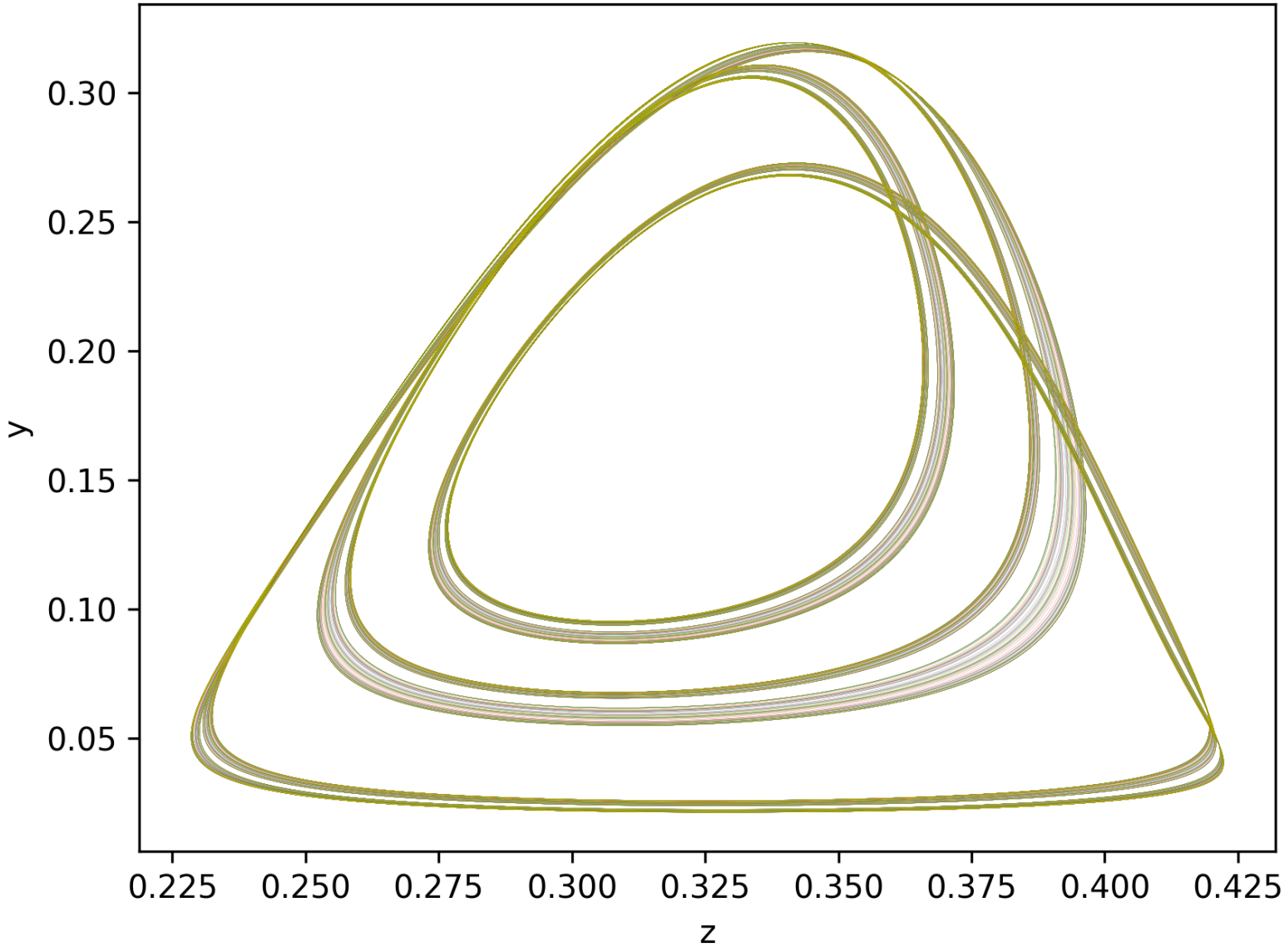



(15.5): a=0.082 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.15531, 0.05094, 0.22901)
StSt=(0.402196, 0.201098, 0.311291) Time=2000.0 Step=0.01 Start=2000
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
0.350
0.375
0.400
0.425
z

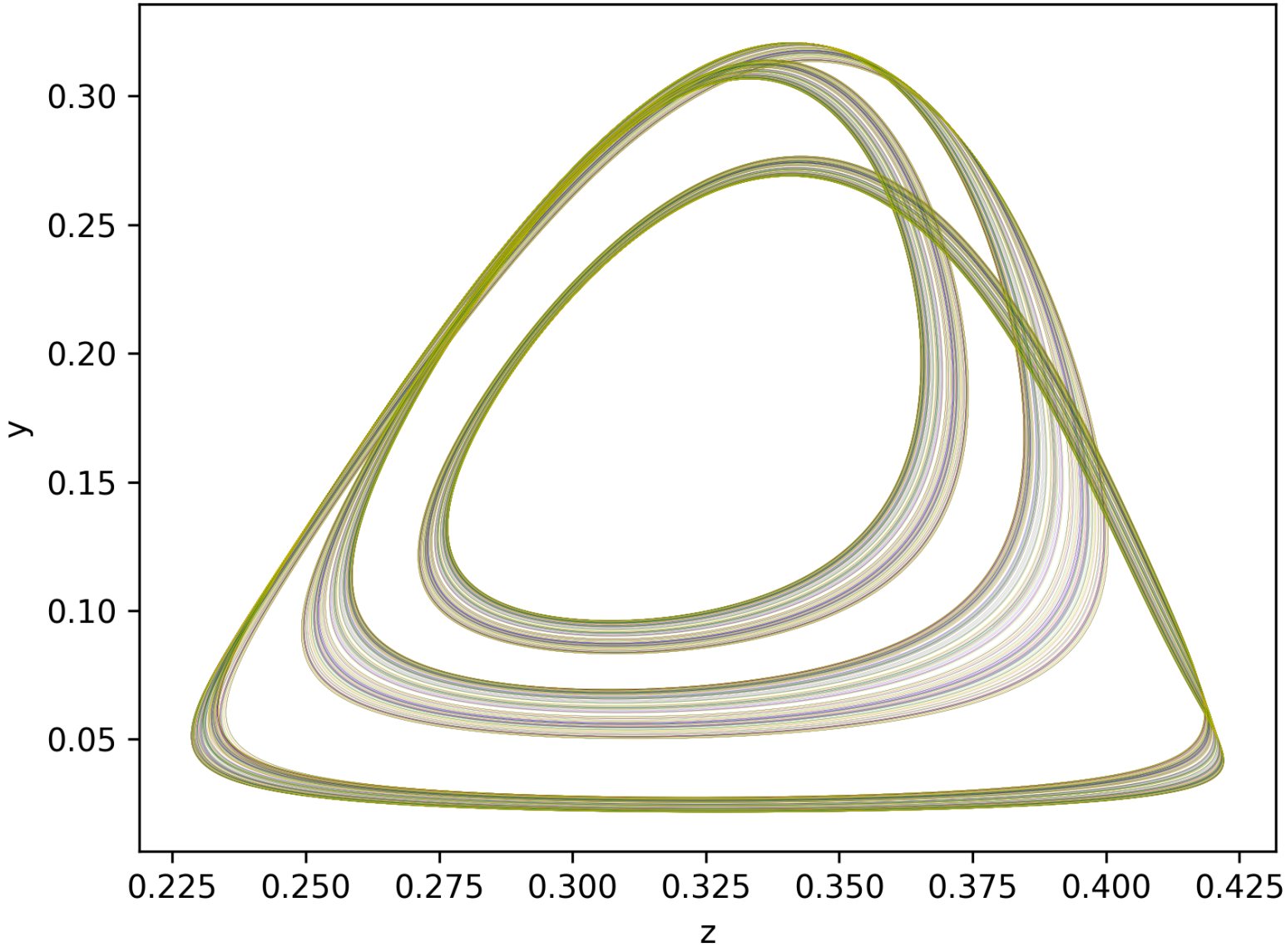

(15.5): a=0.084 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.12771, 0.07589, 0.23432)
StSt=(0.398969, 0.20435, 0.310456) Time=2000.0 Step=0.01 Start=2000
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
0.350
0.375
0.400
0.425
z

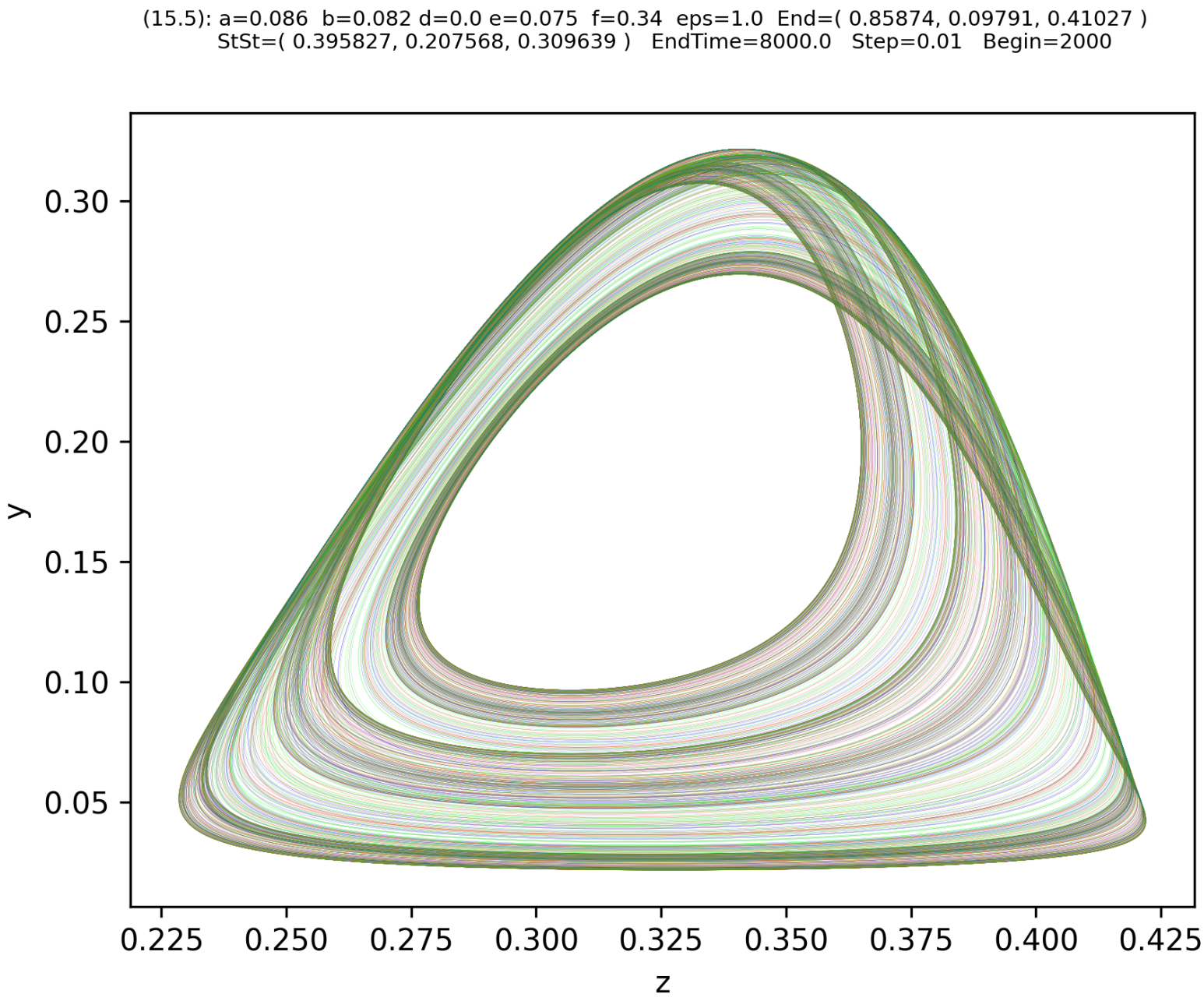

(15.5): a=0.0846 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.97388, 0.05528, 0.42014)
StSt=(0.398018, 0.205319, 0.310209) Time=4000.0 Step=0.01 Start=2000
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
0.350
0.375
0.400
0.425
z

(15.5): a=0.0848 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.42057, 0.0933, 0.28505)
StSt=(0.397703, 0.205641, 0.310127) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000

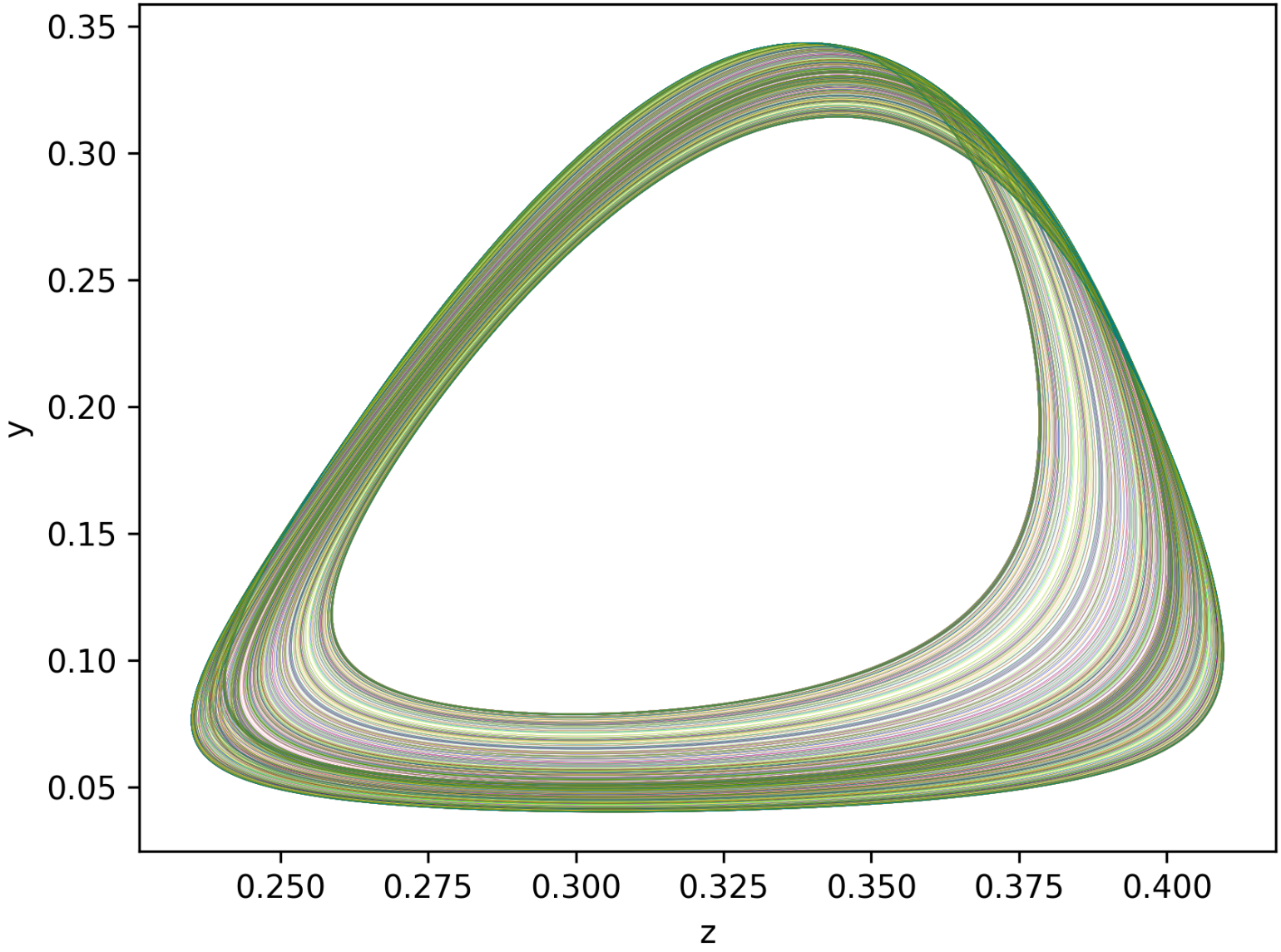


(15.5): a=0.0856 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.11338, 0.08507, 0.23607)
StSt=(0.396449, 0.206927, 0.309801) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000

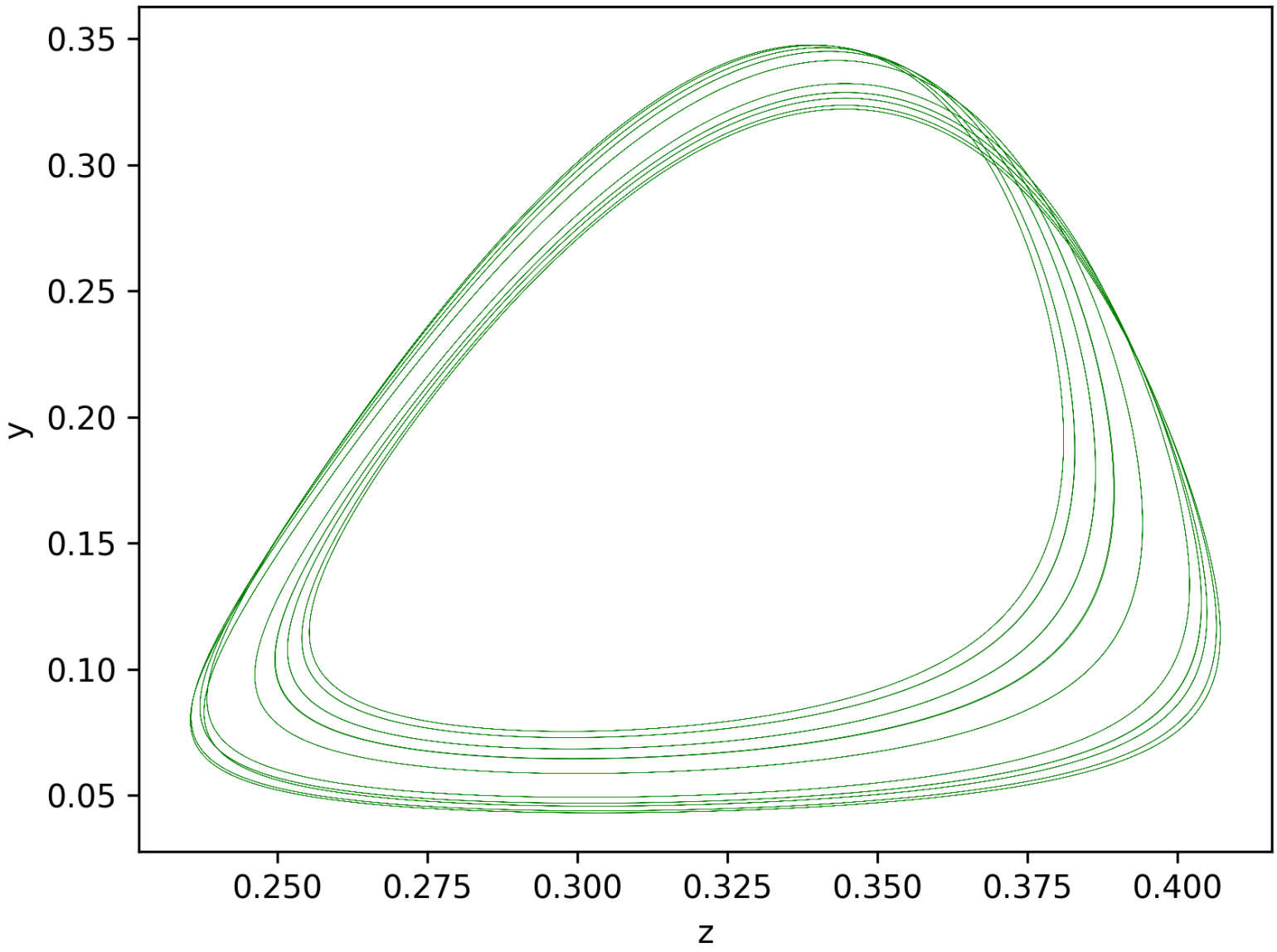



(15.5): a=0.086 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.85874, 0.09791, 0.41027)
StSt=(0.395827, 0.207568, 0.309639) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
y
0.225
0.250
0.275
0.300
0.325
0.350
0.375
0.400
0.425
z

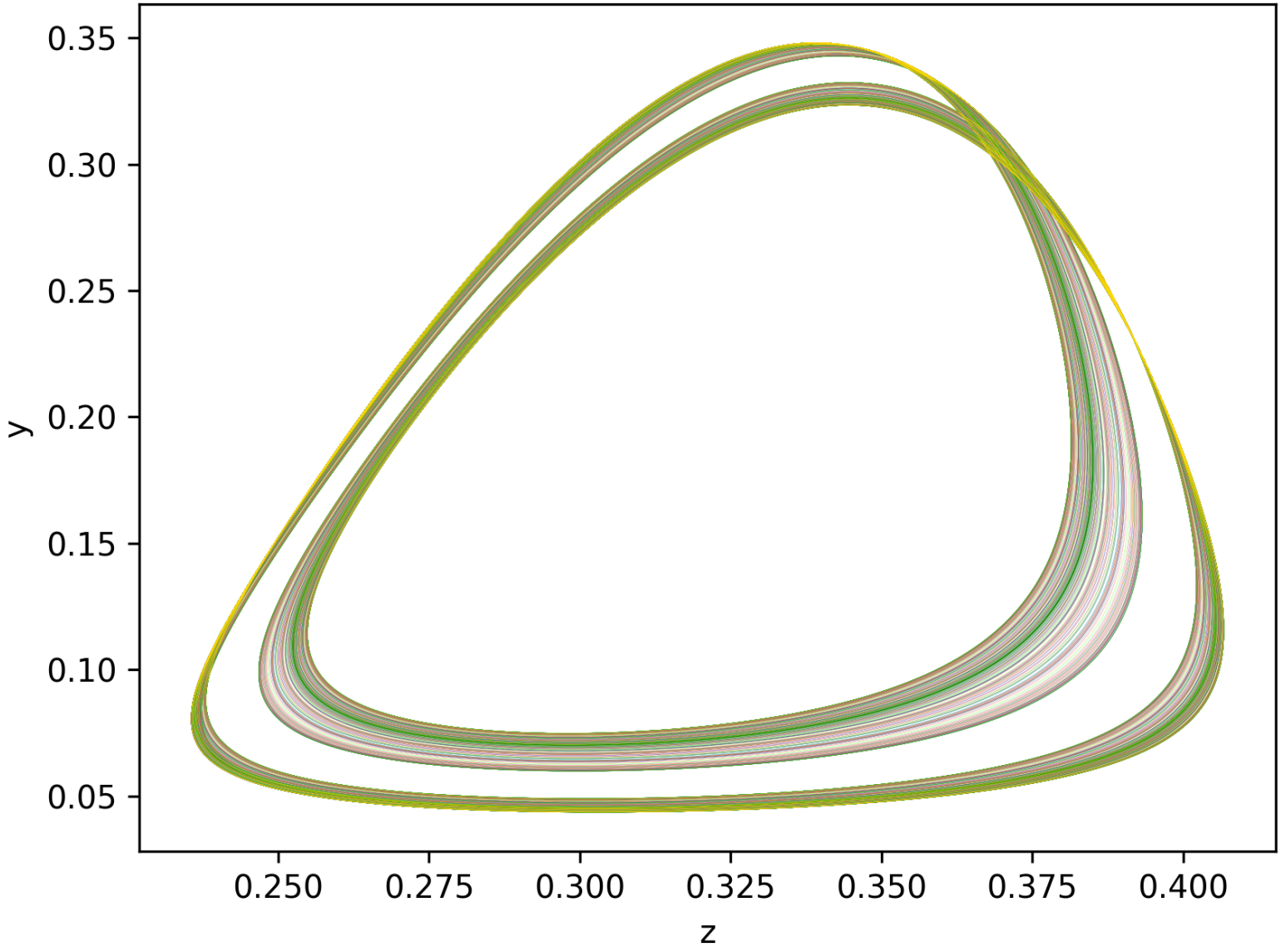
(15.5): a=0.102 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.21084, 0.127, 0.2591)
StSt=(0.373292, 0.23217, 0.303648) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000



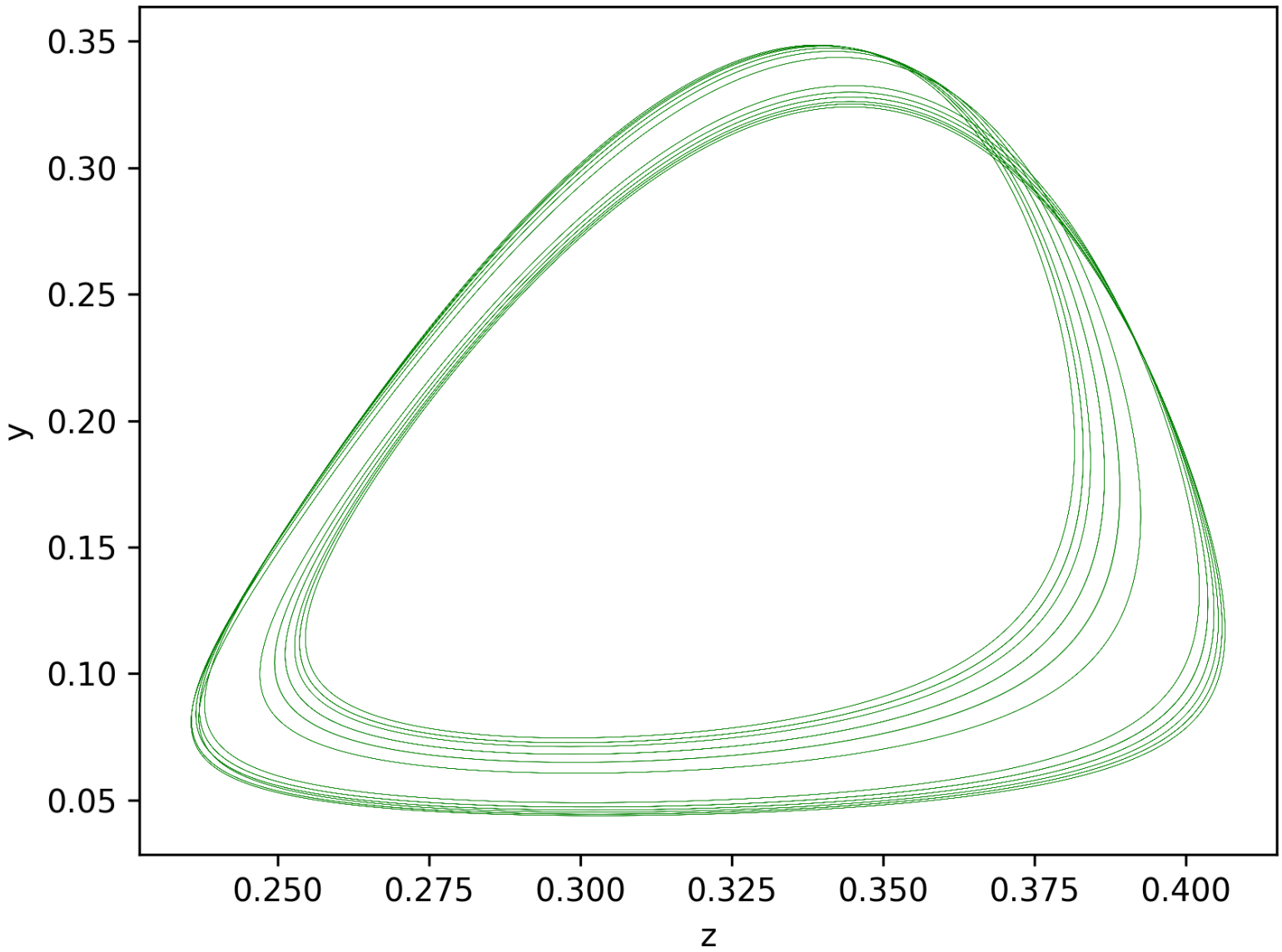
(15.5): a=0.105 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.16645, 0.29765, 0.29994)
StSt=(0.369508, 0.236575, 0.302618) Time=4000.0 Step=0.01 Start=2000



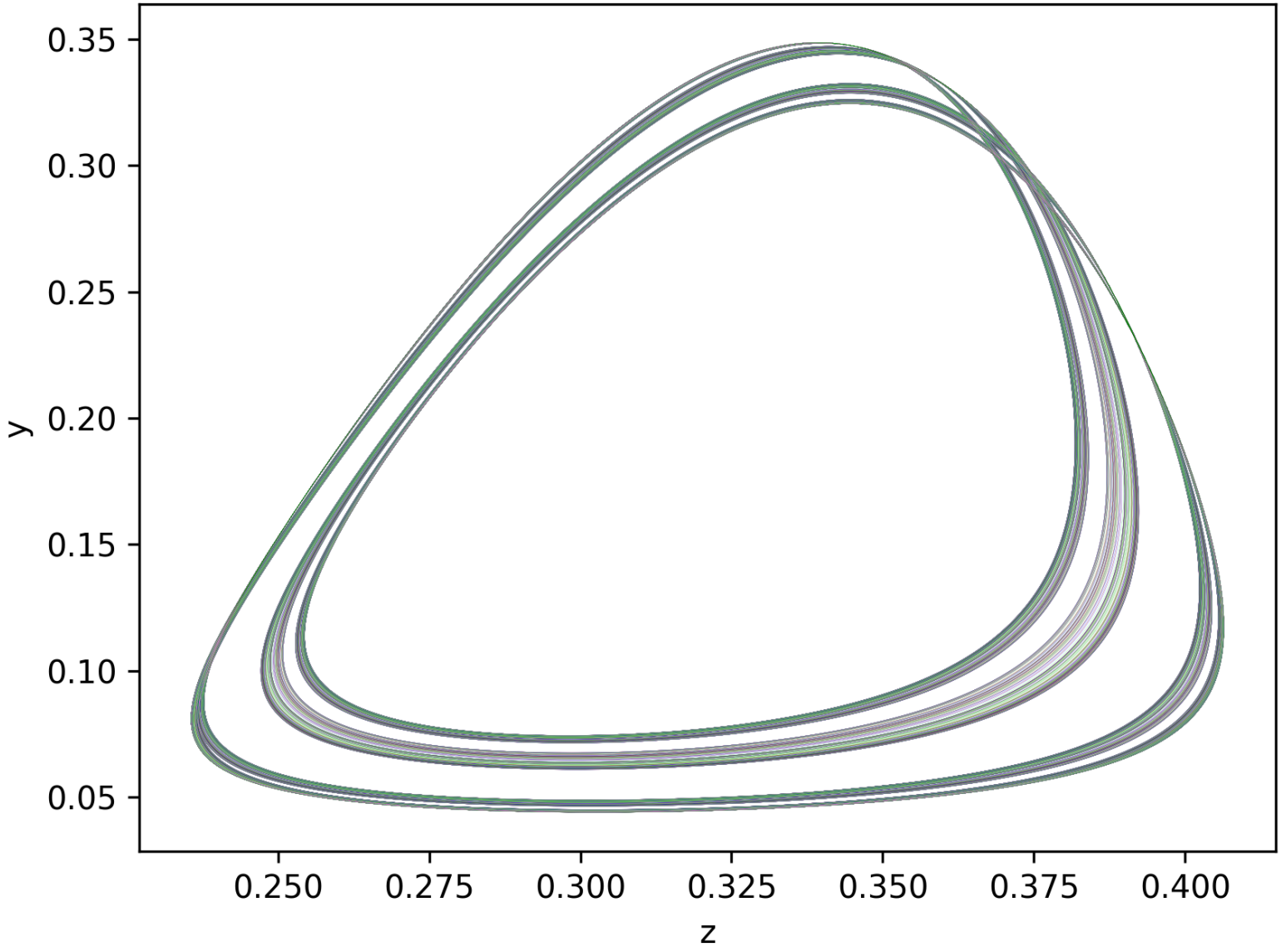
(15.5): a=0.1054 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.25687, 0.08403, 0.24896)
StSt=(0.369013, 0.237158, 0.302483) EndTime=6000.0 Step=0.01 Begin=2000



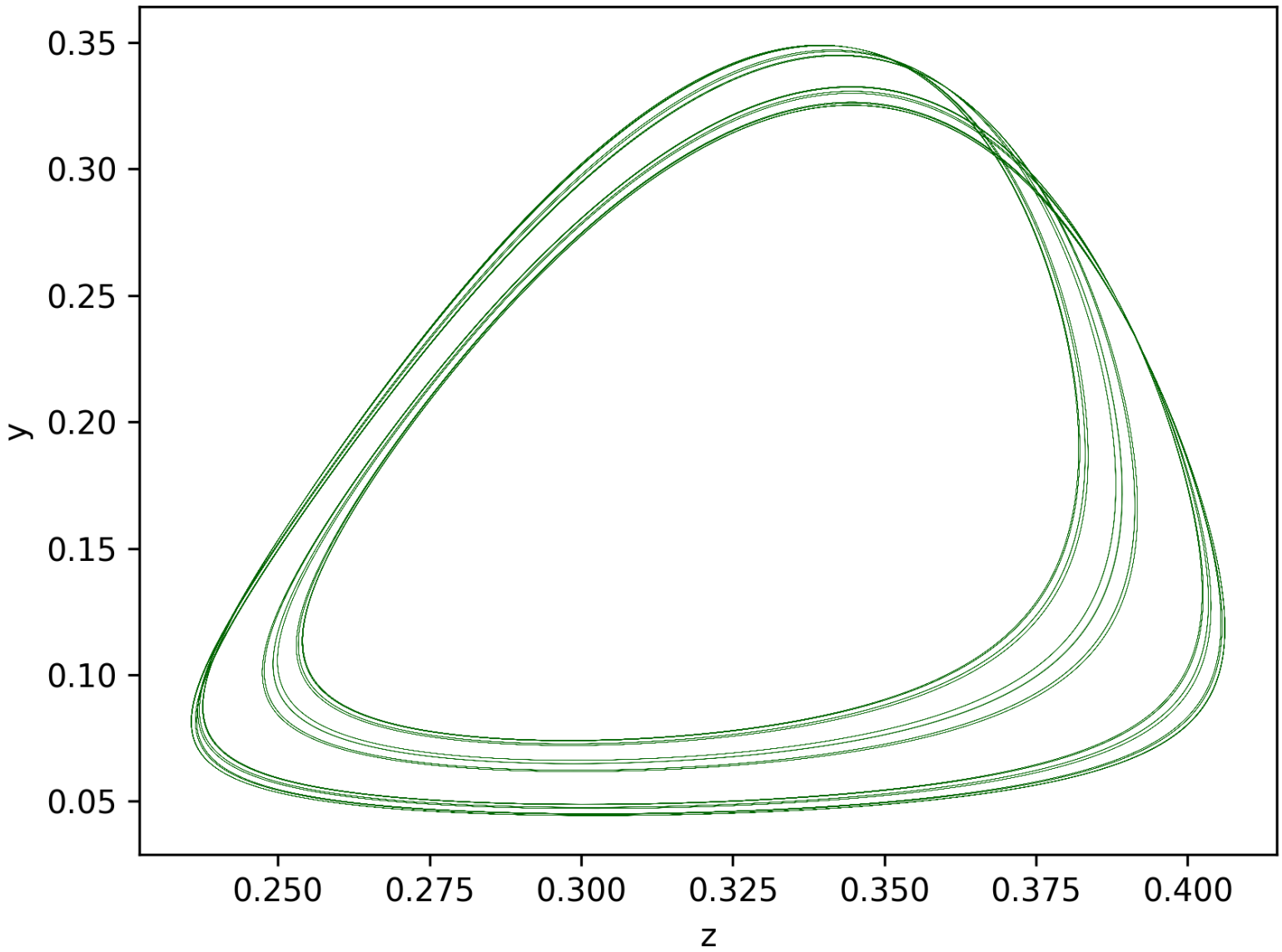
(15.5): a=0.1057 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.51862, 0.28181, 0.37941)
StSt=(0.368643, 0.237595, 0.302382)   Time=4000.0   Step=0.005   Start=4000



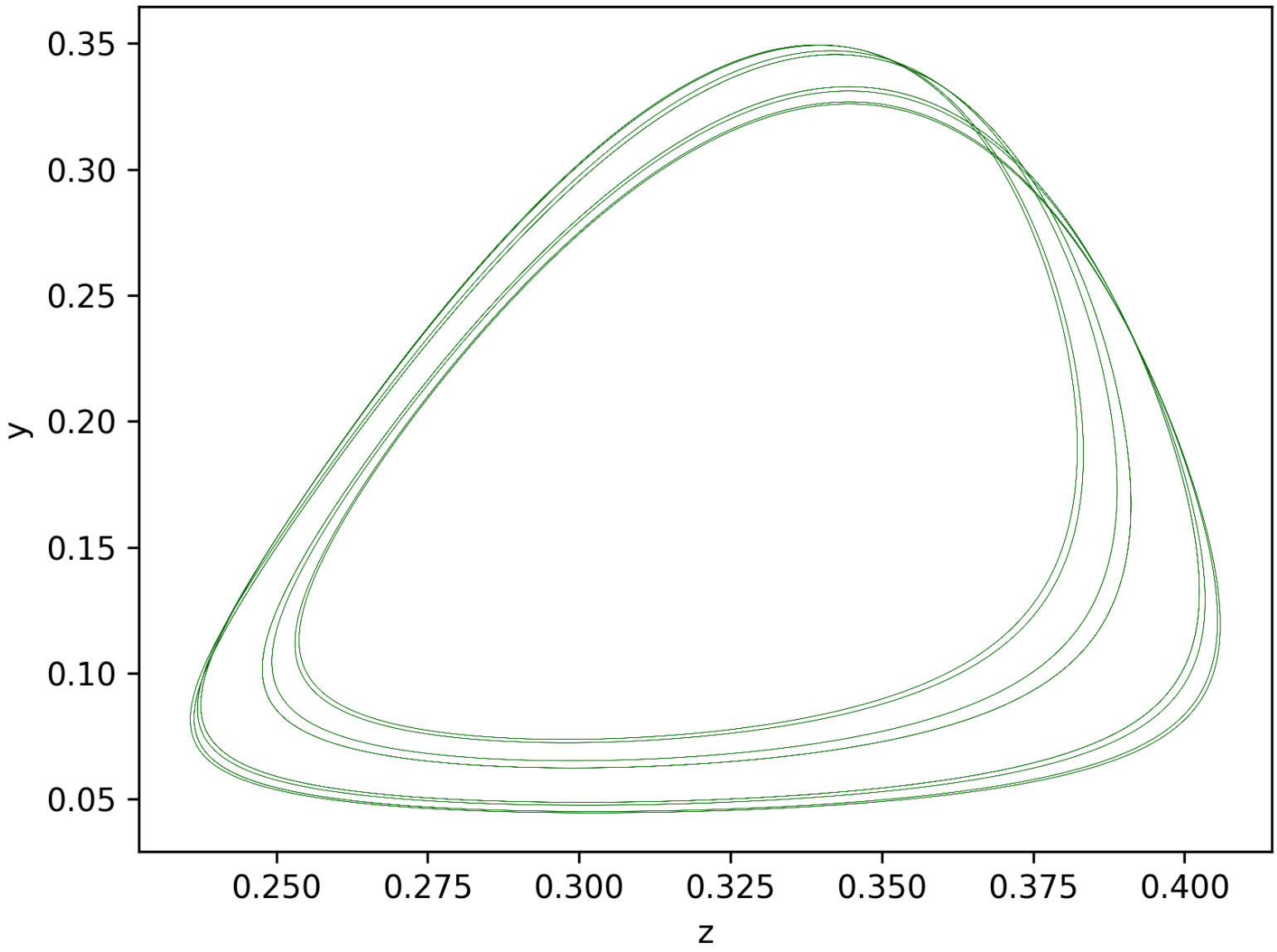
(15.5): a=0.1058 b=0.082 d=0.0 e=0.075 f=0.34 eps=1.0 End=(0.32119, 0.05638, 0.24571)
StSt=(0.36852, 0.23774, 0.302348) EndTime=8000.0 Step=0.01 Begin=2000



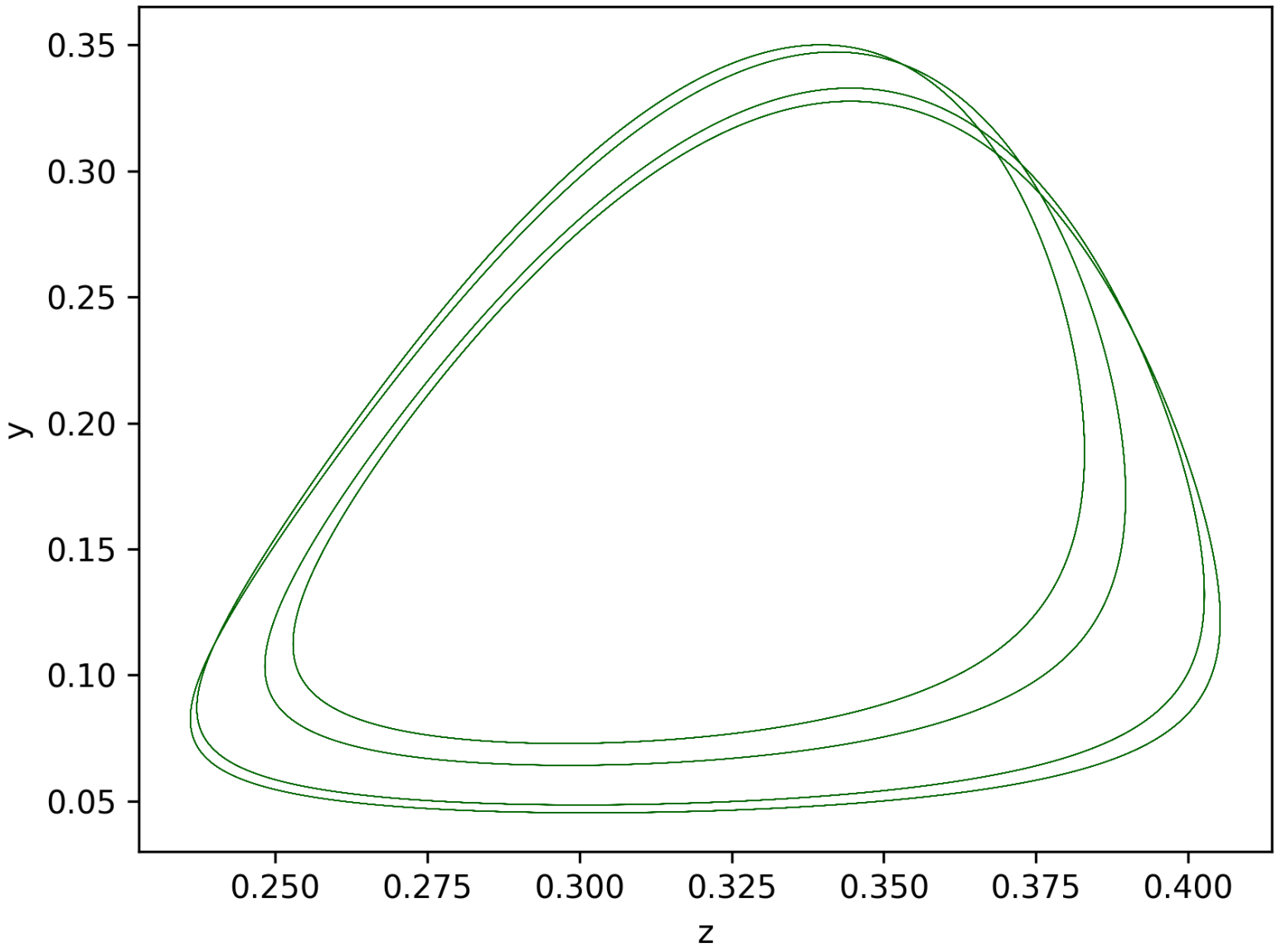
(15.5): a=0.1061 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.70899, 0.20218, 0.39735)
StSt=(0.368151, 0.238176, 0.302247)   Time=12000.0   Step=0.005   Start=20000



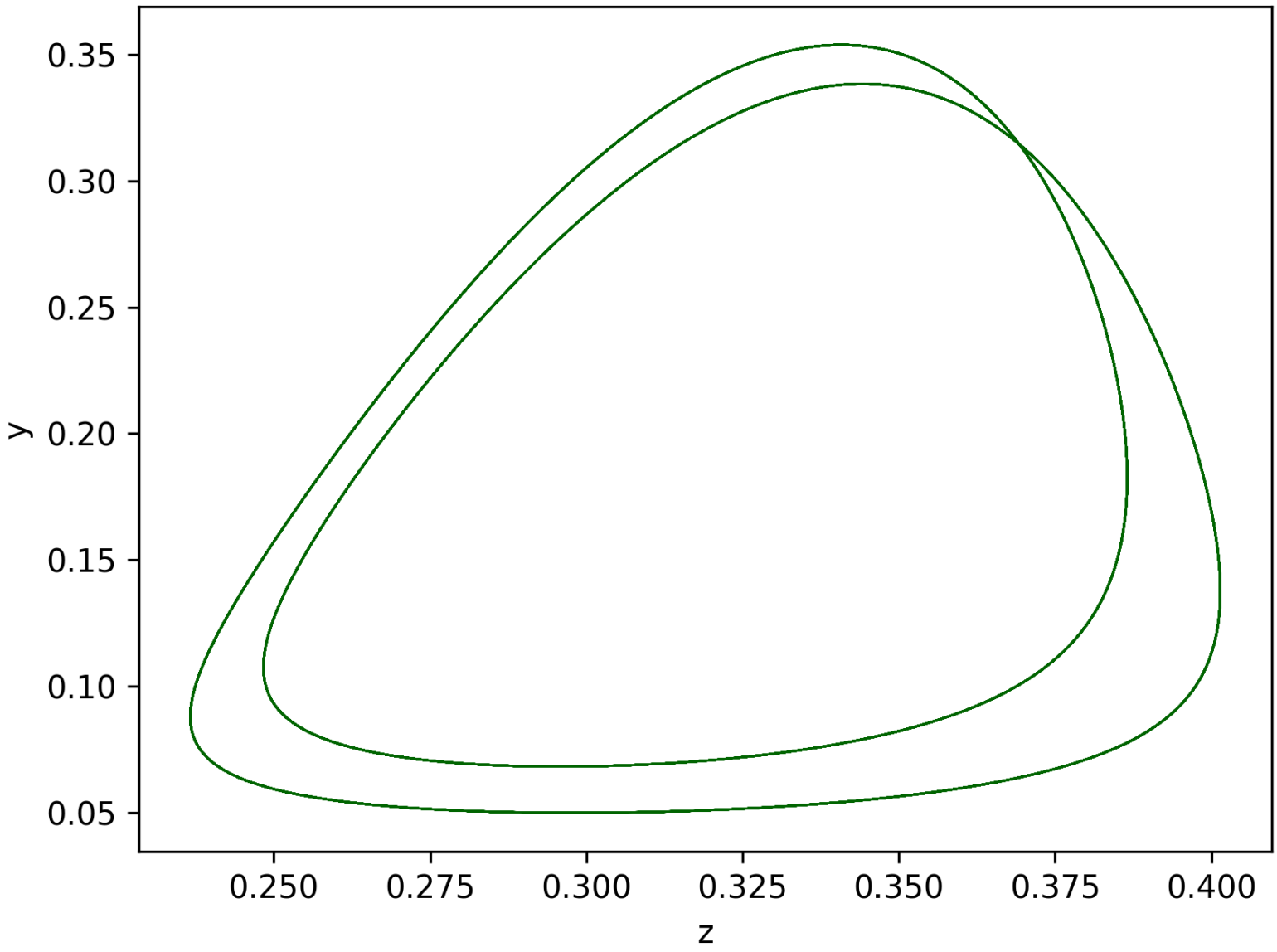
(15.5): a=0.1064 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.55485, 0.04651, 0.27774)
StSt=(0.367784, 0.238611, 0.302147)   Time=2000.0   Step=0.005   Start=2000



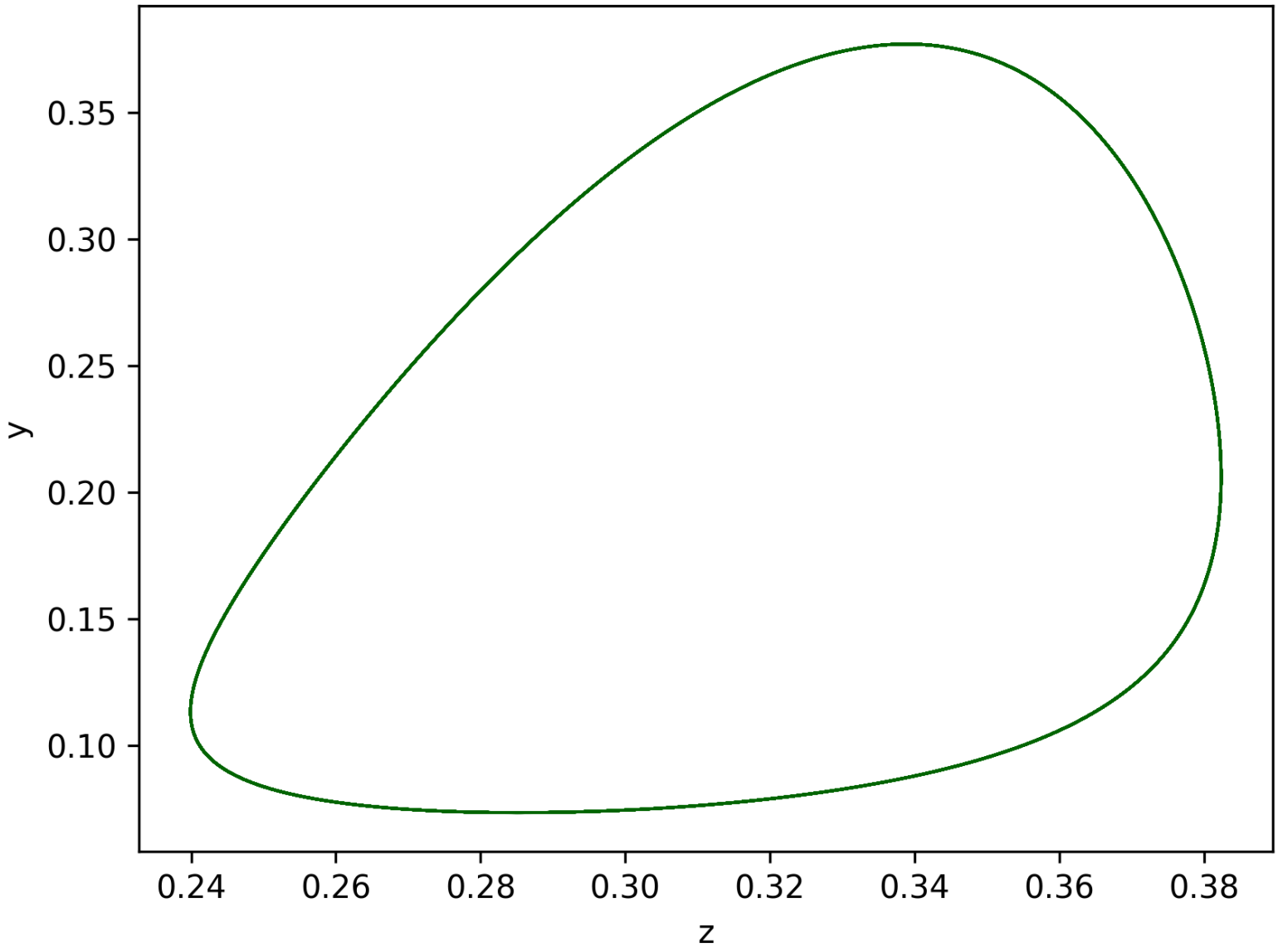
(15.5): a=0.107 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.23625, 0.32362, 0.32671)
StSt=(0.367052, 0.239479, 0.301946)   Time=2000.0   Step=0.005   Start=2000



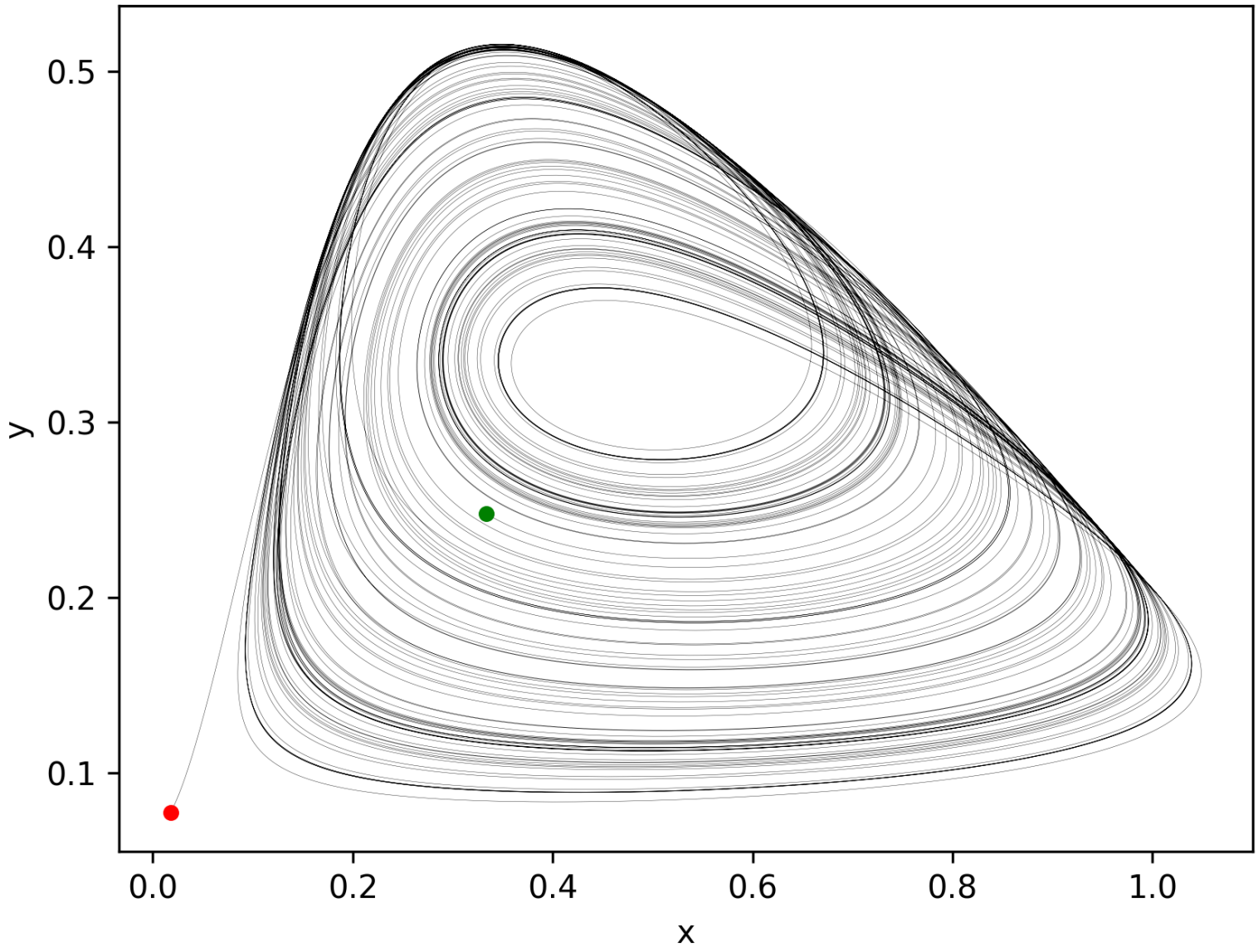
(15.5): a=0.111 b=0.082 e=0.075 f=0.34 End=(0.58693, 0.05067, 0.28257)
StSt=(0.362291, 0.245209, 0.300635) Time=2000.0 Step=0.005 Start=2000



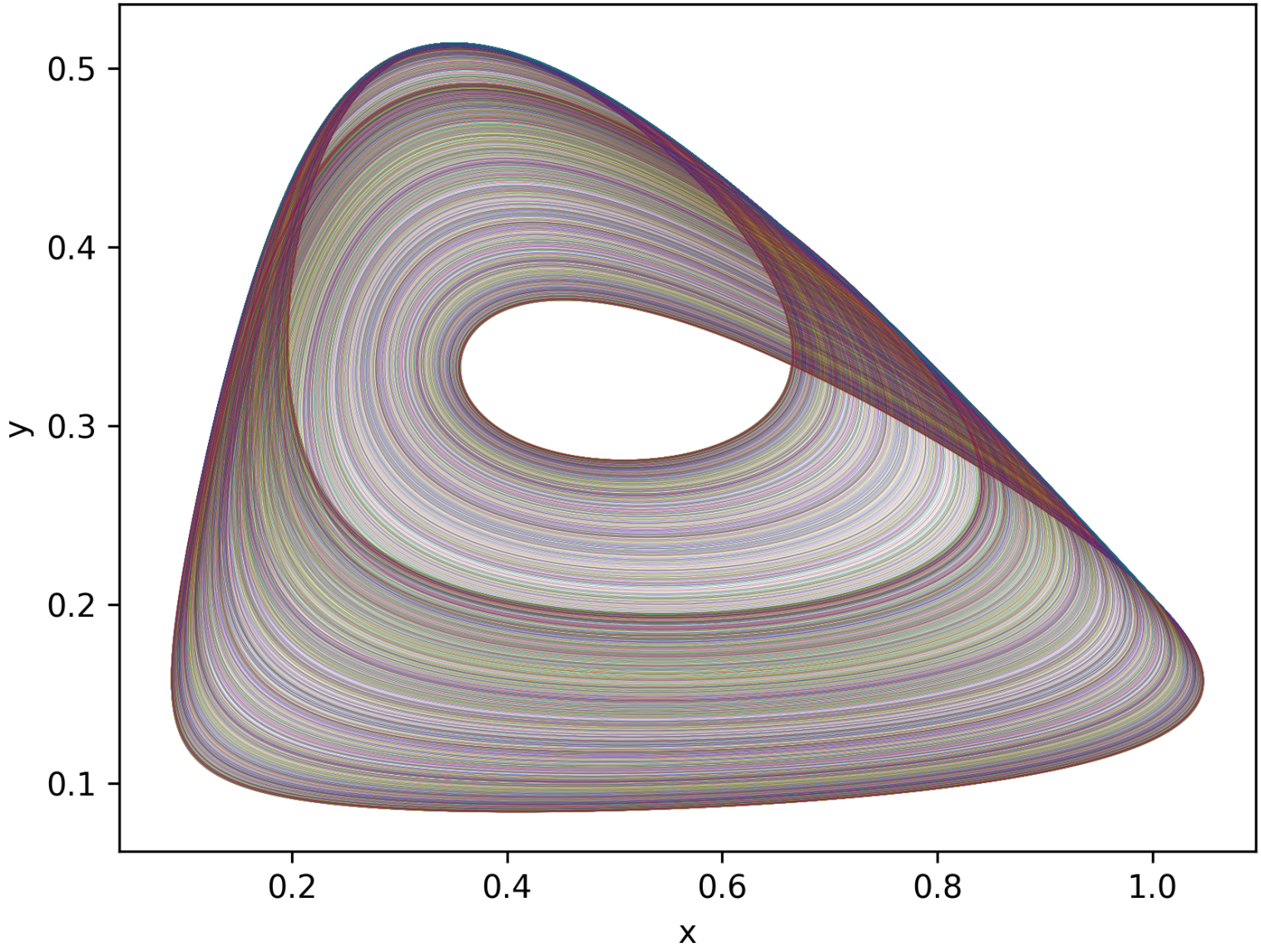
(15.5): a=0.13 b=0.082 e=0.075 f=0.34   End=(0.21589, 0.10342, 0.24056)
StSt=(0.342041, 0.27113, 0.294926)   Time=2000.0   Step=0.005   Start=2000



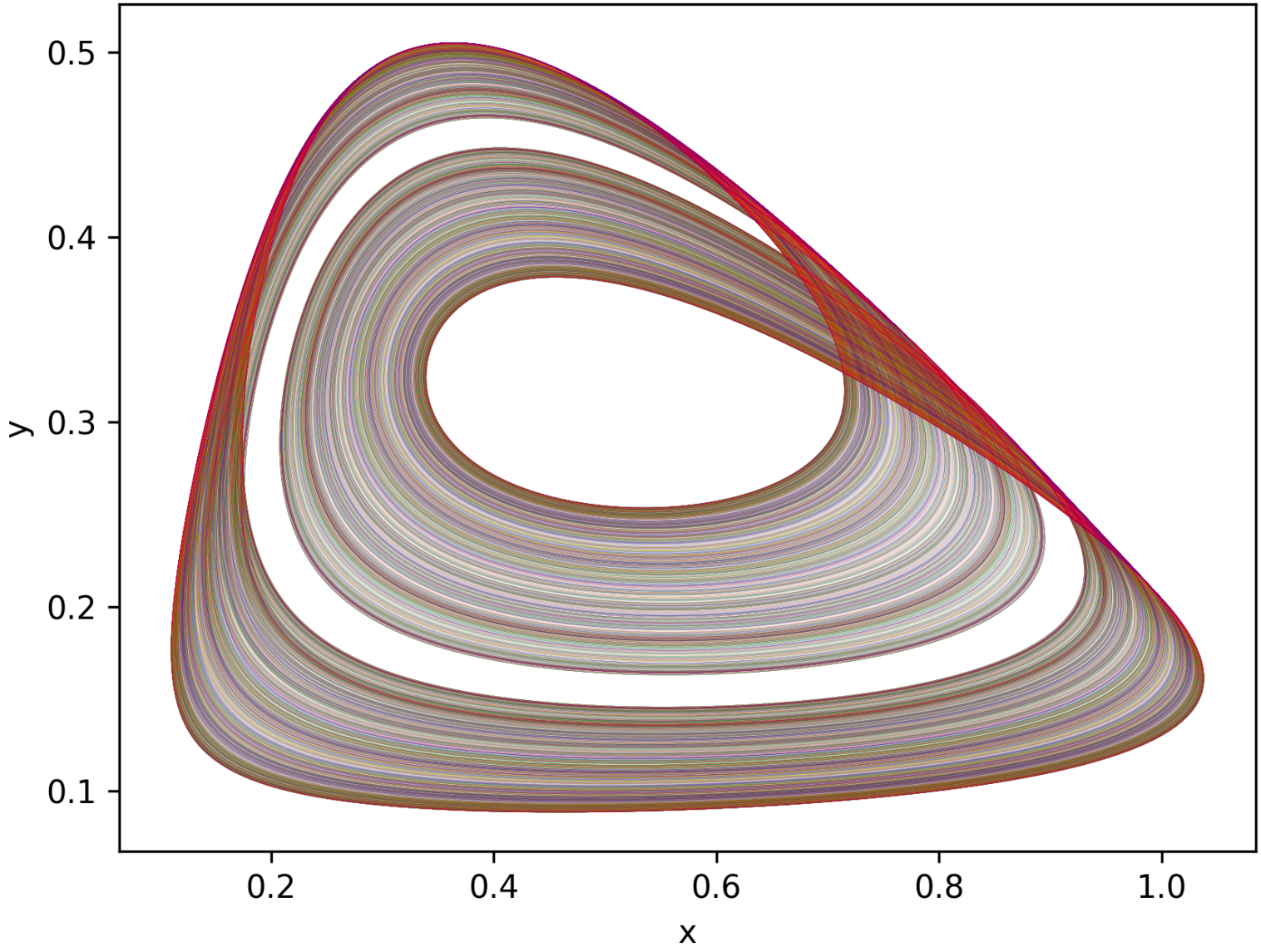
(15.0): a=1.0, b=1.15, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.01767, 0.07719, 0.1645)
StSt=(0.402066, 0.441319, 1.378133)   Time=676.0   Step=0.004   Begin=0



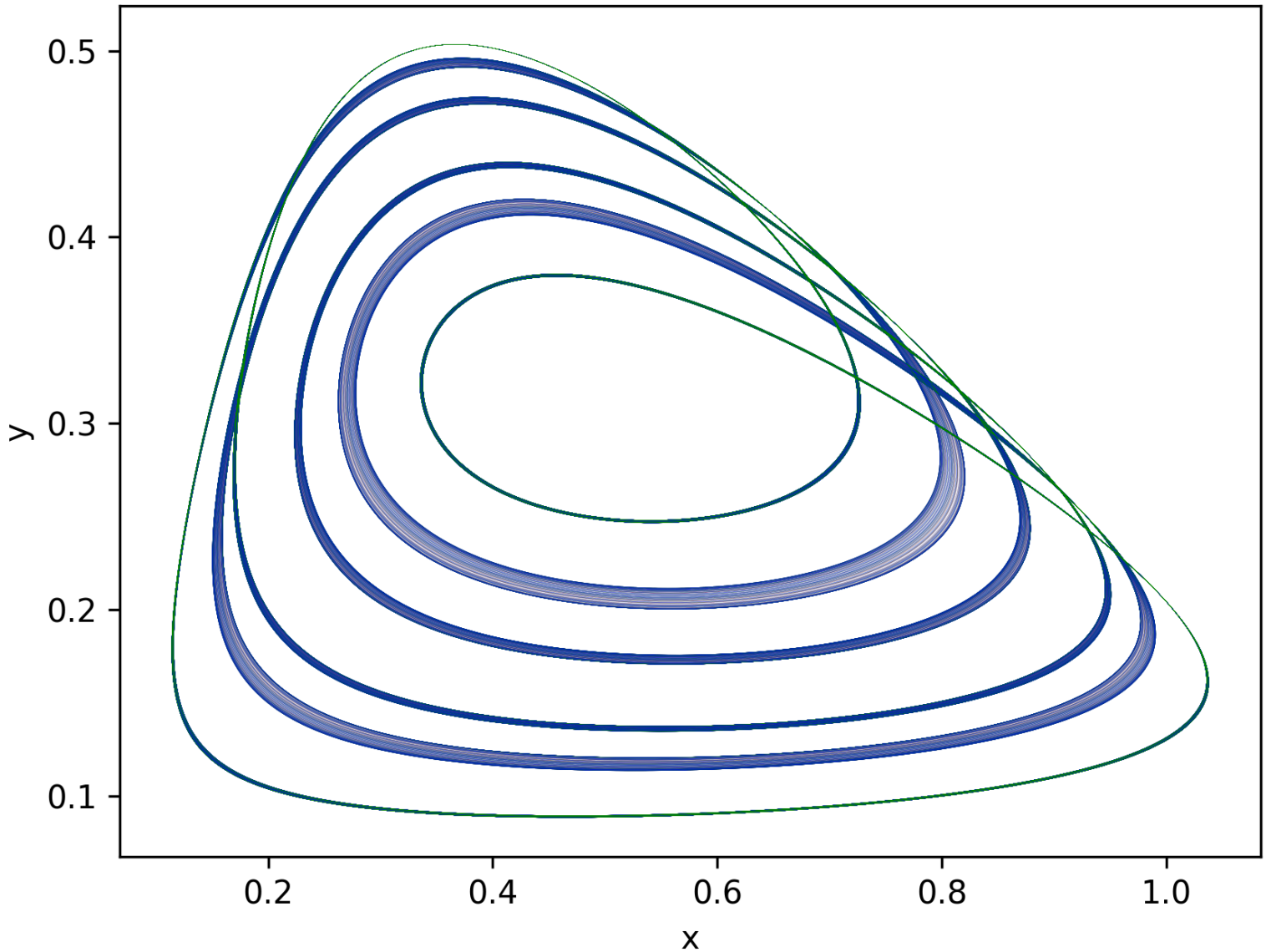
(15.0): a=1.0, b=1.16, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.77817, 0.13673, 1.51373)
StSt=(0.404502, 0.439342, 1.381832)   Time=3000.0   Step=0.004   Begin=1000



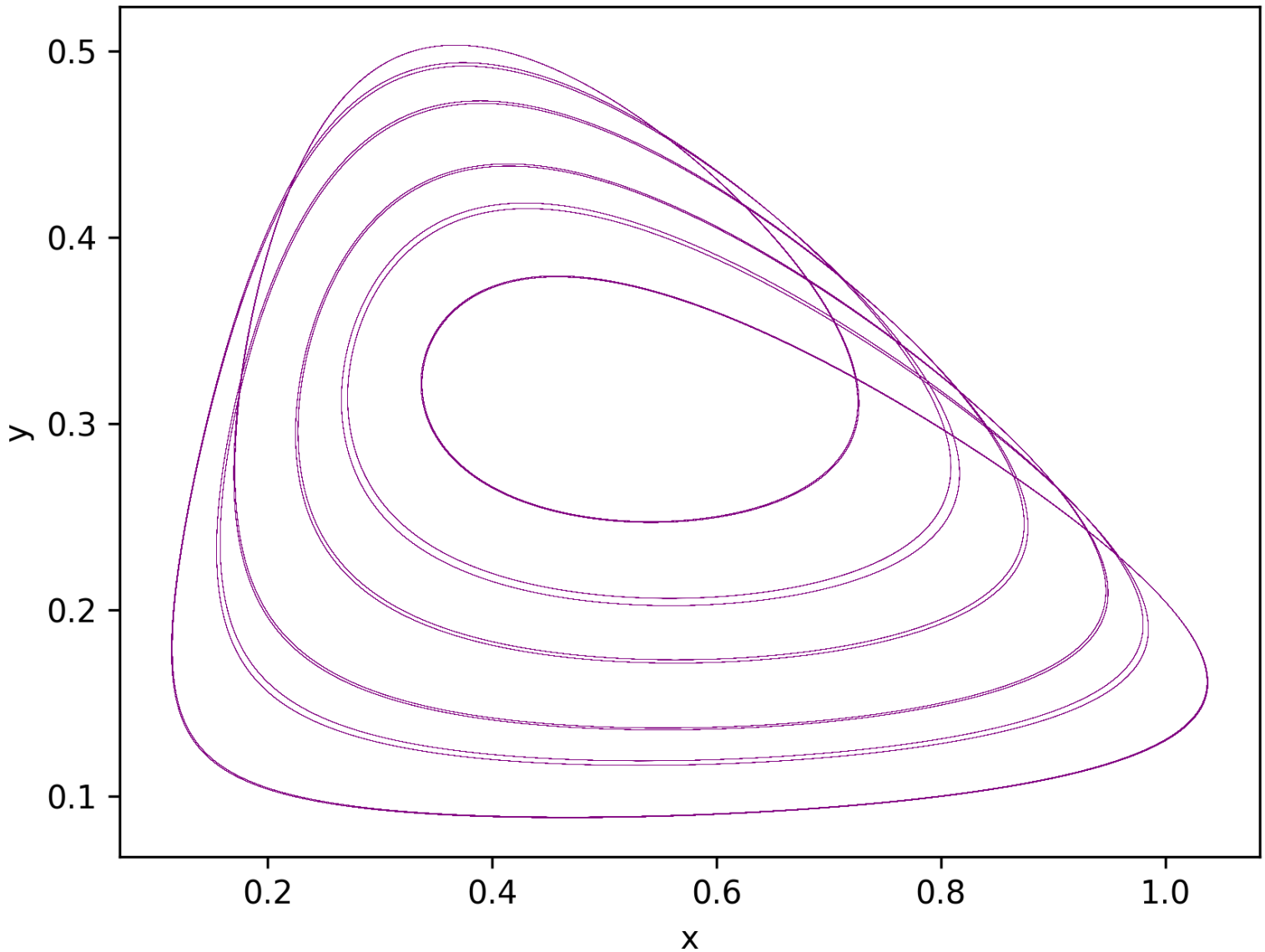
(15.0): a=1.0, b=1.24, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.81482, 0.31873, 2.21144)
StSt=(0.423053, 0.424487, 1.4102)   Time=3000.0   Step=0.004   Begin=1000



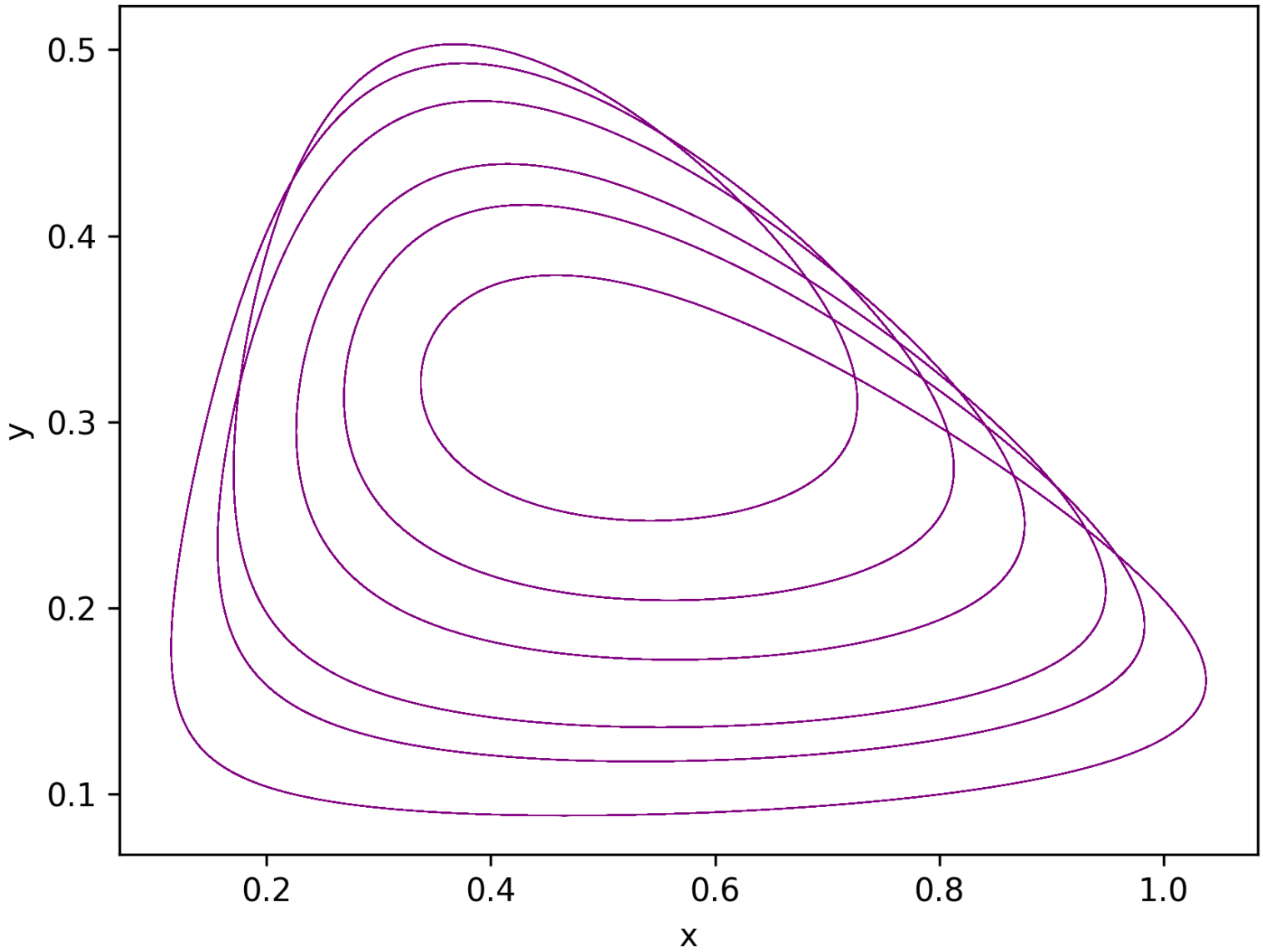
(15.0): a=1.0, b=1.26, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.68108, 0.12382, 1.30451)
StSt=(0.427447, 0.421018, 1.41697)   Time=3000.0   Step=0.004   Begin=1000



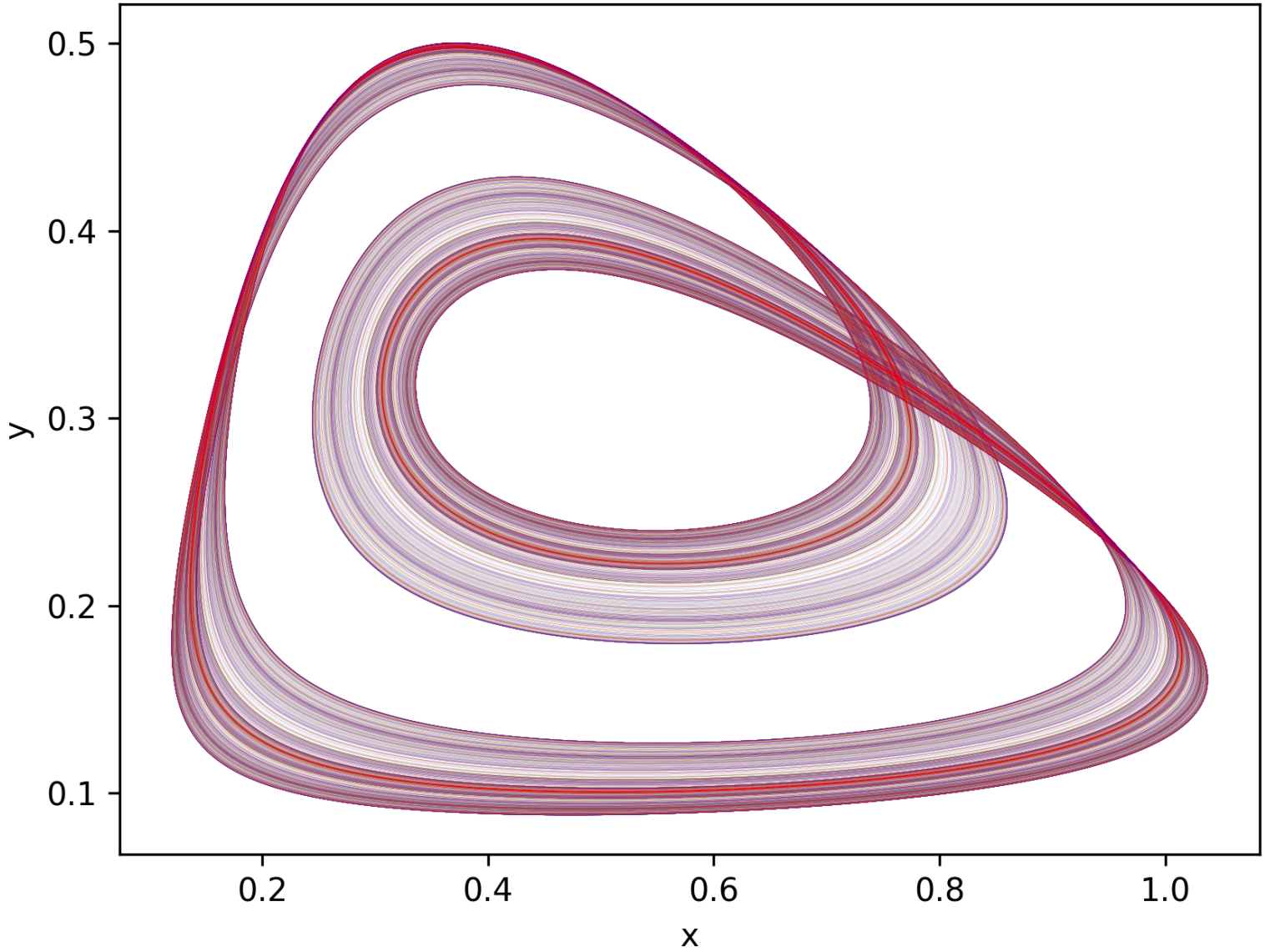
(15.0): a=1.0, b=1.2624, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=[0.37477, 0.50304, 1.55656]
StSt=(0.428, 0.4206, 1.4178)   Time=4000.0   Step=0.001   Begin=1000



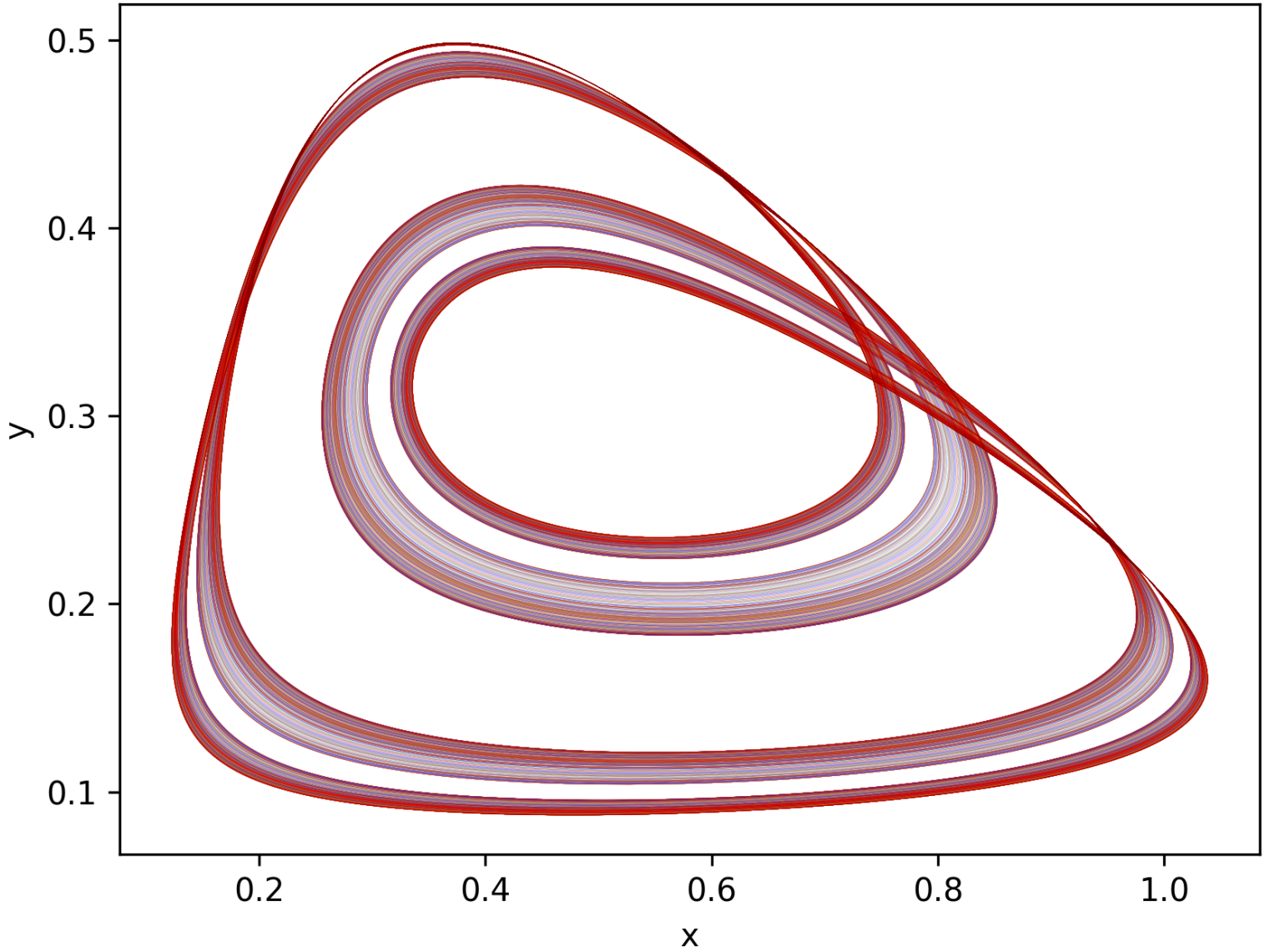
(15.0): a=1.0, b=1.264, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=[0.70395, 0.27676, 1.72759]
StSt=(0.4283, 0.4203, 1.4183)   Time=4000.0   Step=0.002   Begin=1000



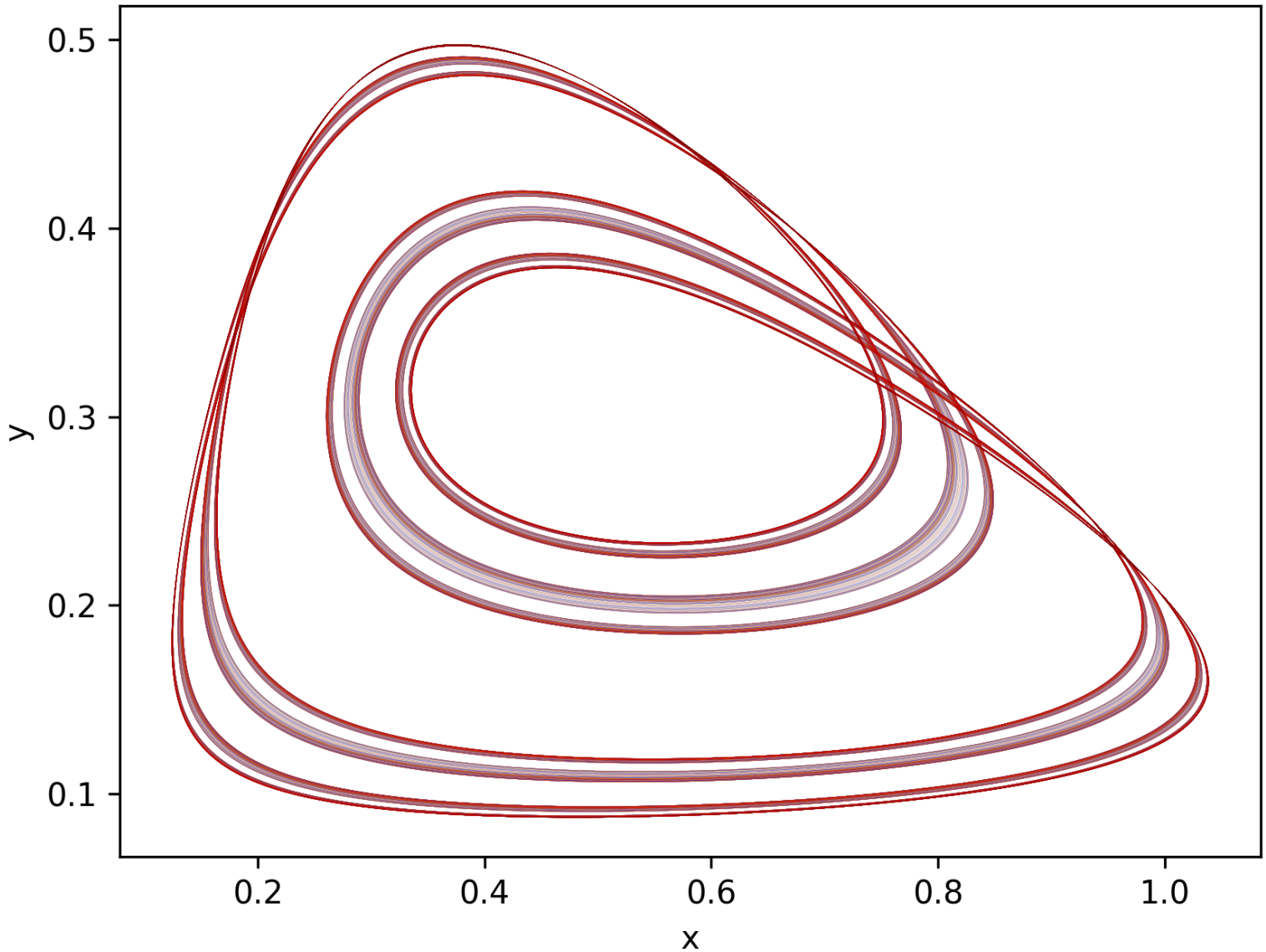
(15.0): a=1.0, b=1.29, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.77264, 0.10582, 1.43762)
StSt=(0.43387, 0.415978, 1.426895)   Time=2000.0   Step=0.004   Begin=1000



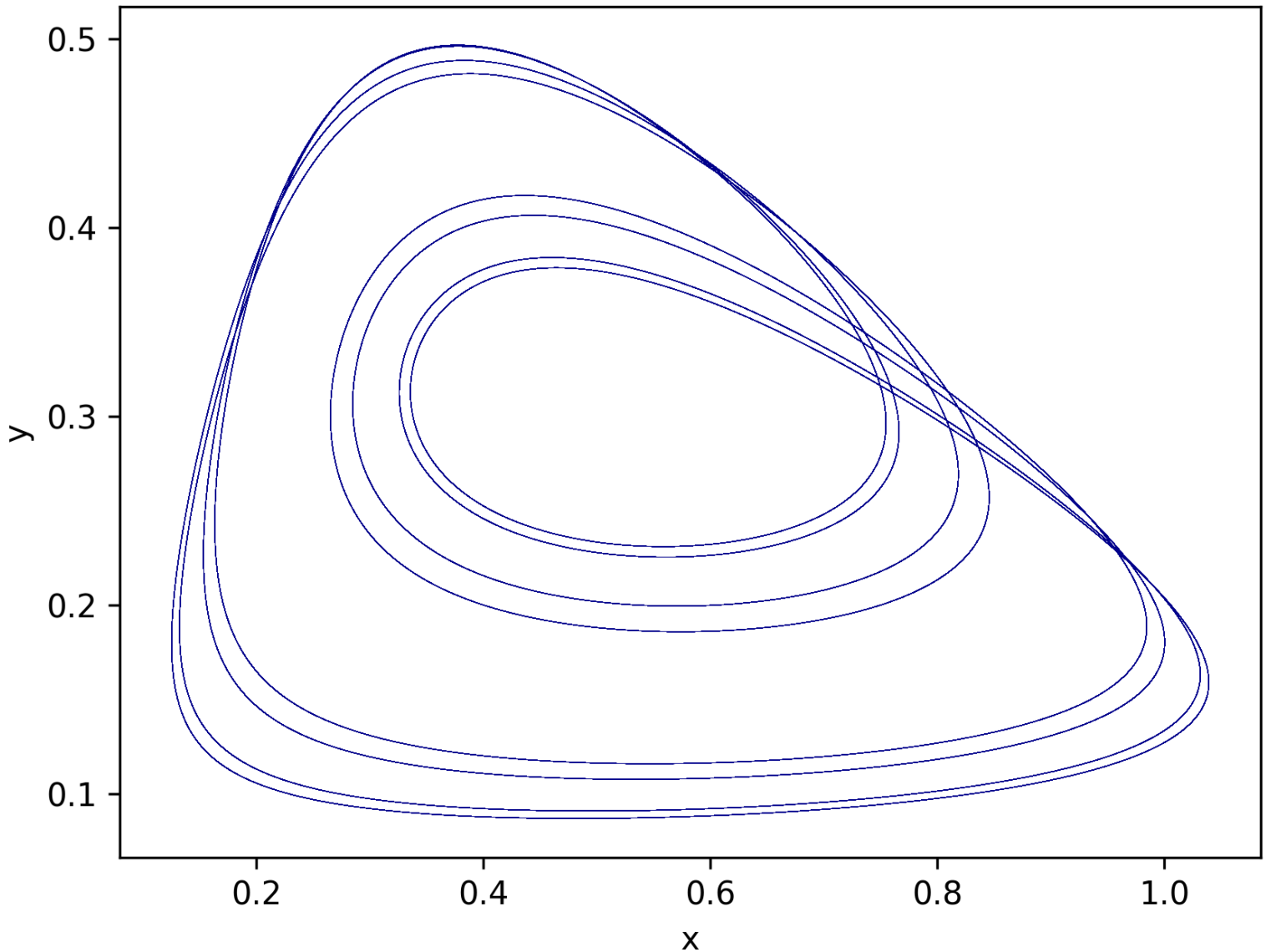
(15.0): a=1.0, b=1.31, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.16379, 0.25527, 0.73416)
StSt=(0.438044, 0.412723, 1.433366)   Time=3000.0   Step=0.004   Begin=1000



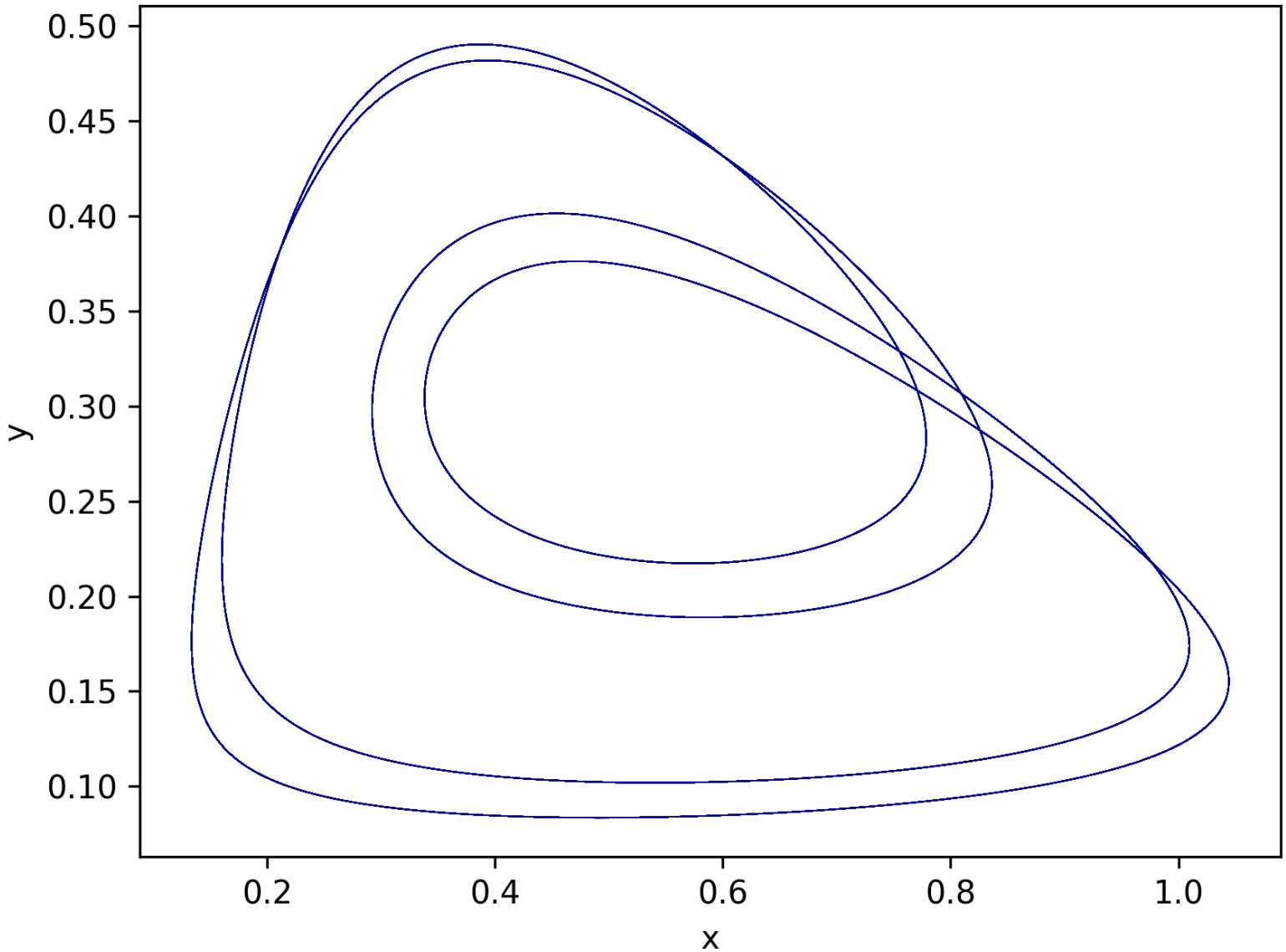
(15.0): a=1.0, b=1.32, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=(0.28138, 0.35892, 1.17931)
StSt=(0.4401, 0.411125, 1.436558)   Time=2000.0   Step=0.004   Begin=1000



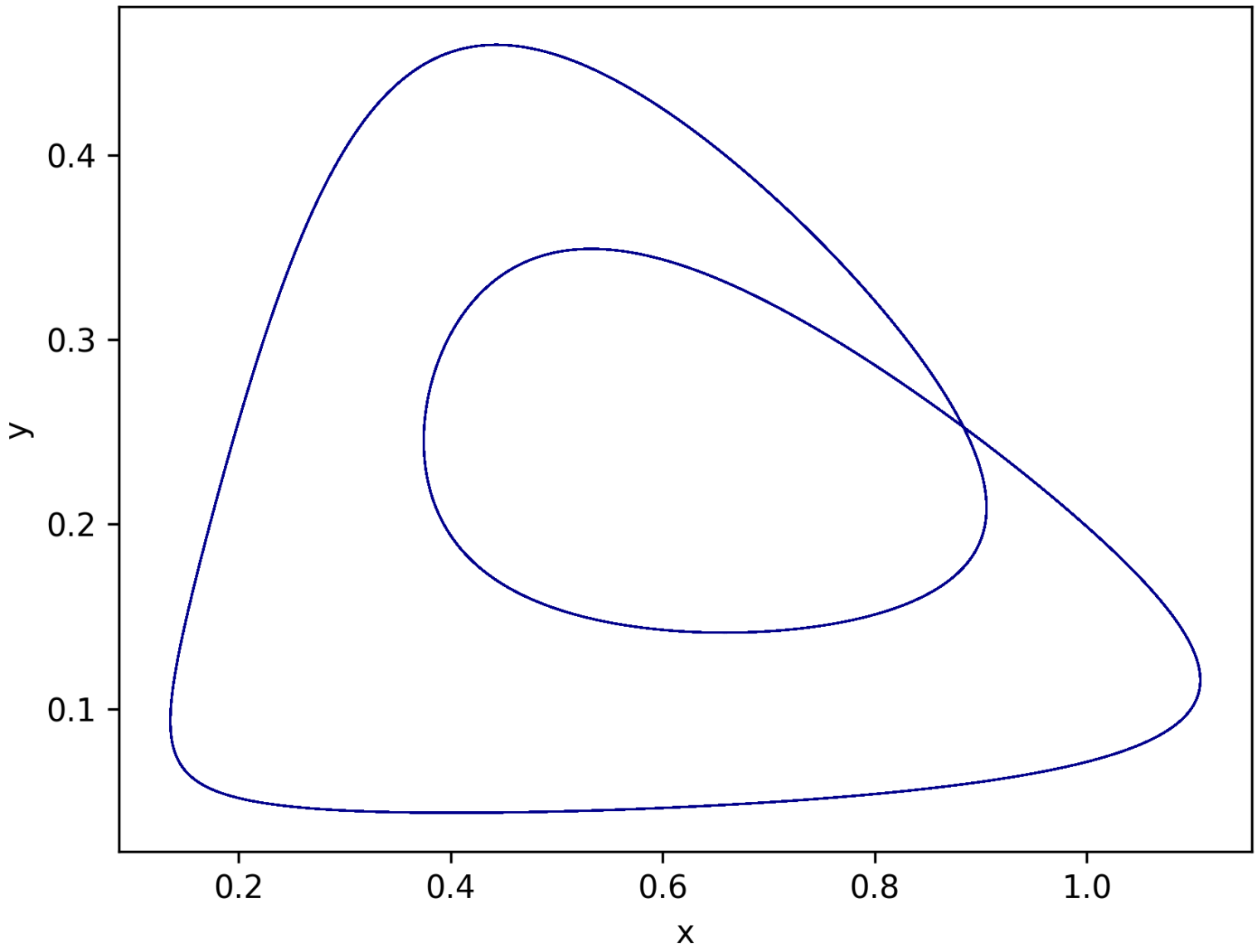
(15.0): a=1.0, b=1.33, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=[0.65964, 0.23211, 1.5388]
StSt=(0.4421, 0.4095, 1.4397)   Time=6000.0   Step=0.002   Begin=1000

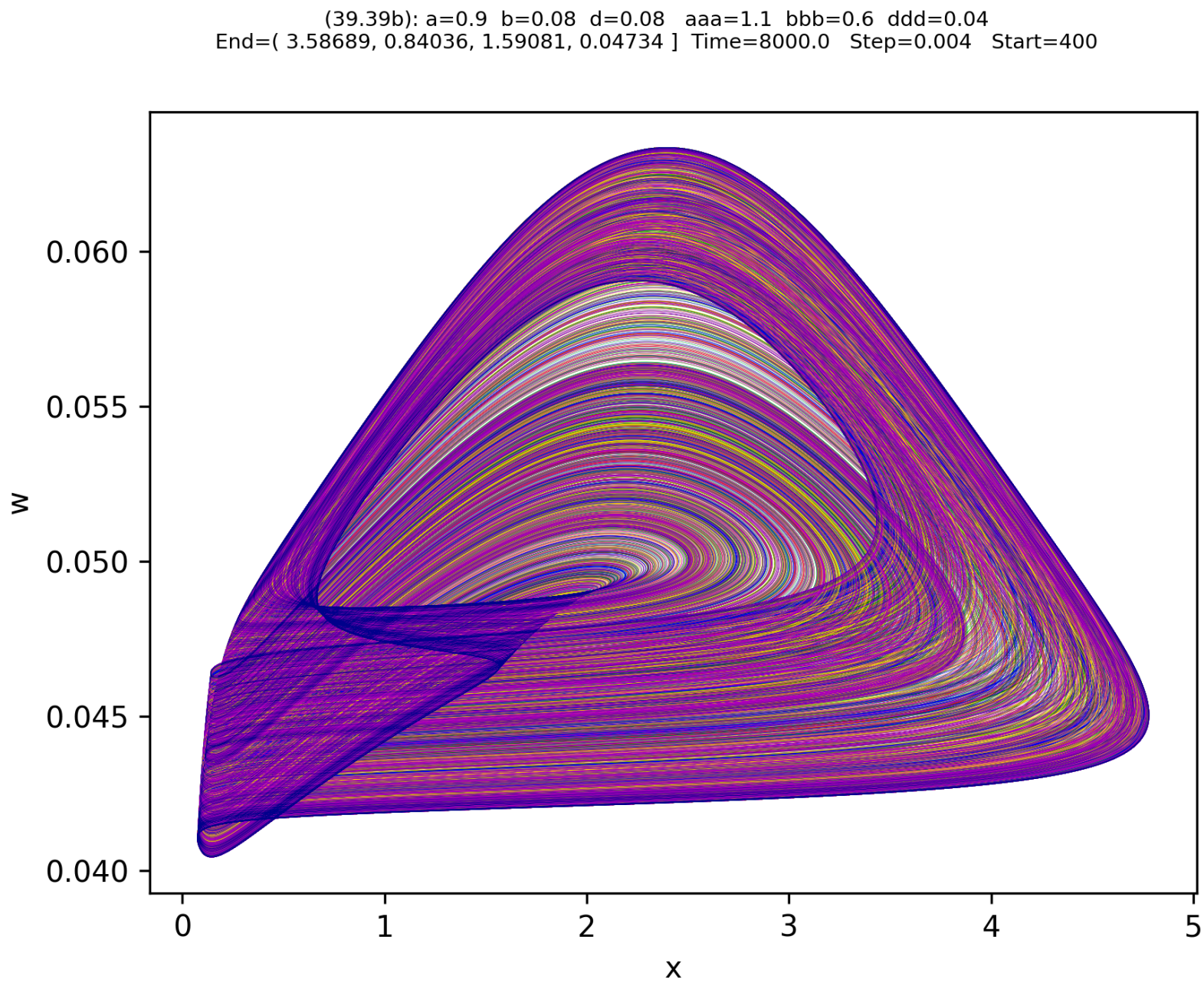


(15.0): a=1.0, b=1.4, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=[0.63299, 0.4151, 1.99372]
StSt=(0.4558, 0.399, 1.4611)   Time=2000.0   Step=0.004   Begin=1000

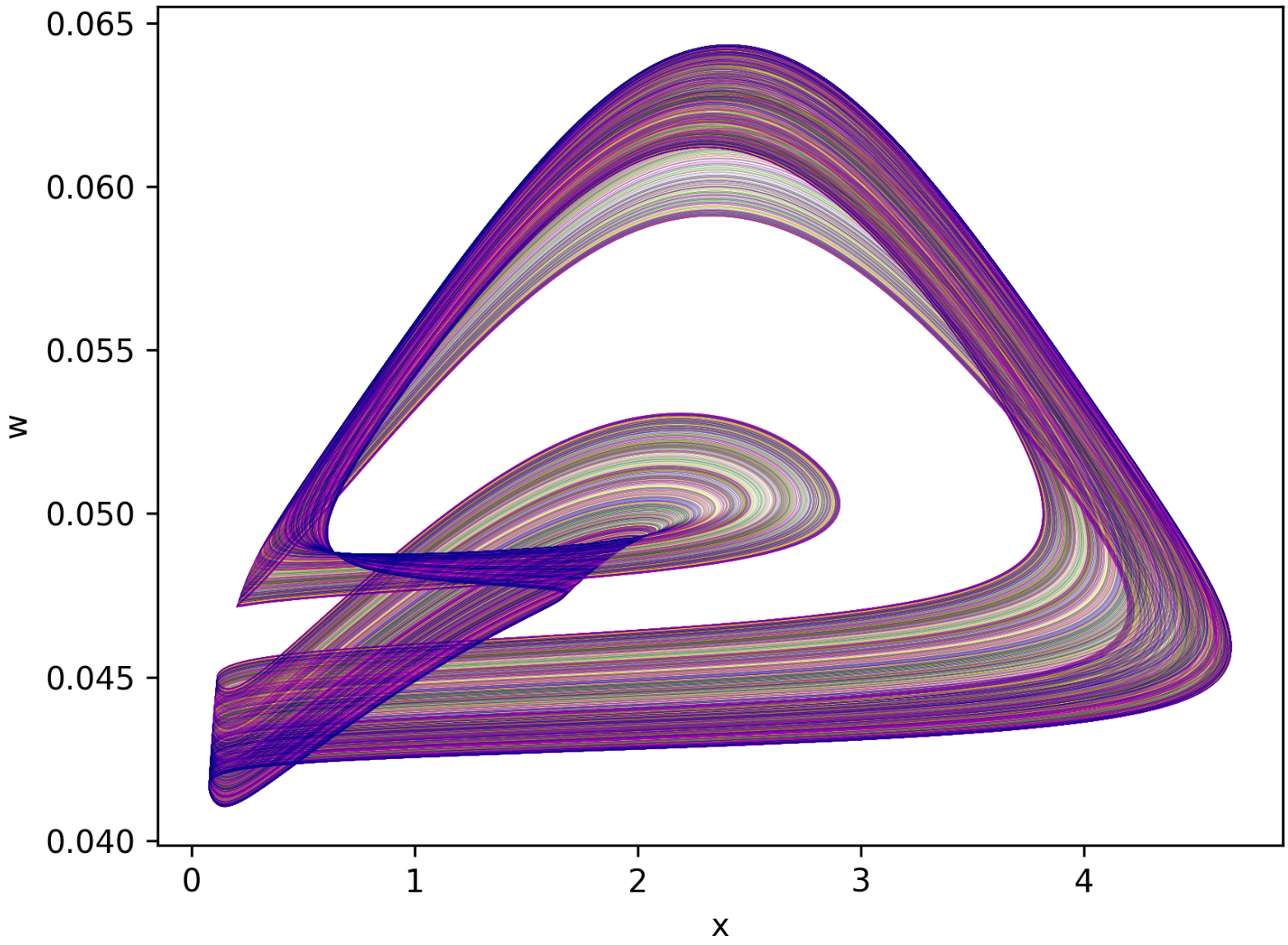


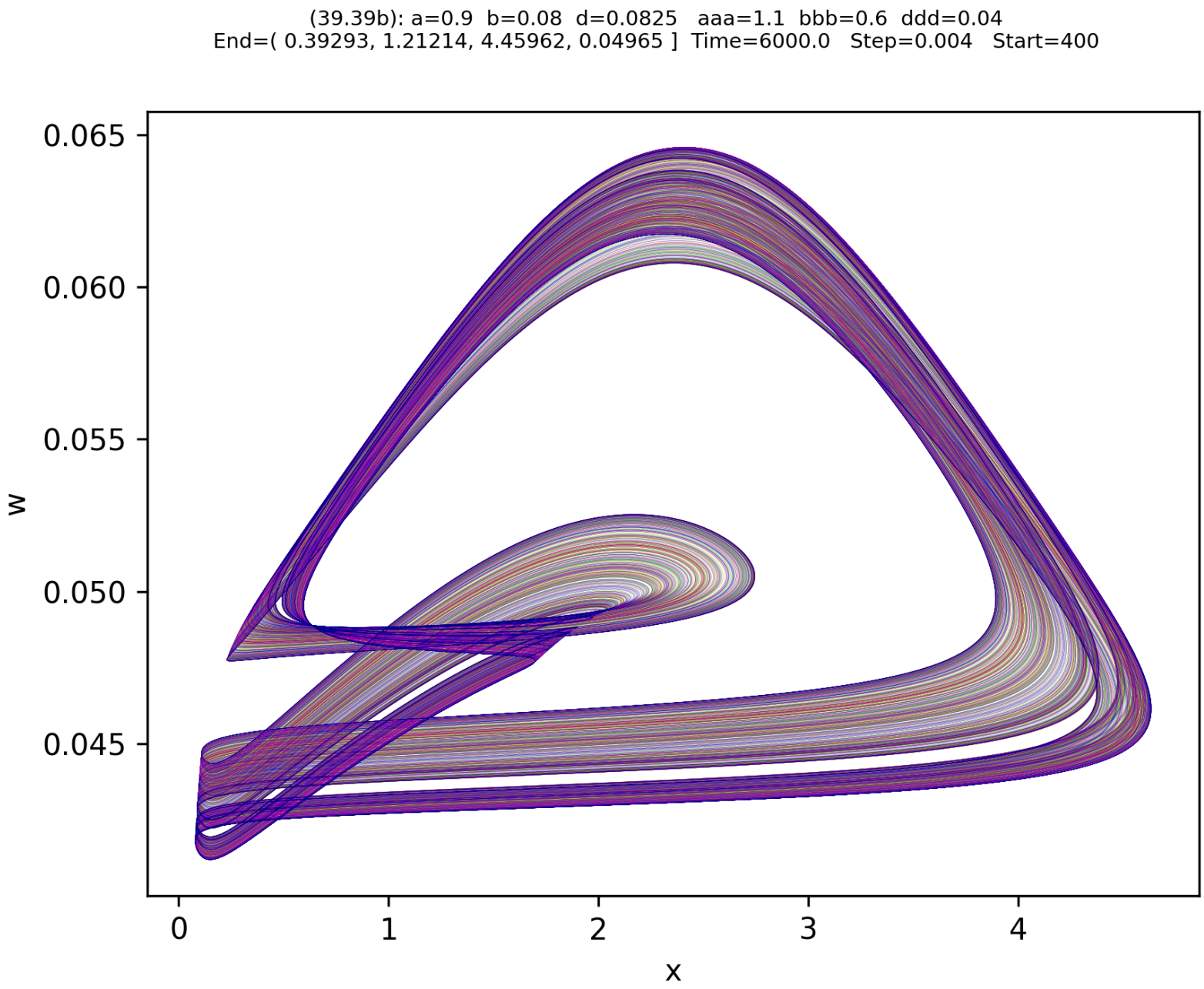
(15.0): a=1.0, b=2.0, d=0.048, e=2.33, f=2.57   End=[0.89775, 0.2333, 2.20768]
StSt=(0.5447, 0.3338, 1.6031)   Time=1000.0   Step=0.004   Begin=1000



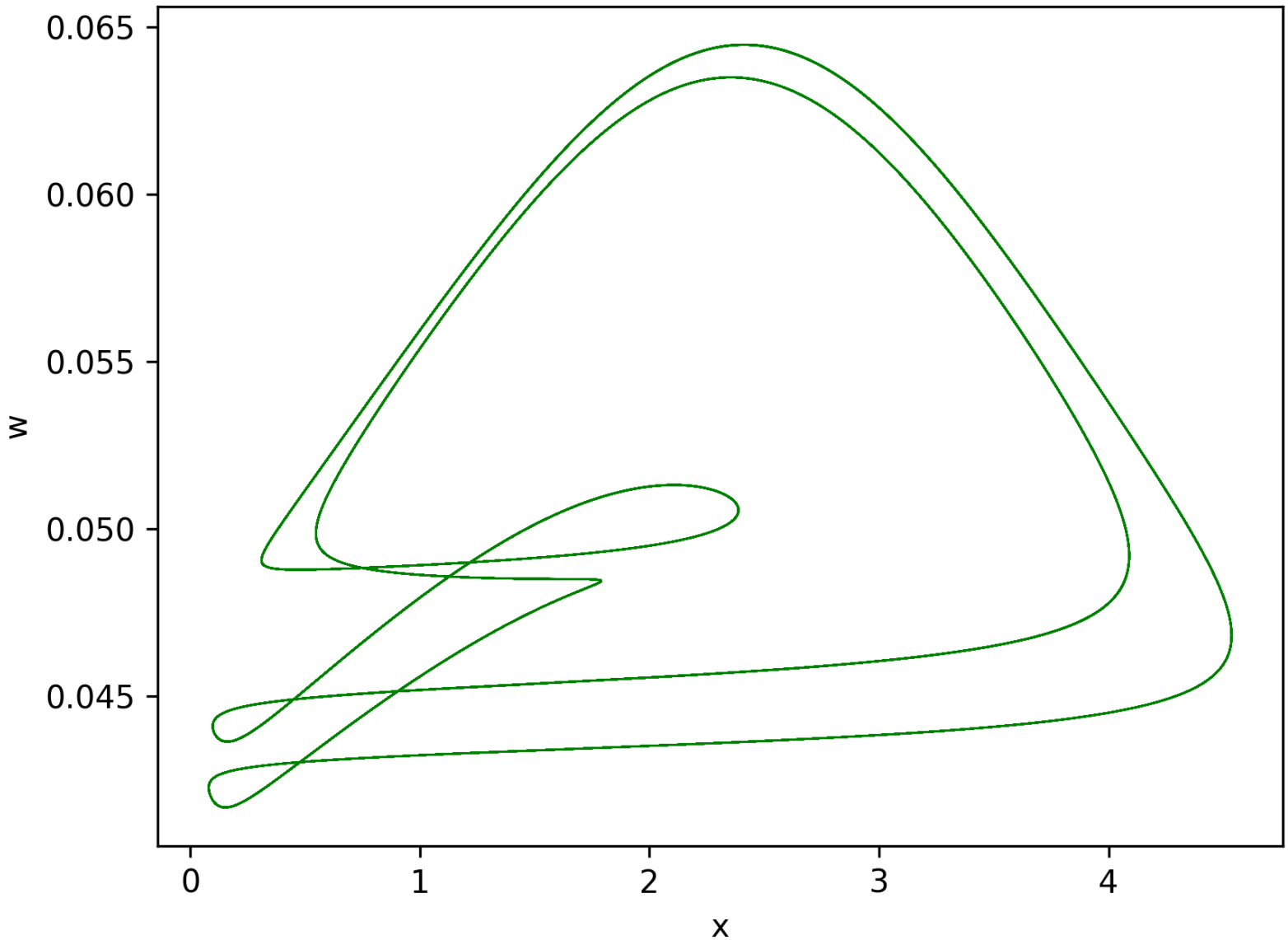

(39.39b): a=0.9 b=0.08 d=0.08 aaa=1.1 bbb=0.6 ddd=0.04
End=(3.58689, 0.84036, 1.59081, 0.04734] Time=8000.0 Step=0.004 Start=400
0.060
0.055
0.050
0.045
0.040
w
0
1
2
3
4
5
x

(39.39b): a=0.9 b=0.08 d=0.082   aaa=1.1 bbb=0.6 ddd=0.04
End=(0.37841, 1.17479, 3.02859, 0.04491] Time=8000.0   Step=0.004   Start=400

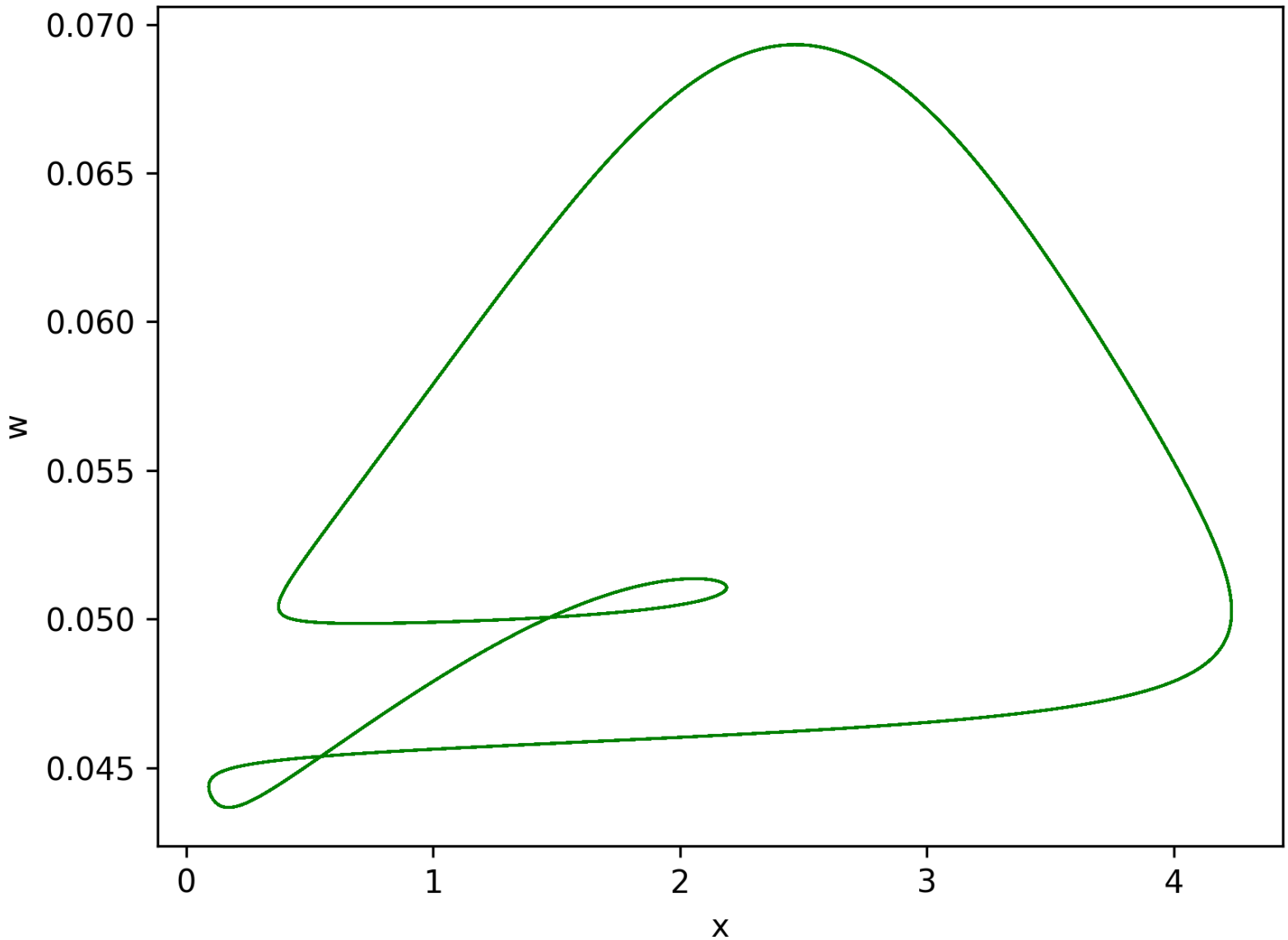


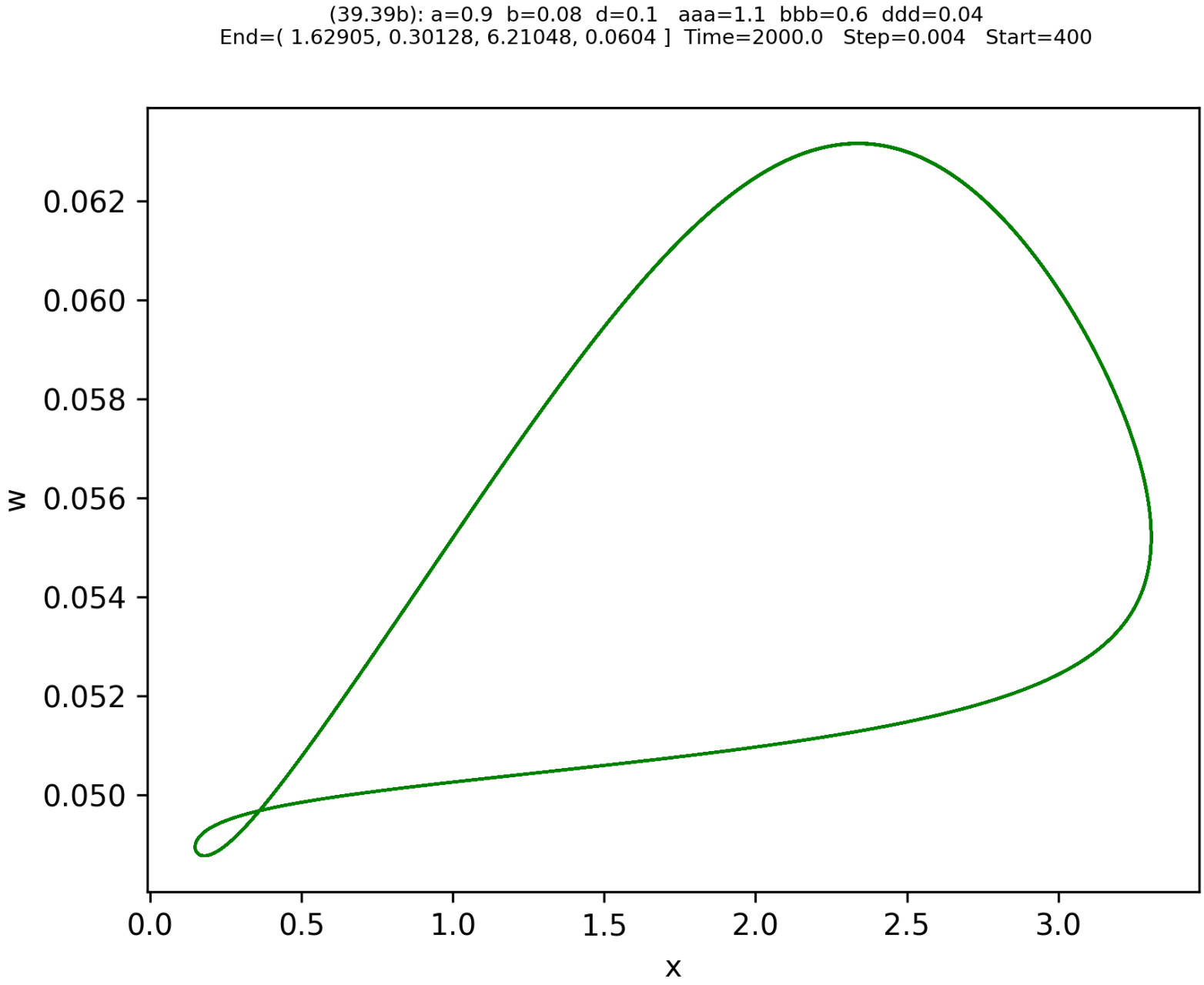

(39.39b): a=0.9 b=0.08 d=0.0825 aaa=1.1 bbb=0.6 ddd=0.04
End=(0.39293, 1.21214, 4.45962, 0.04965] Time=6000.0 Step=0.004 Start=400
0.065
0.060
0.055
0.050
0.045
w
0
1
2
3
4
x

(39.39b): a=0.9 b=0.08 d=0.084   aaa=1.1 bbb=0.6 ddd=0.04
End=(1.70365, 0.5526, 3.71419, 0.04816] Time=2000.0   Step=0.004   Start=400

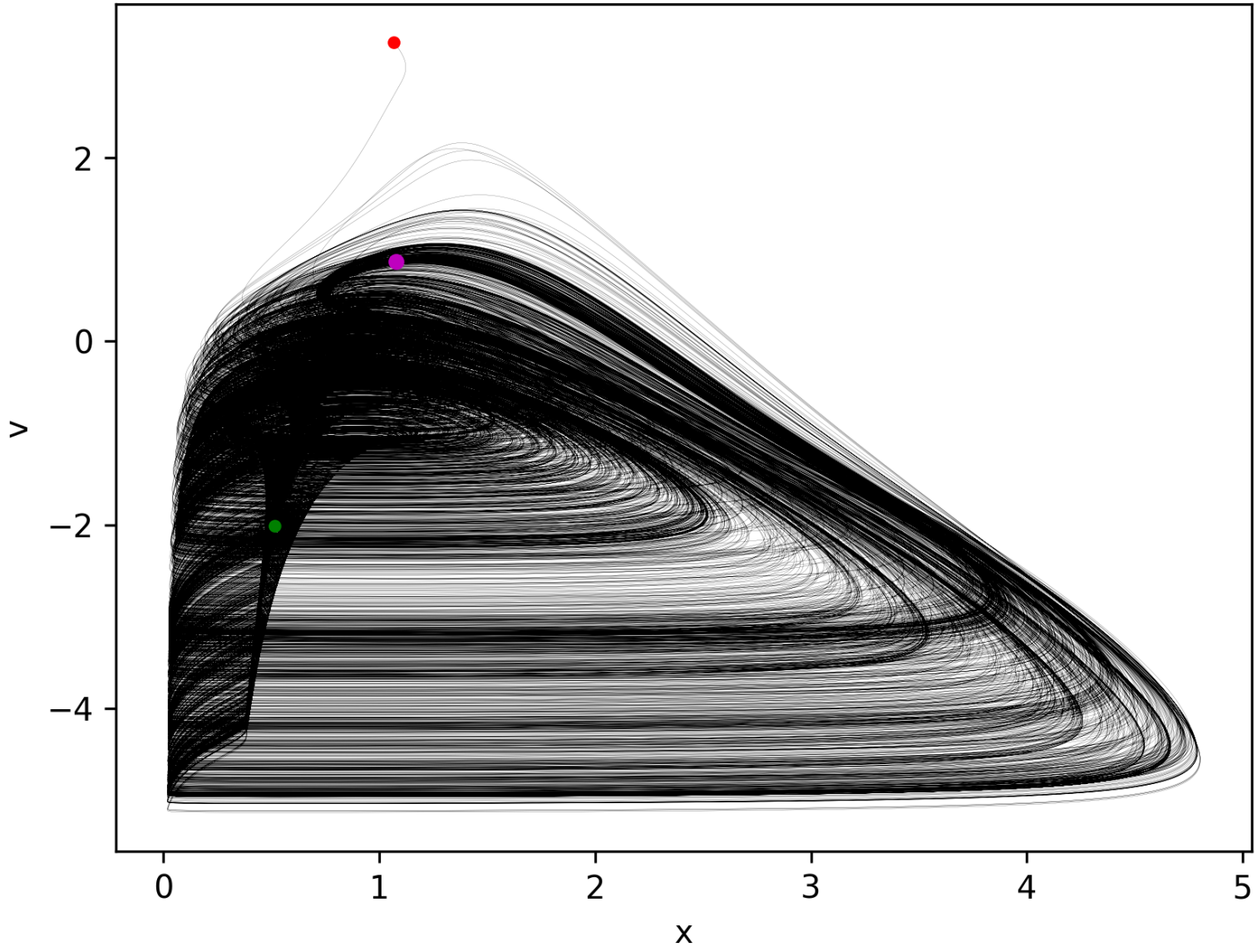


(39.39b): a=0.9 b=0.08 d=0.09   aaa=1.1 bbb=0.6 ddd=0.04
End=(1.03642, 0.41399, 6.33572, 0.05832] Time=2000.0   Step=0.004   Start=400

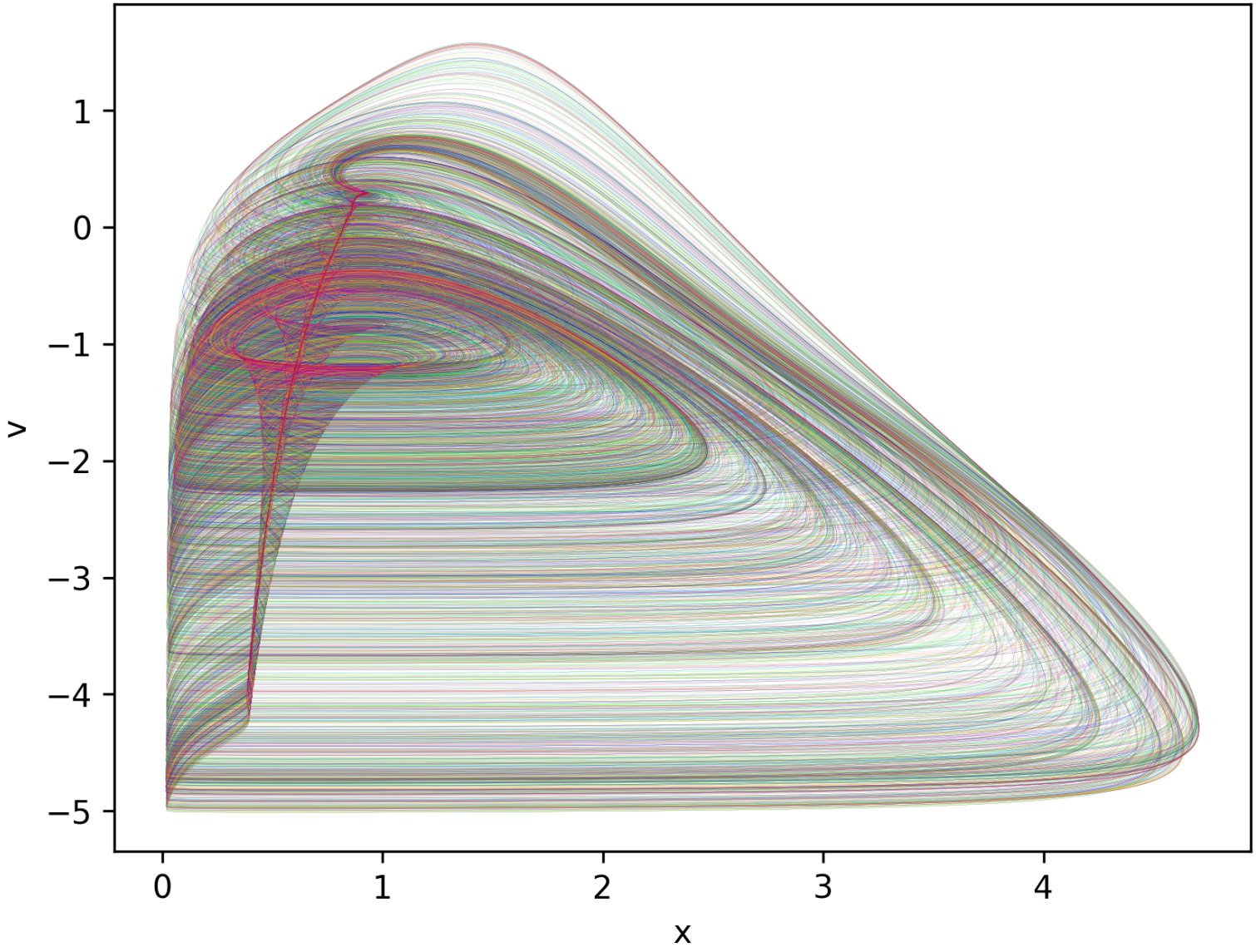



(39.39b): a=0.9 b=0.08 d=0.1 aaa=1.1 bbb=0.6 ddd=0.04
End=(1.62905, 0.30128, 6.21048, 0.0604] Time=2000.0 Step=0.004 Start=400
0.062
0.060
0.058
0.056
0.054
0.052
0.050
w
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x

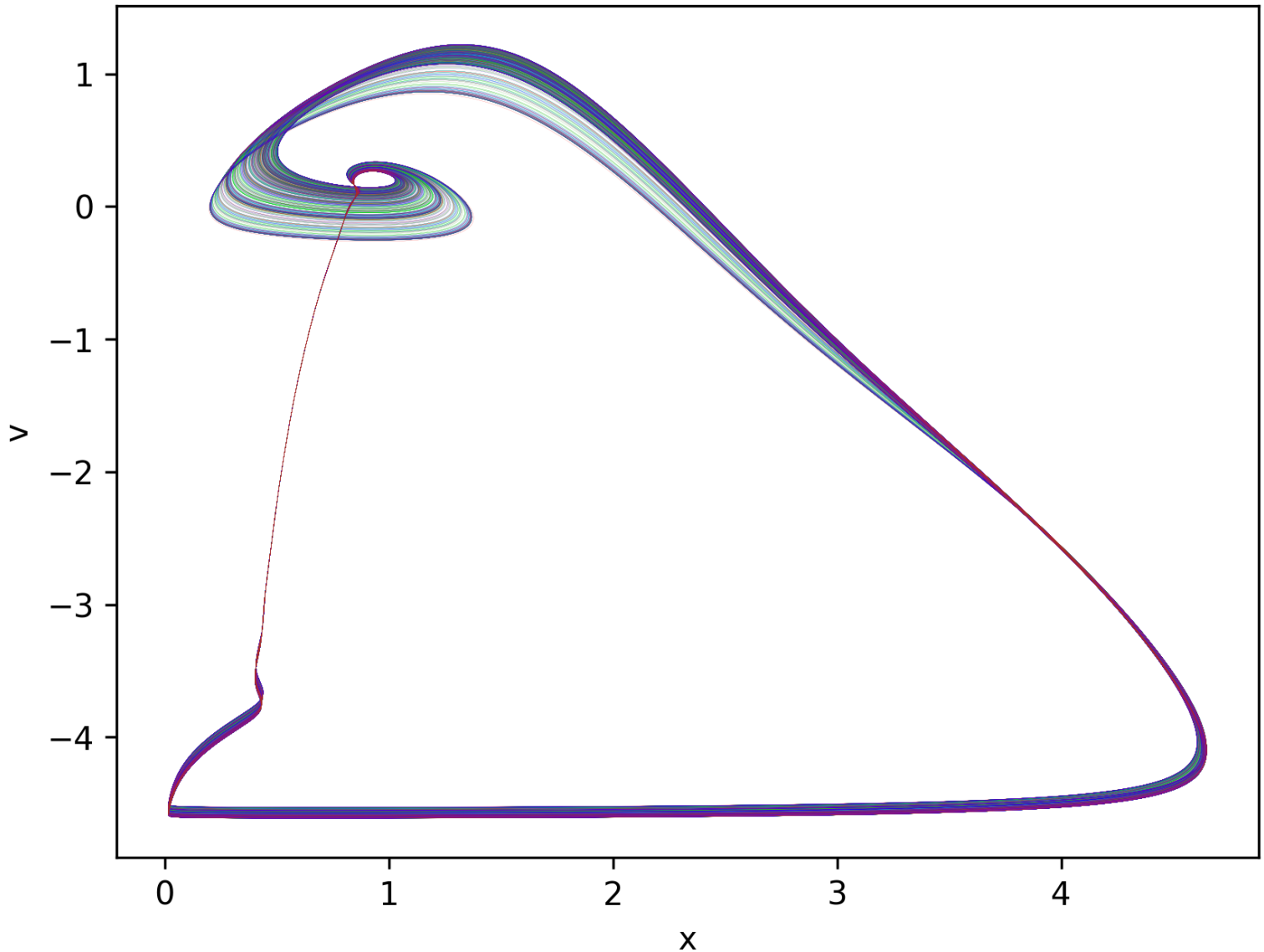
(39.18): a=2.54, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[1.06865, 0.11447, 3.25521, 0.10268] Time=22520.0 Step=0.001 Start=80



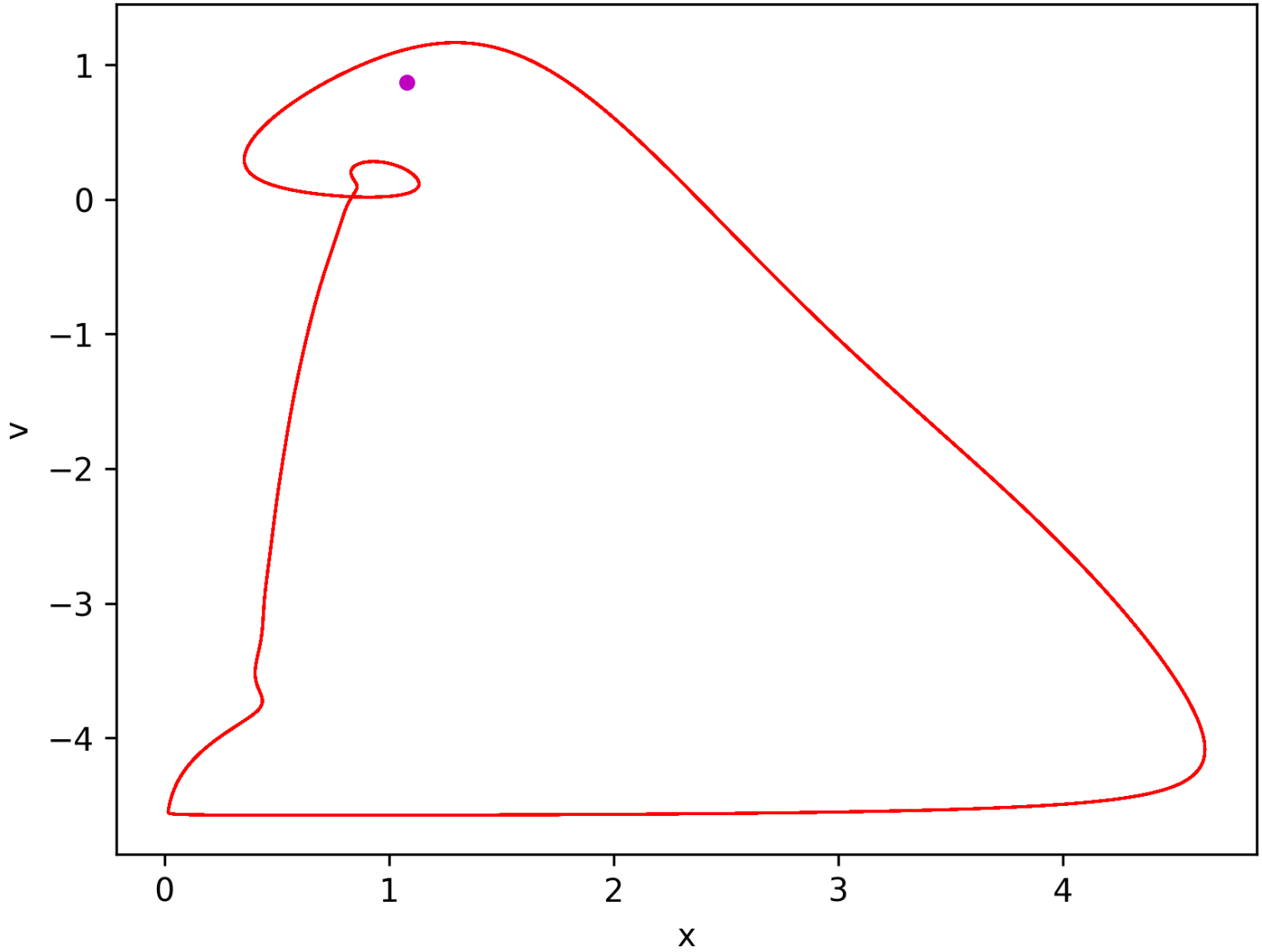
(39.18): a=2.7, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.37279, 2.25959, -3.59373, -0.04959]   Time=4000.0   Step=0.002   Start=80



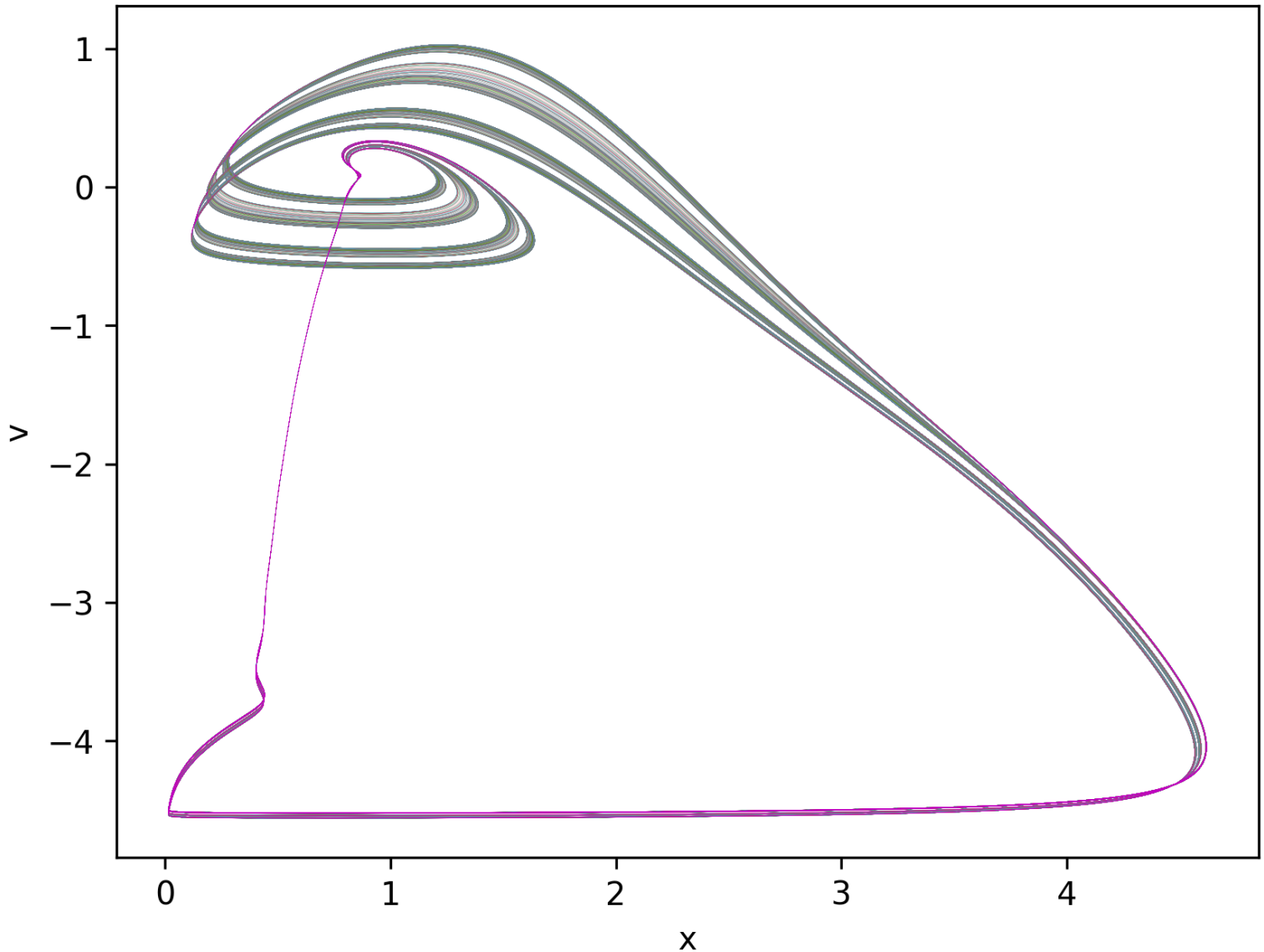
(39.18): a=2.82, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.65135, 1.38744, -0.895, -0.03624]   Time=3000.0   Step=0.002   Start=800



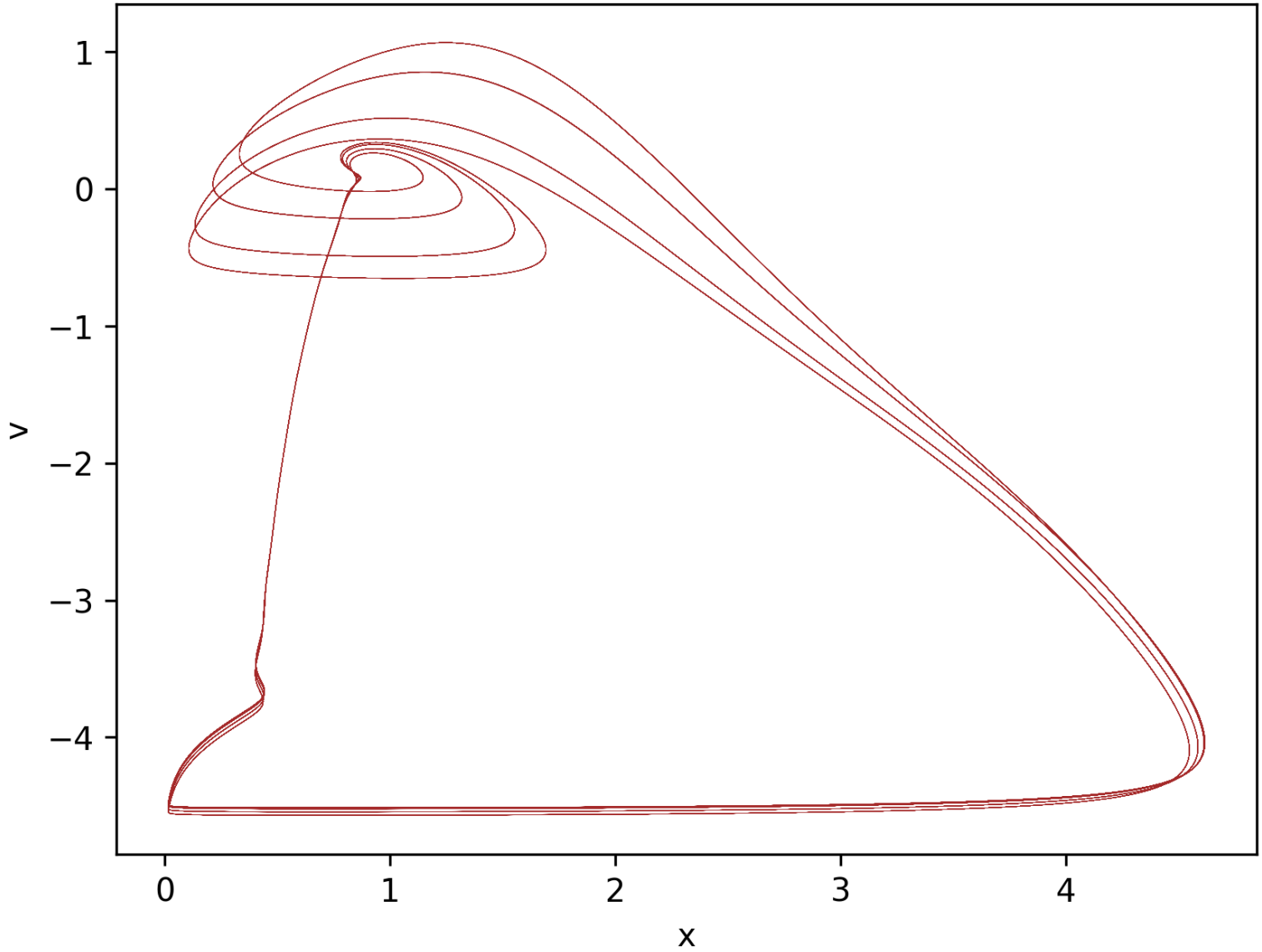
(39.18): a=2.85, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[4.54888, 1.20226, -4.3167, -0.0191]   Time=3000.0   Step=0.002   Start=800



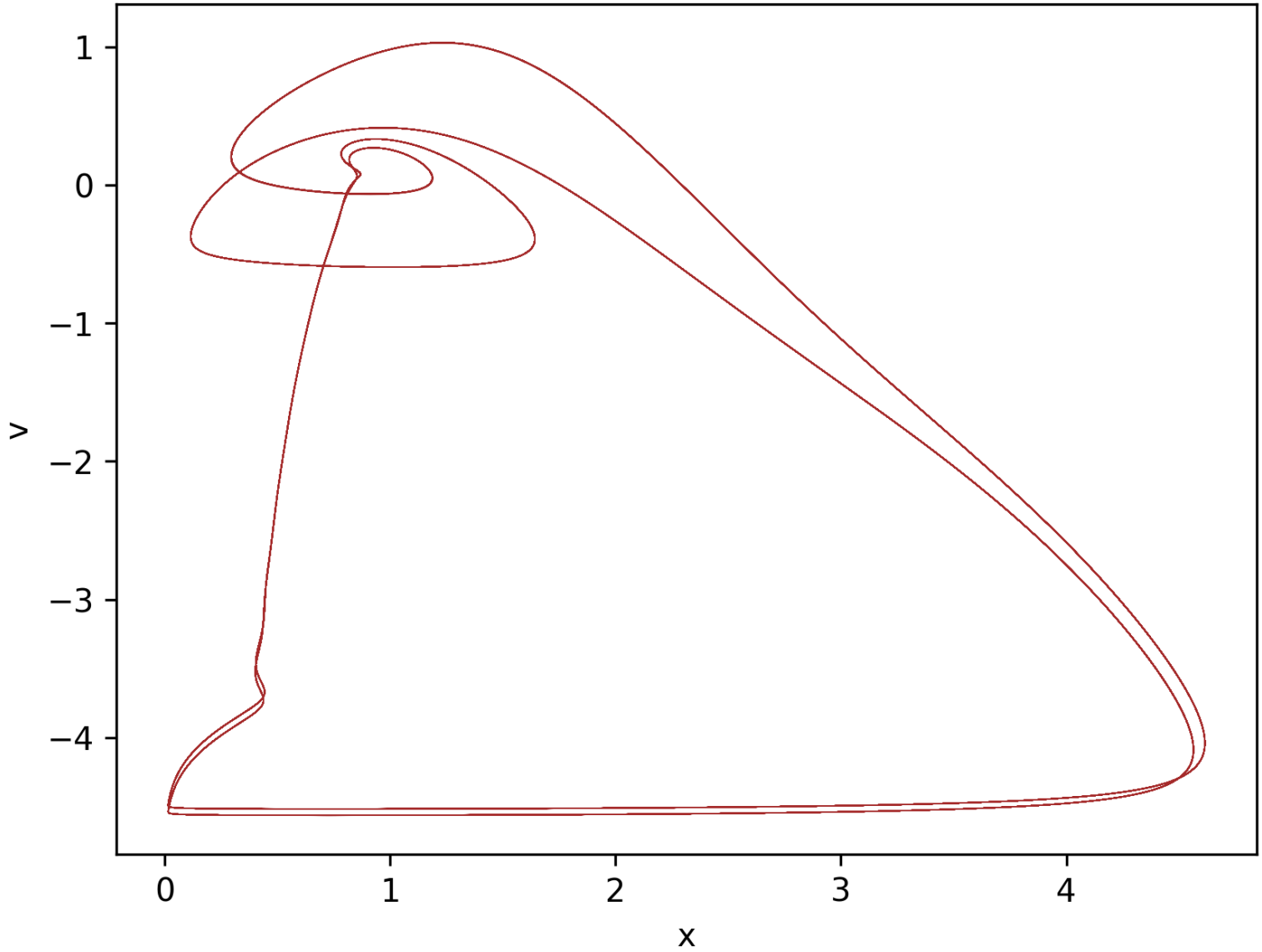
(39.18): a=2.898, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.99203, 0.76358, 0.31824, 0.71861]   Time=4000.0   Step=0.002   Start=800



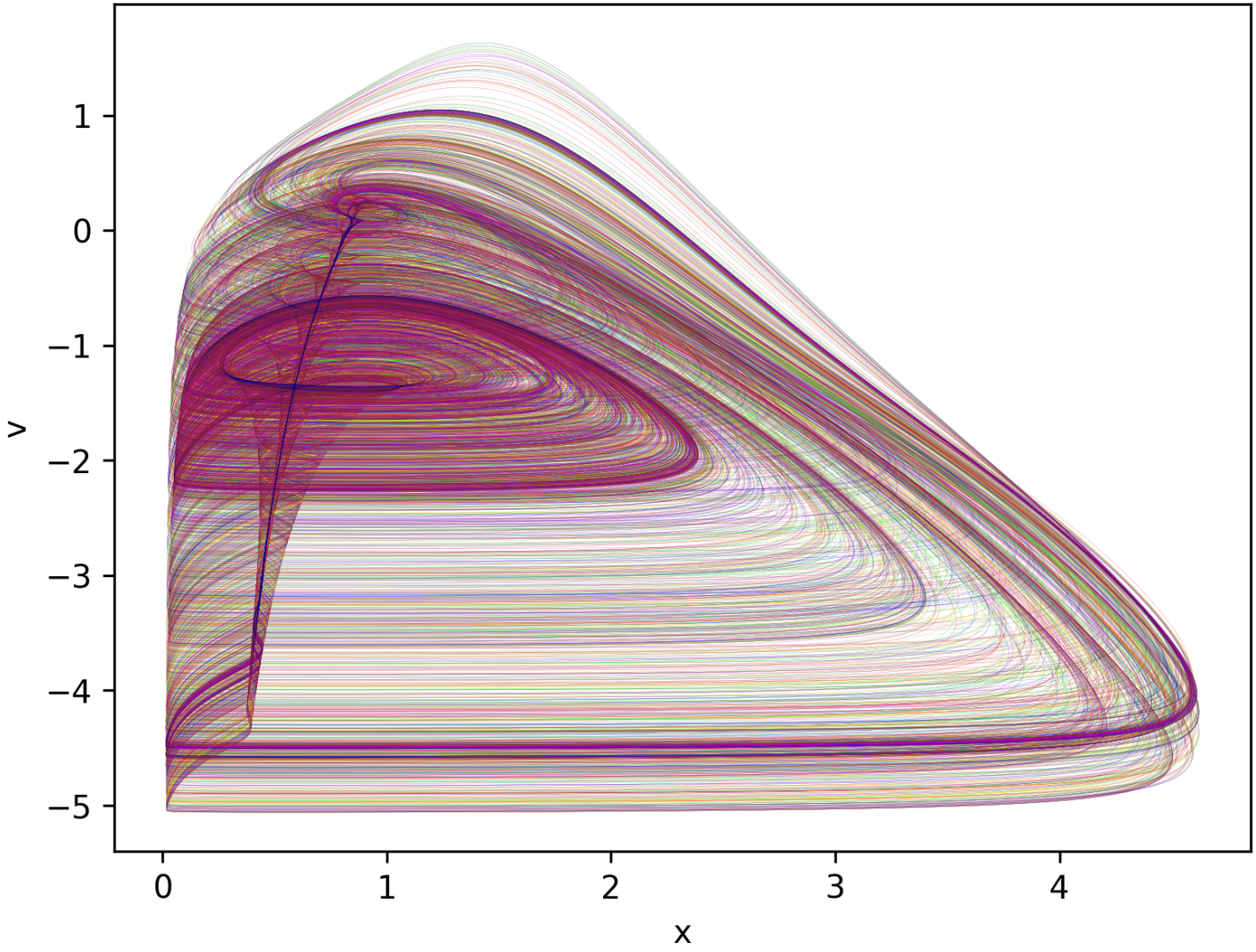
(39.18): a=2.904, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.60936, 1.49118, -1.19849, -0.05316]   Time=3000.0   Step=0.002   Start=800

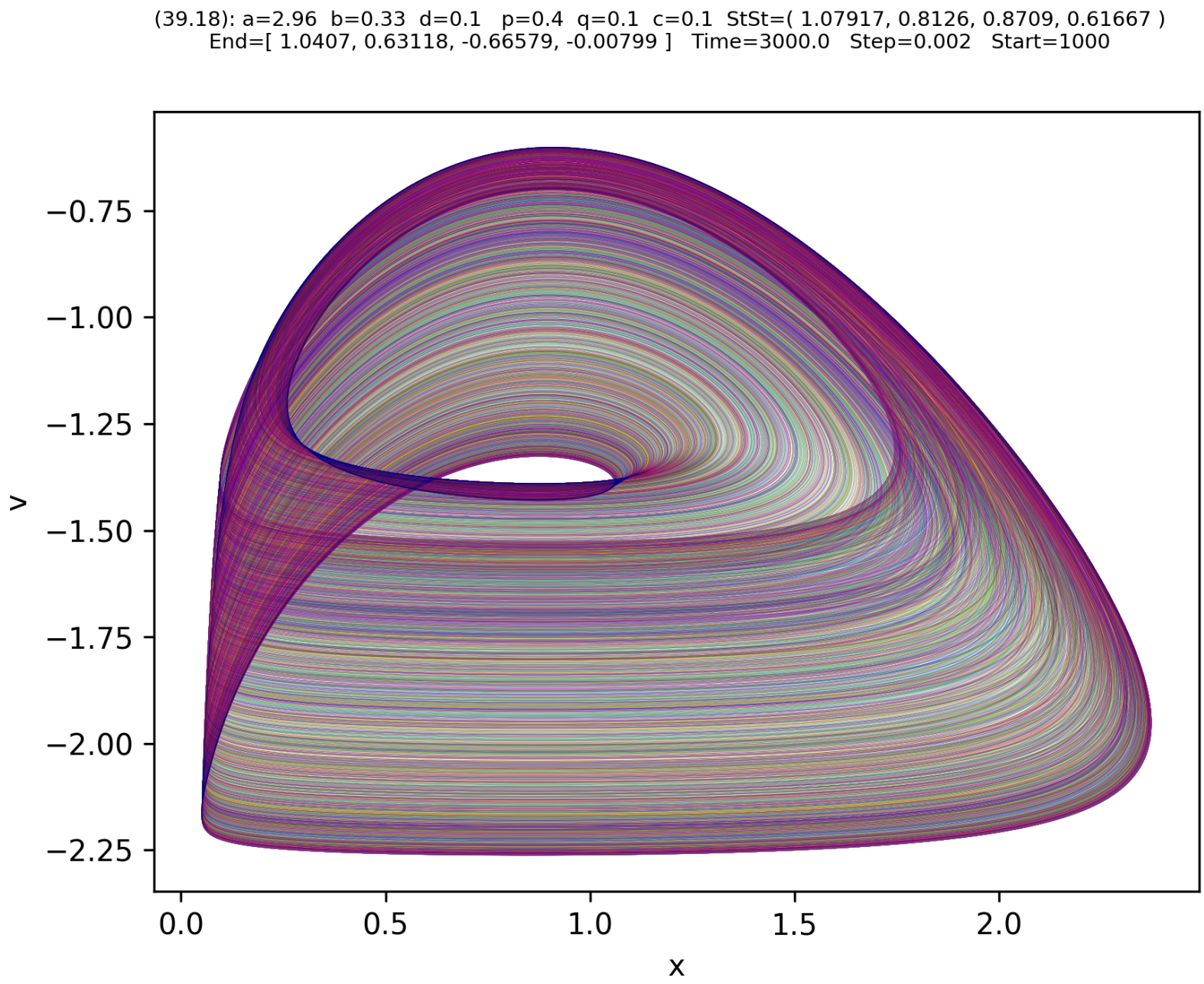


(39.18): a=2.91, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.77083, 1.17074, -0.25579, 0.10123] Time=3000.0 Step=0.002 Start=800

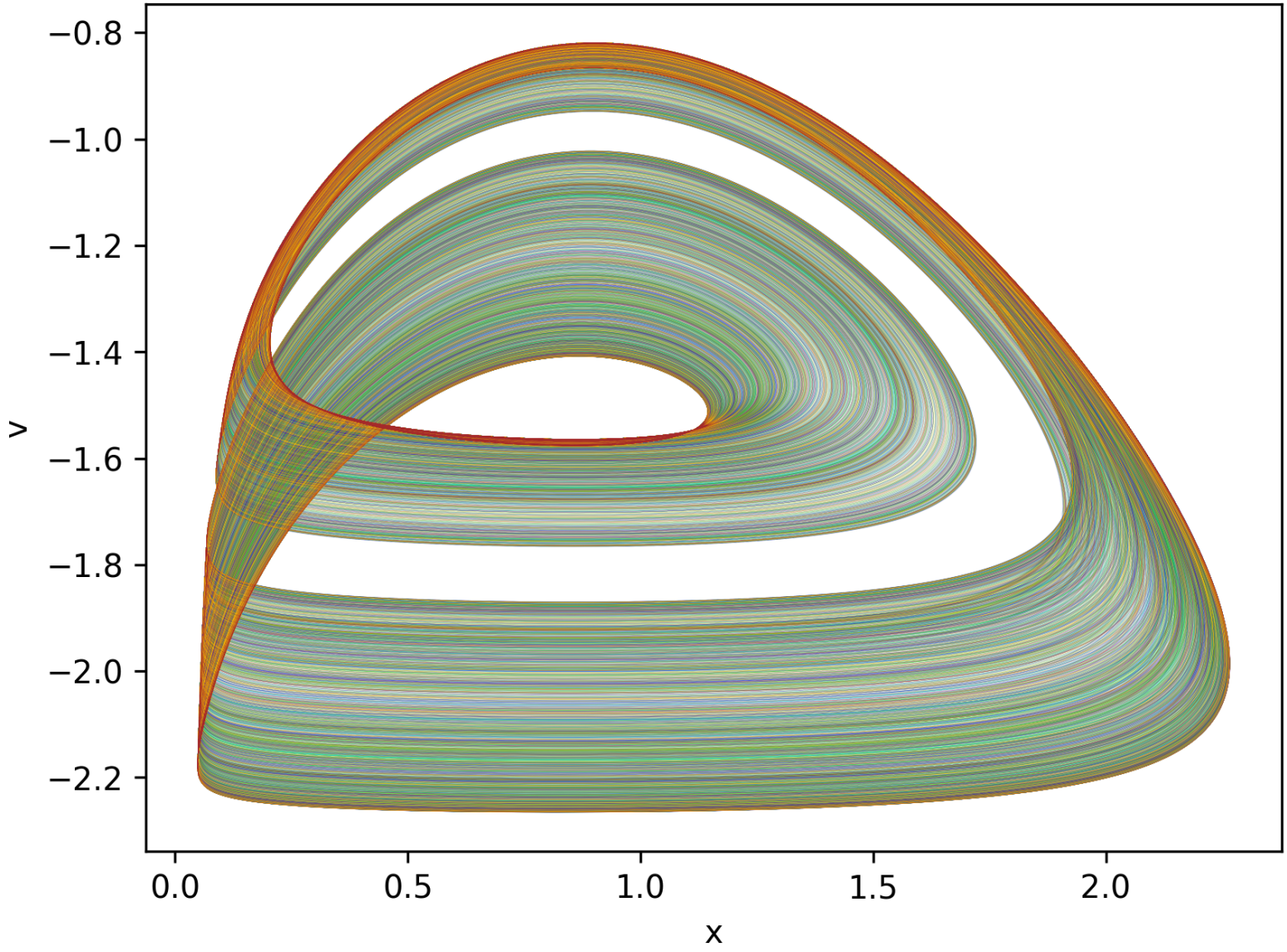


(39.18): a=2.92 b=0.33 d=0.1   p=0.4 q=0.1 c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[2.30495, 0.21857, -0.87155, 0.34994]   Time=4000.0   Step=0.002   Start=1000

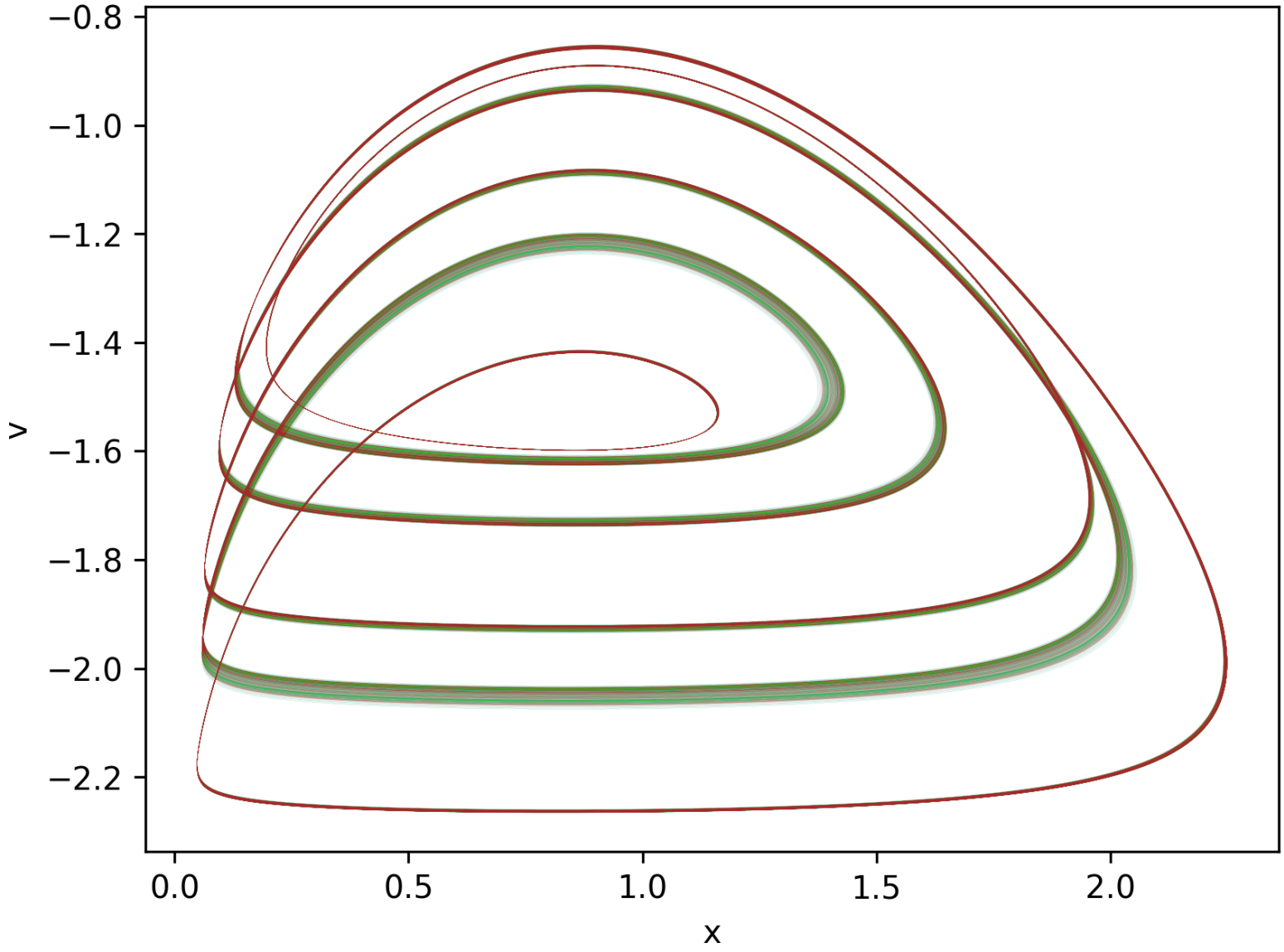



(39.18): a=2.96 b=0.33 d=0.1 p=0.4 q=0.1 c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[1.0407, 0.63118, -0.66579, -0.00799] Time=3000.0 Step=0.002 Start=1000
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
−2.25
v
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
x

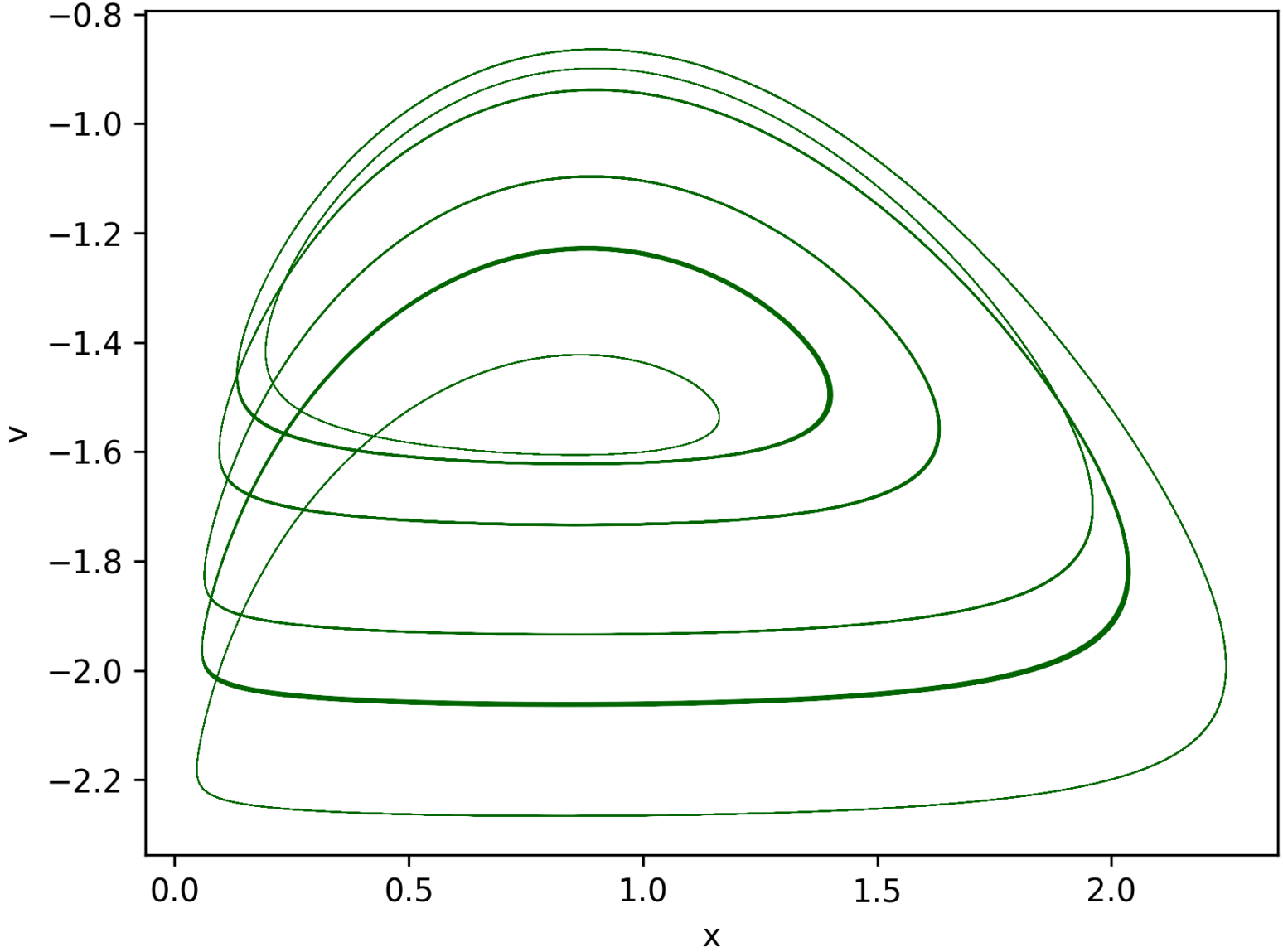
(39.18): a=3.21 b=0.33 d=0.1   p=0.4 q=0.1 c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.65317, 0.96591, -1.14786, -0.04804]   Time=3000.0   Step=0.004   Start=1000



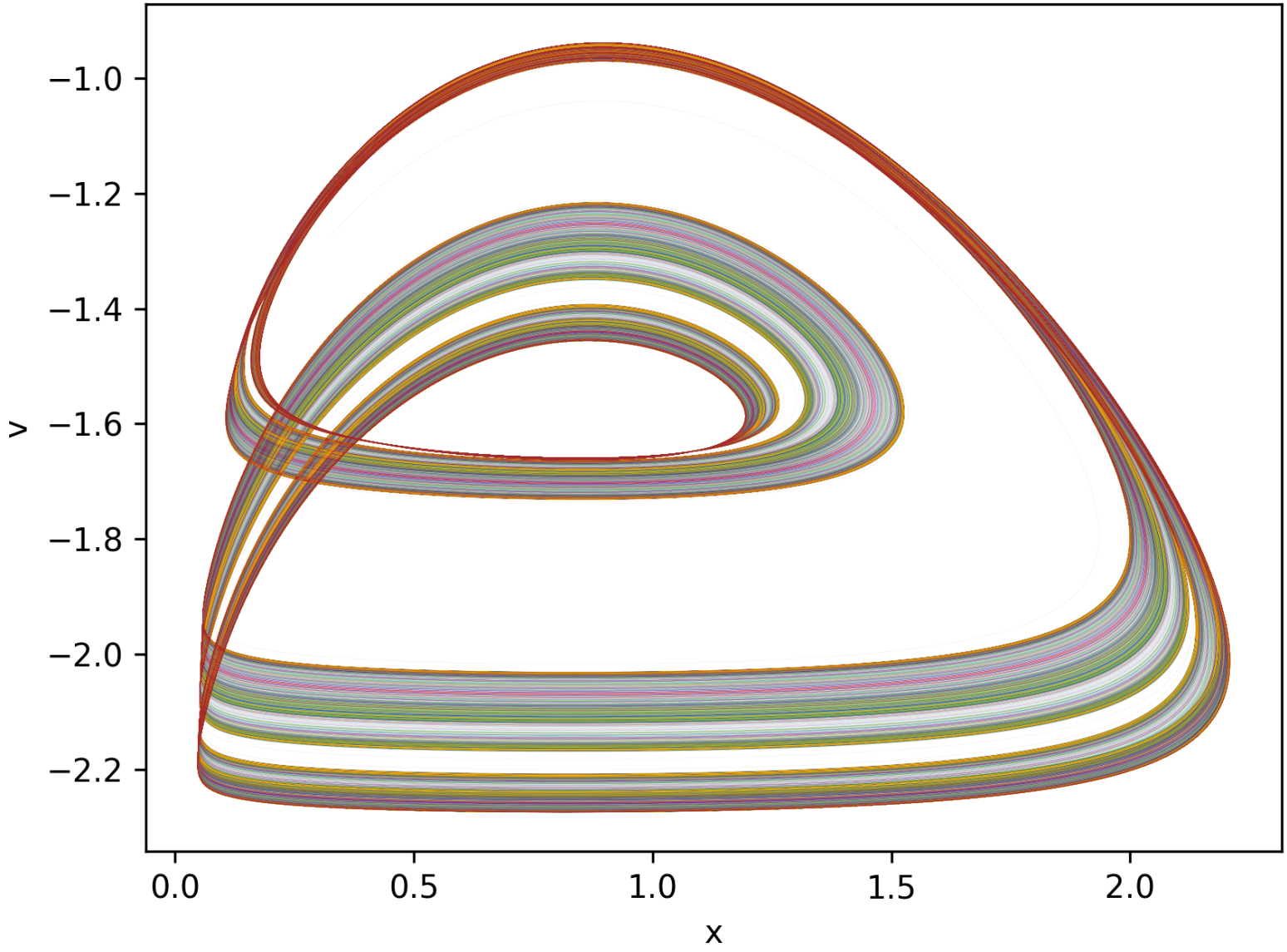
(39.18): a=3.247, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.73578, 0.81229, -0.94629, -0.04049] Time=3000.0 Step=0.001 Start=80



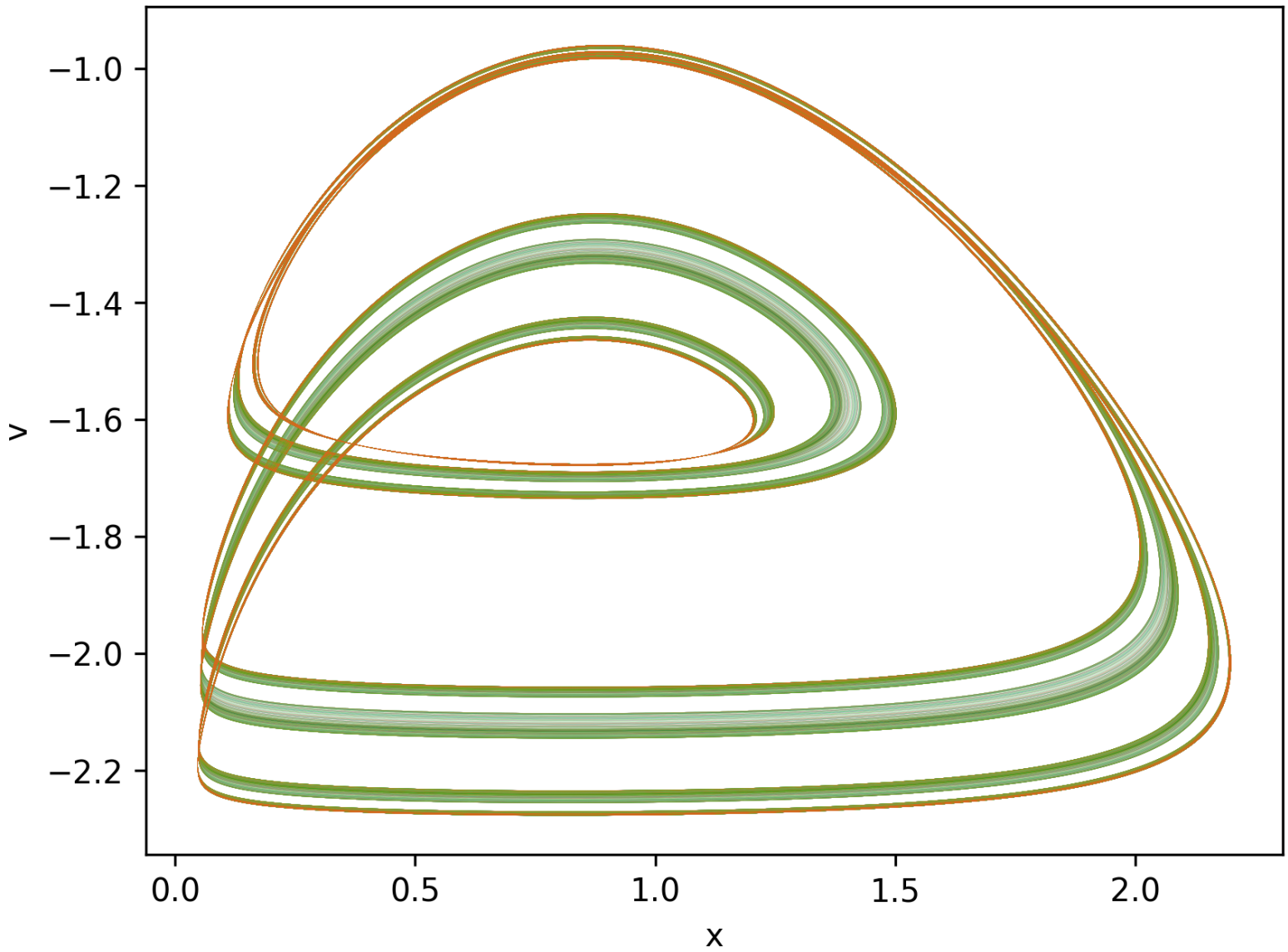
(39.18): a=3.258, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.52607, 1.08833, -0.99761, -0.04814] Time=8000.0 Step=0.001 Start=80000



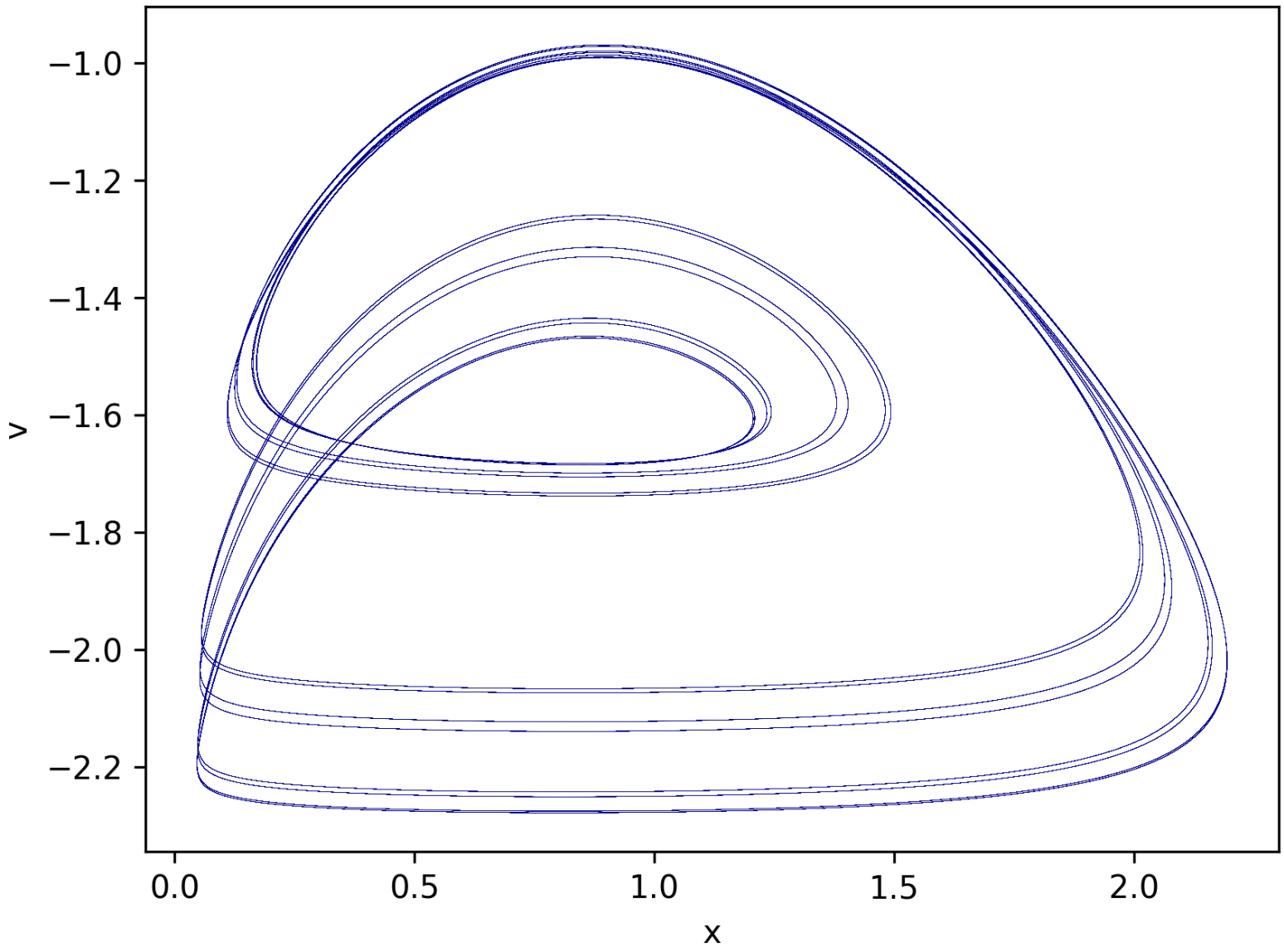
(39.18): a=3.35, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.54452, 1.04322, -1.03674, -0.0497] Time=3000.0 Step=0.002 Start=1000



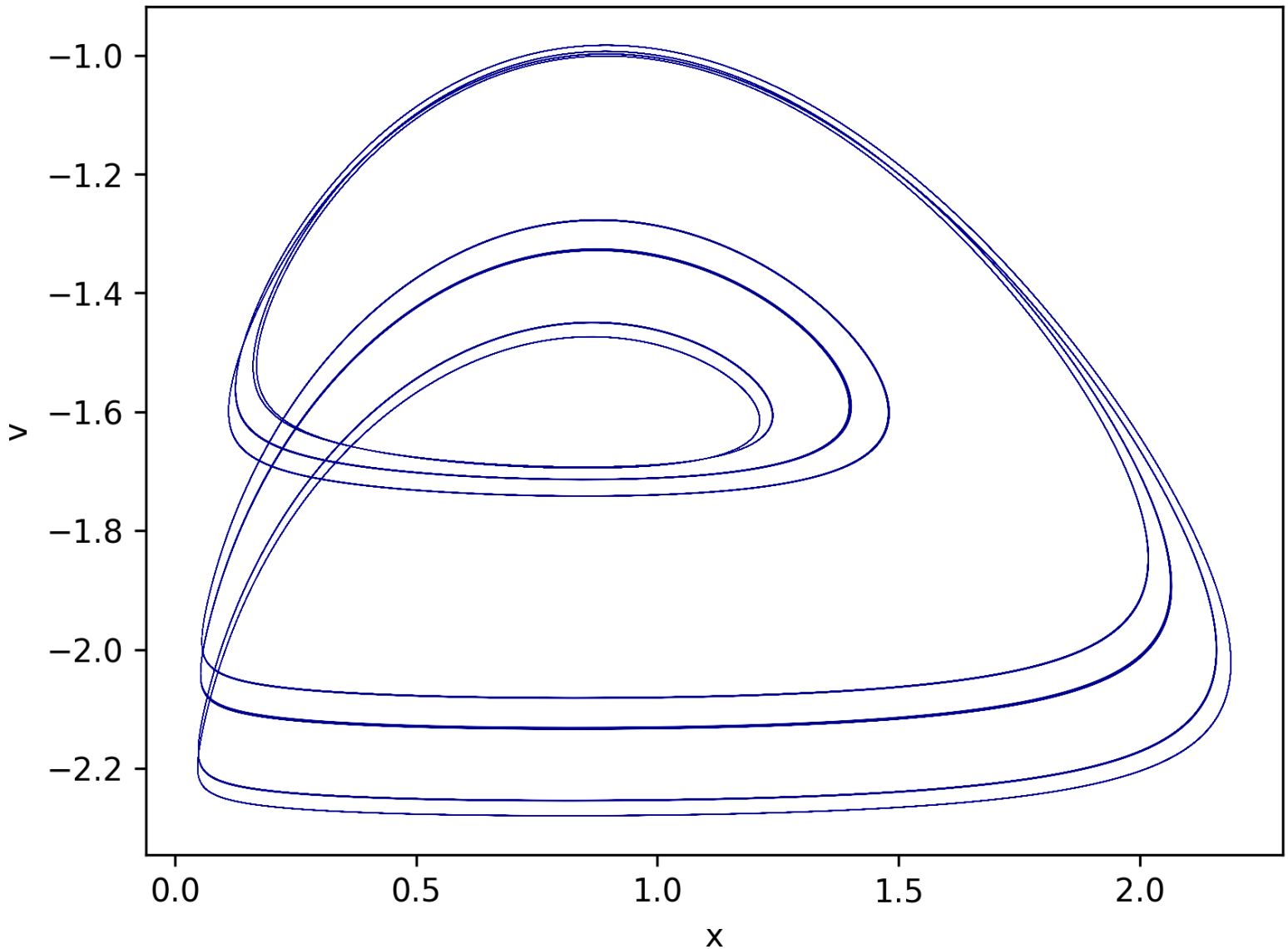
(39.18): a=3.375, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[1.39257, 1.57912, -1.68979, -0.05216] Time=3000.0 Step=0.002 Start=800



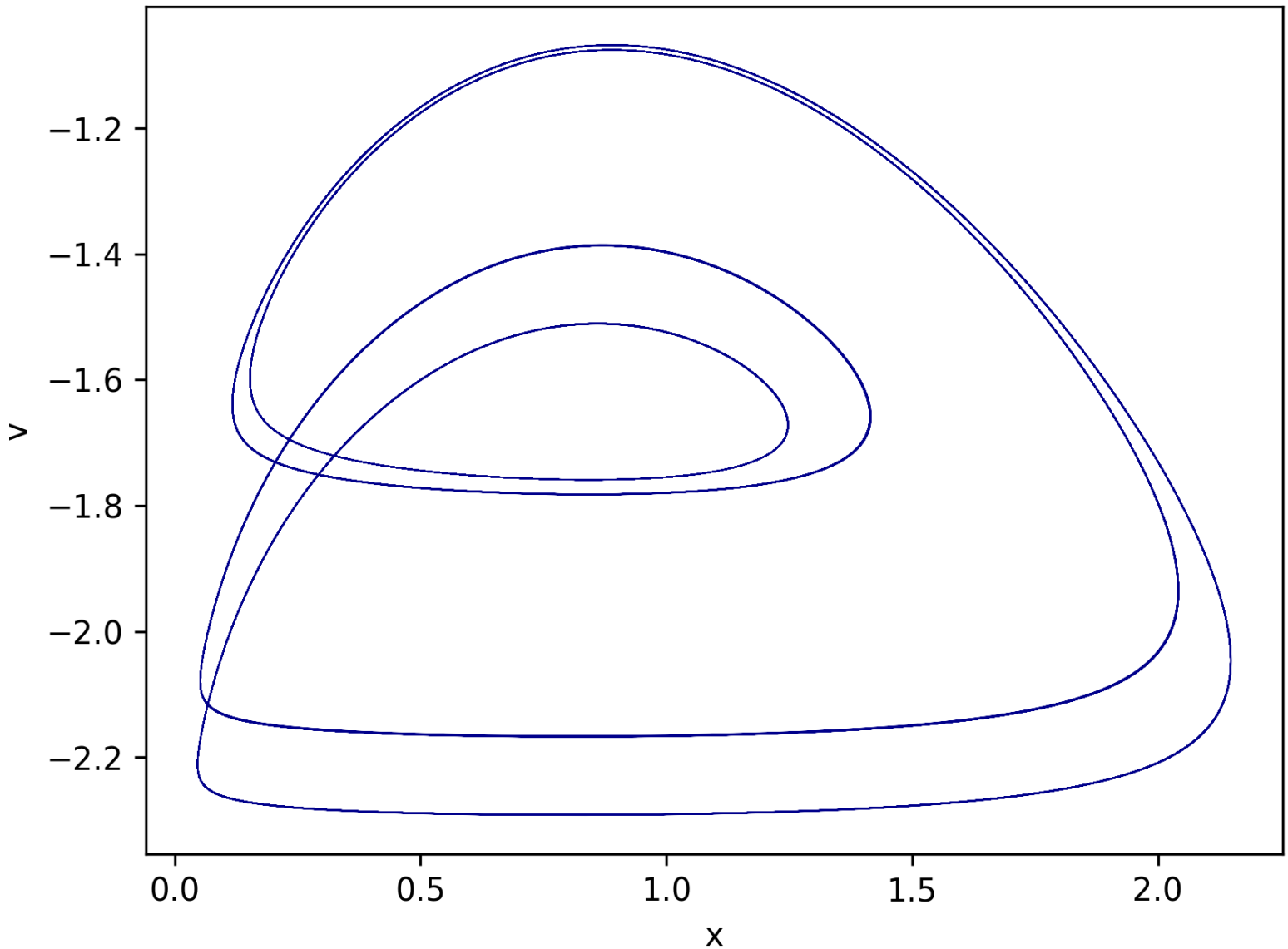
(39.18): a=3.385, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[2.01165, 0.92517, -1.8465, -0.04466] Time=4000.0 Step=0.0005 Start=8000



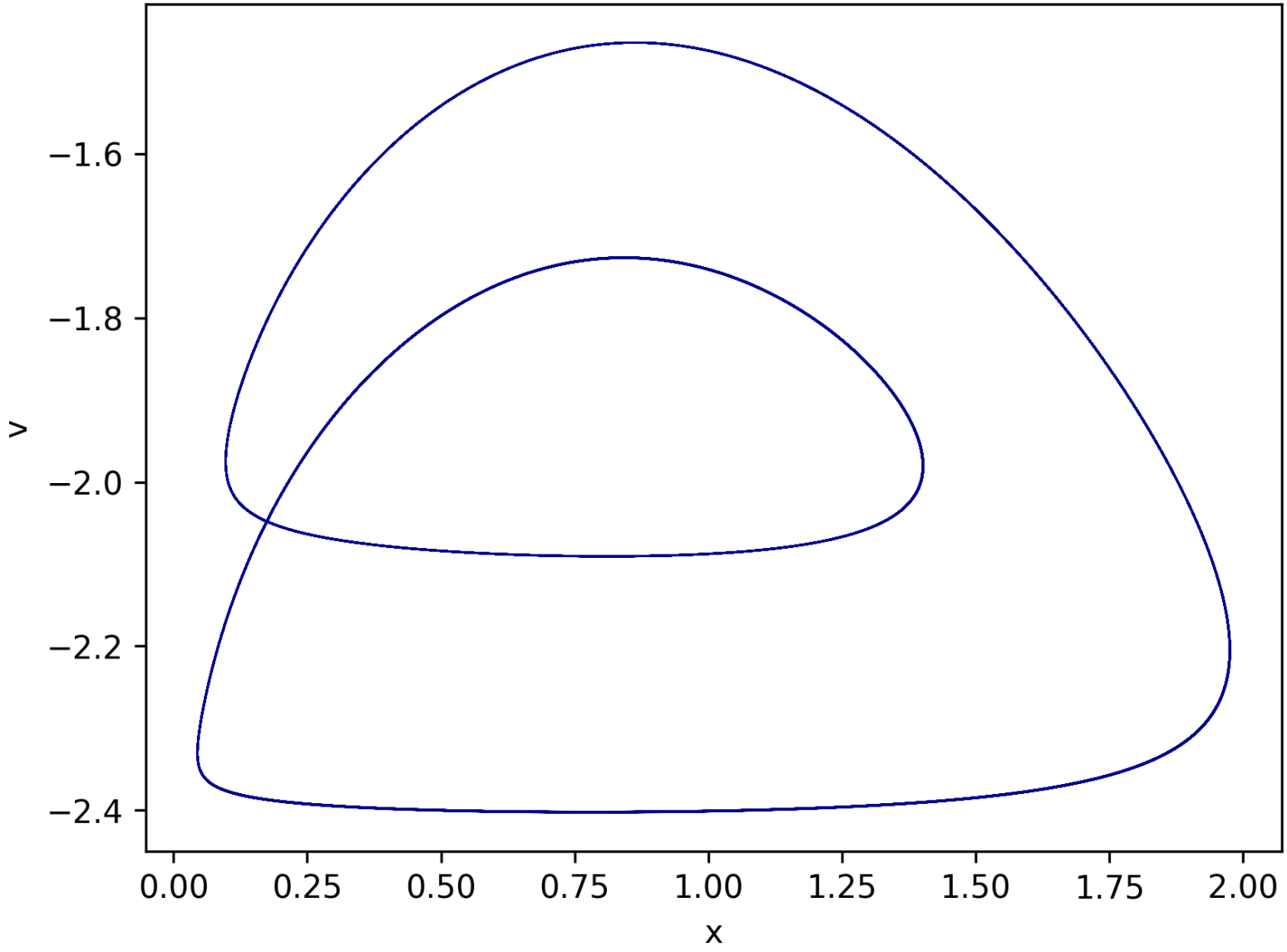
(39.18): a=3.4, b=0.33, d=0.1, p=0.4, q=0.1, c=0.1 StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.88547, 0.80154, -1.27777, -0.05297] Time=3000.0 Step=0.004 Start=1000



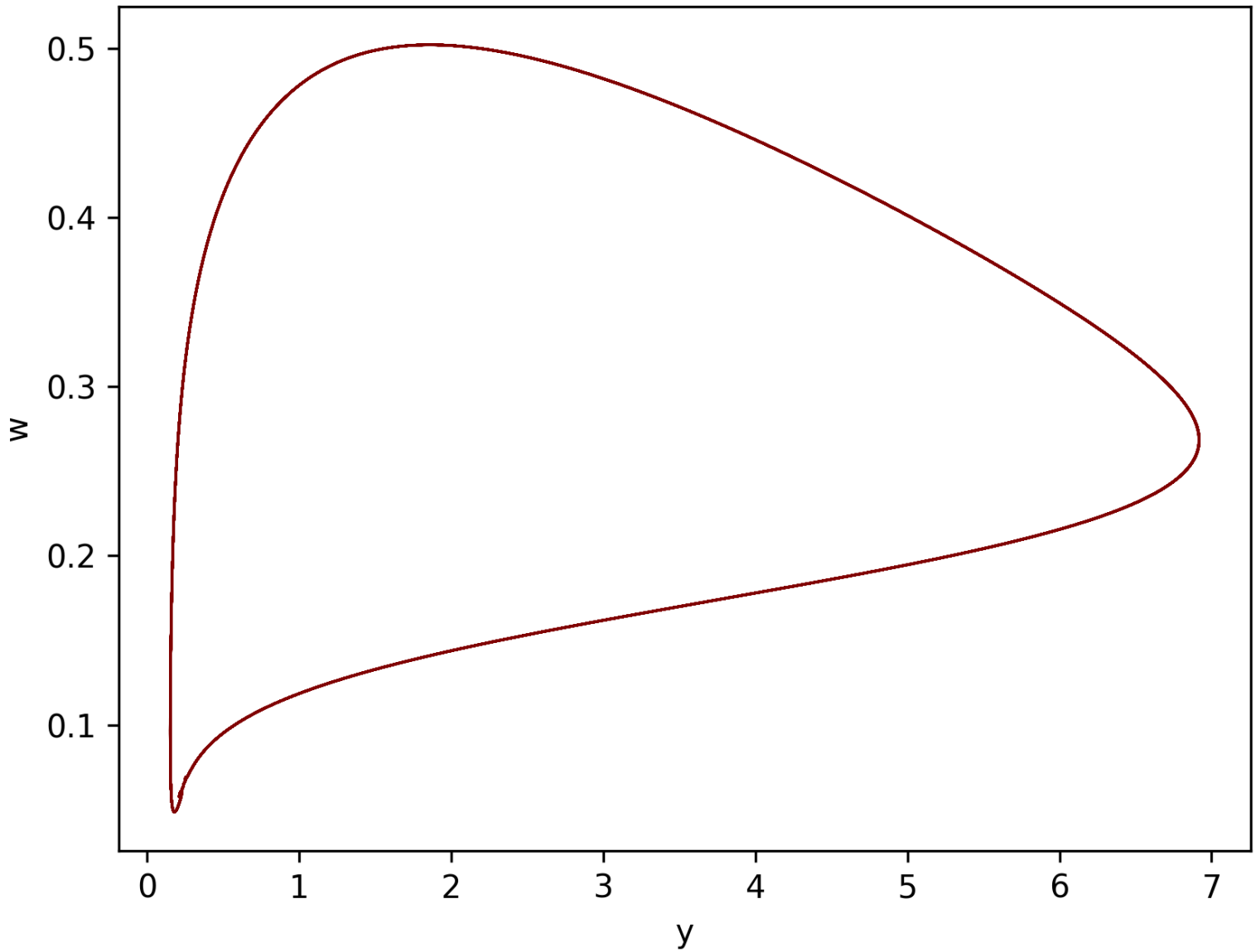
(39.18): a=3.5, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[0.95467, 0.6502, -1.07013, -0.04626]   Time=3000.0   Step=0.004   Start=1000



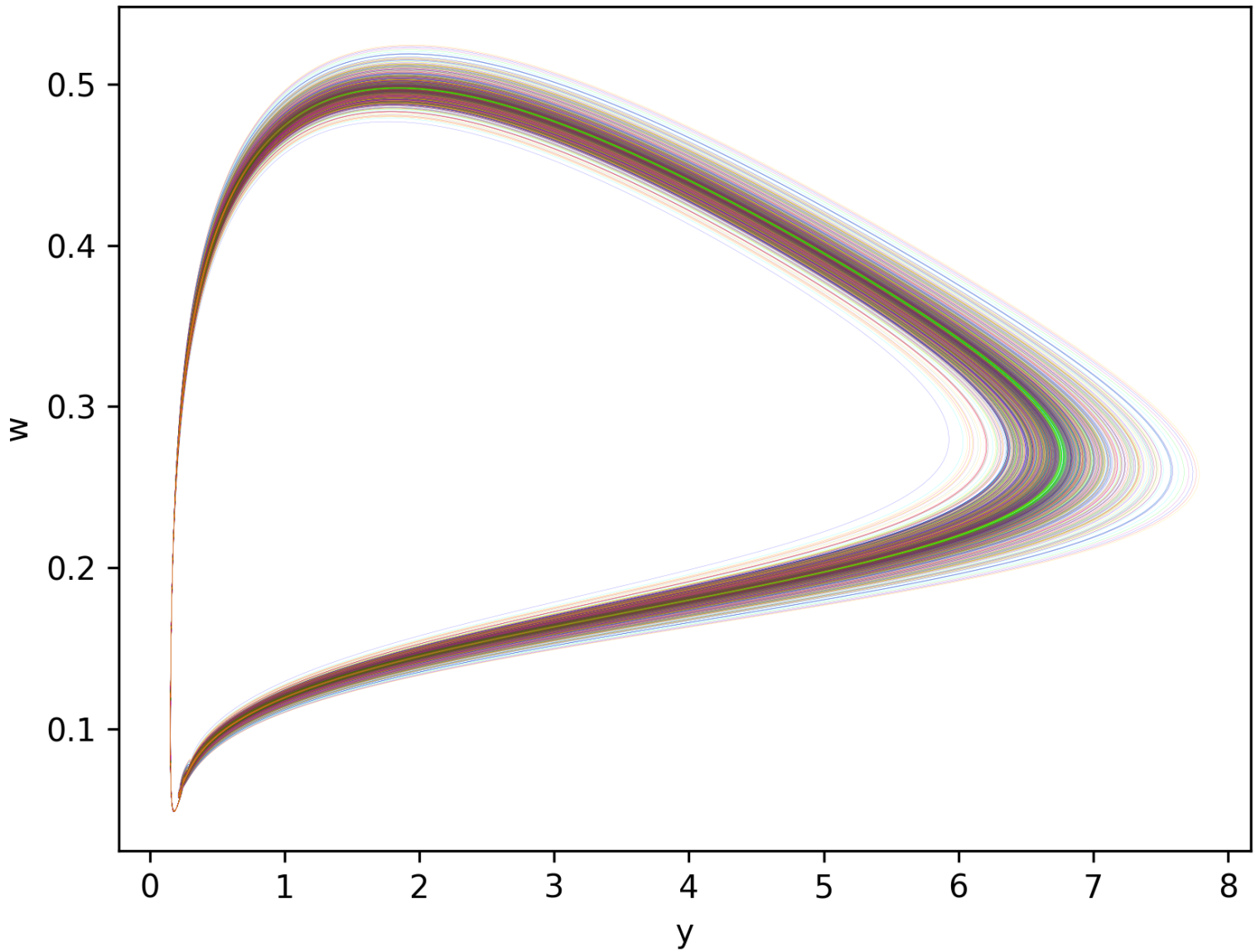
(39.18): a=4.0, b=0.33, d=0.1,   p=0.4, q=0.1, c=0.1   StSt=(1.07917, 0.8126, 0.8709, 0.61667)
End=[1.53892, 0.52905, -1.69282, -0.05838]   Time=3000.0   Step=0.004   Start=1000



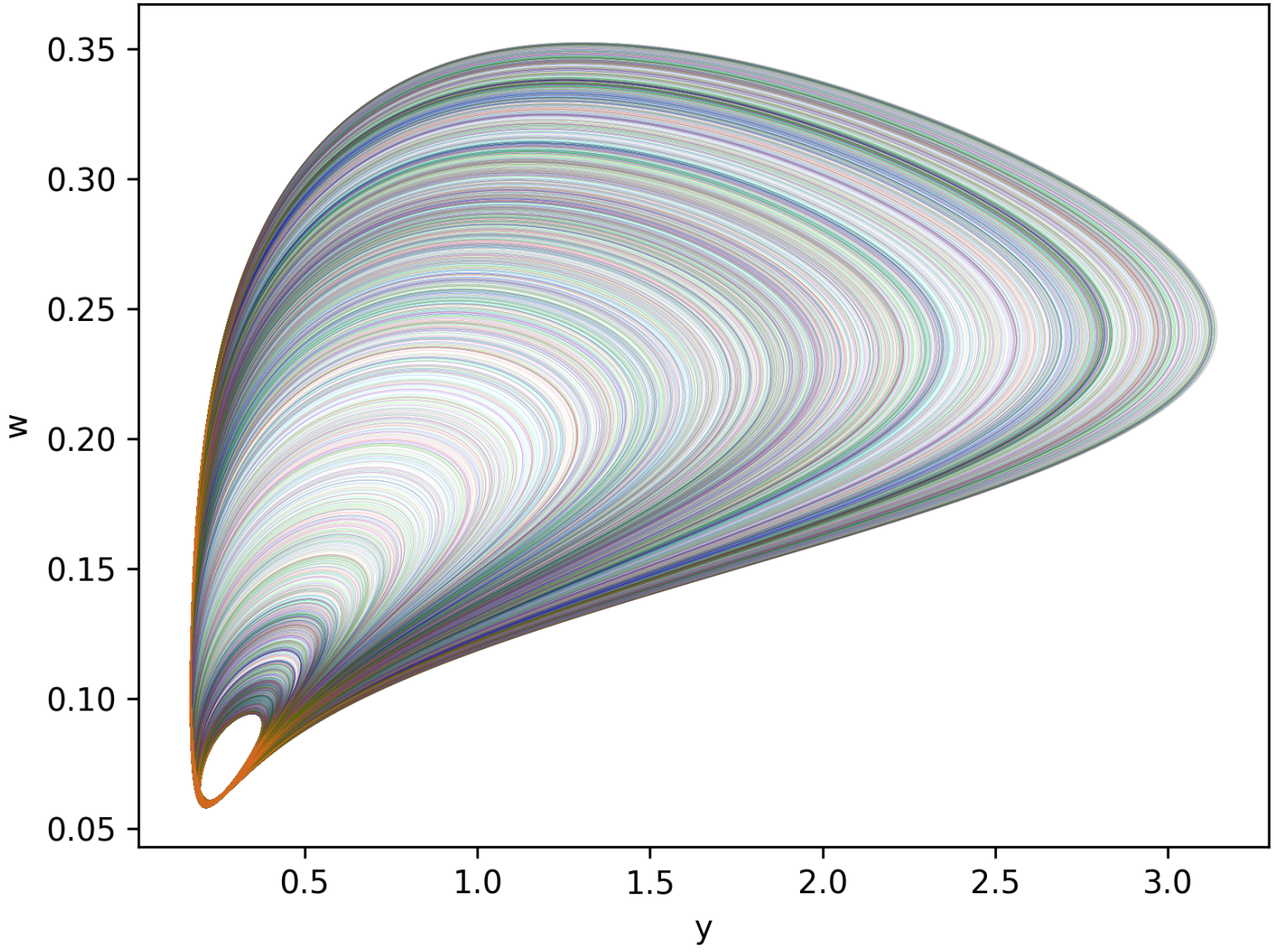
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=1.1, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 0.9272, 0.1719)
End=[0.6238, 0.3822, 0.7533, 0.38]   Time=1000.0   Step=0.002   Start=2000



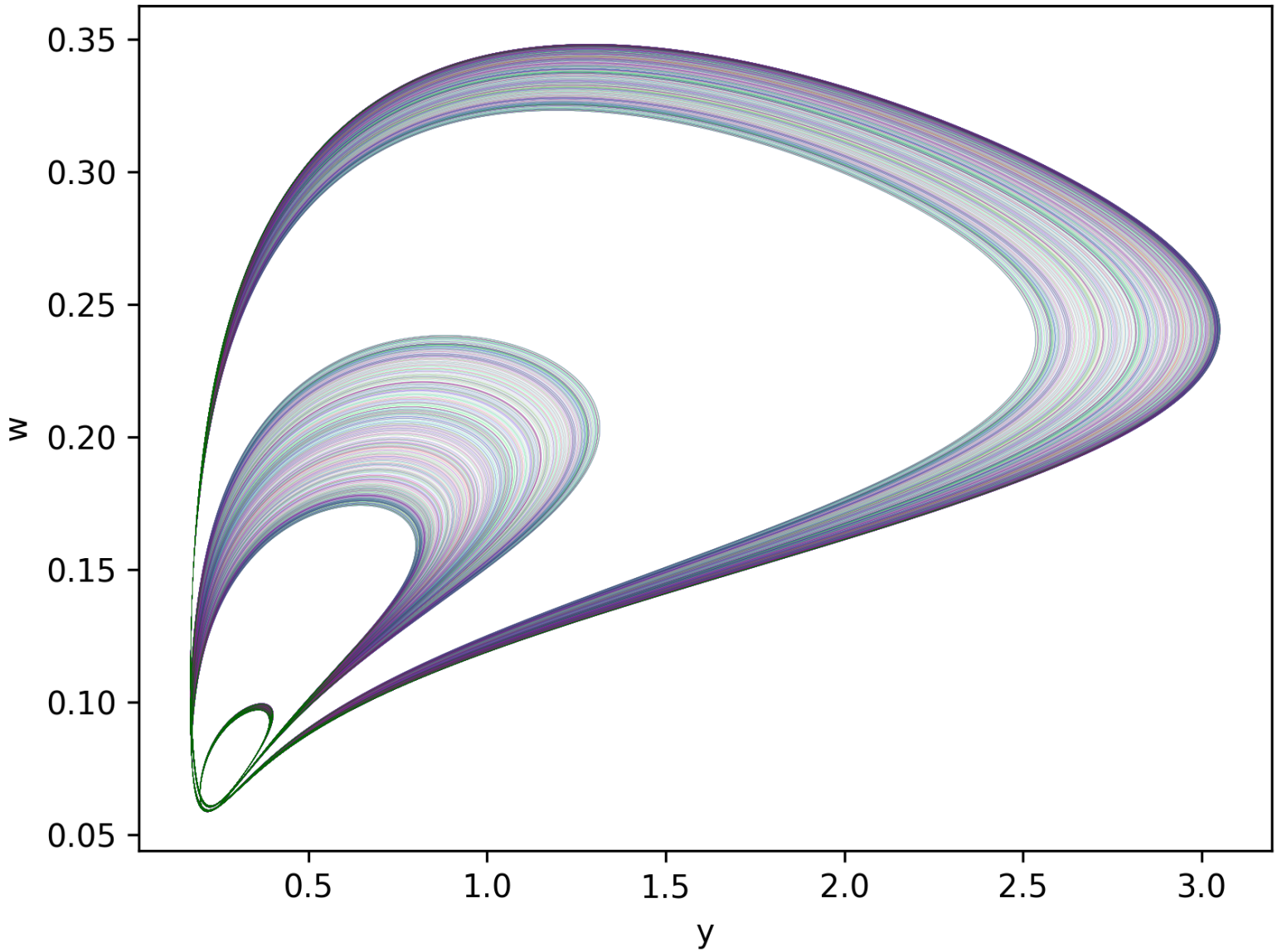
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=1.12, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 0.944, 0.1719)
End=[2.4318, 0.2411, 0.6414, 0.0647]   Time=6000.0   Step=0.002   Start=2000



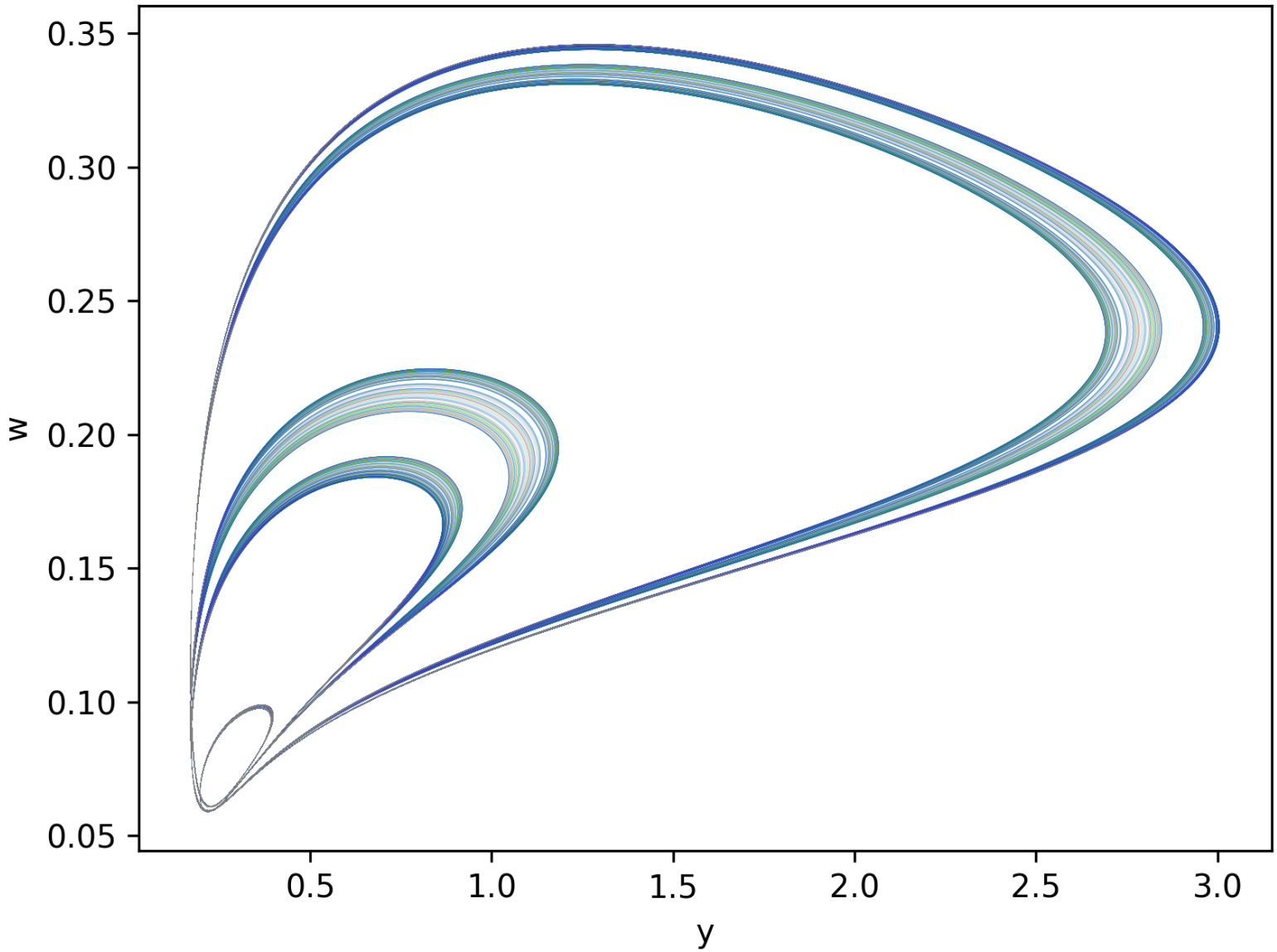
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1, e=2.52, f=0.2, g=0.27, h=1.33 StSt=(1.3242, 0.6365, 2.1241, 0.1719)
End=[2.6687, 0.2248, 1.5177, 0.0586] Time=3000.0 Step=0.002 Start=2000



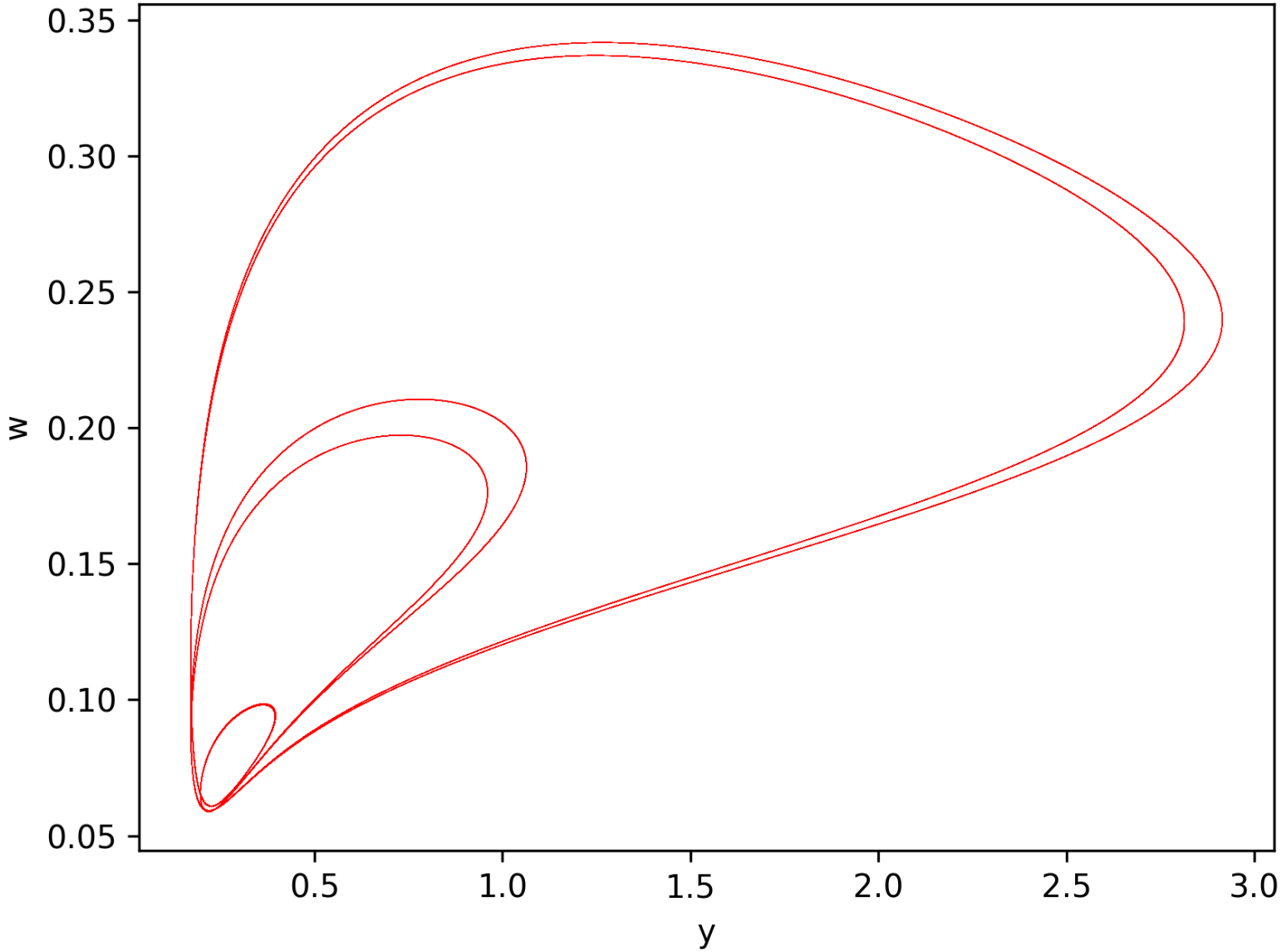
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.542, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.1426, 0.1719)
End=[2.6248, 0.2045, 1.475, 0.0632]   Time=3000.0   Step=0.002   Start=2000



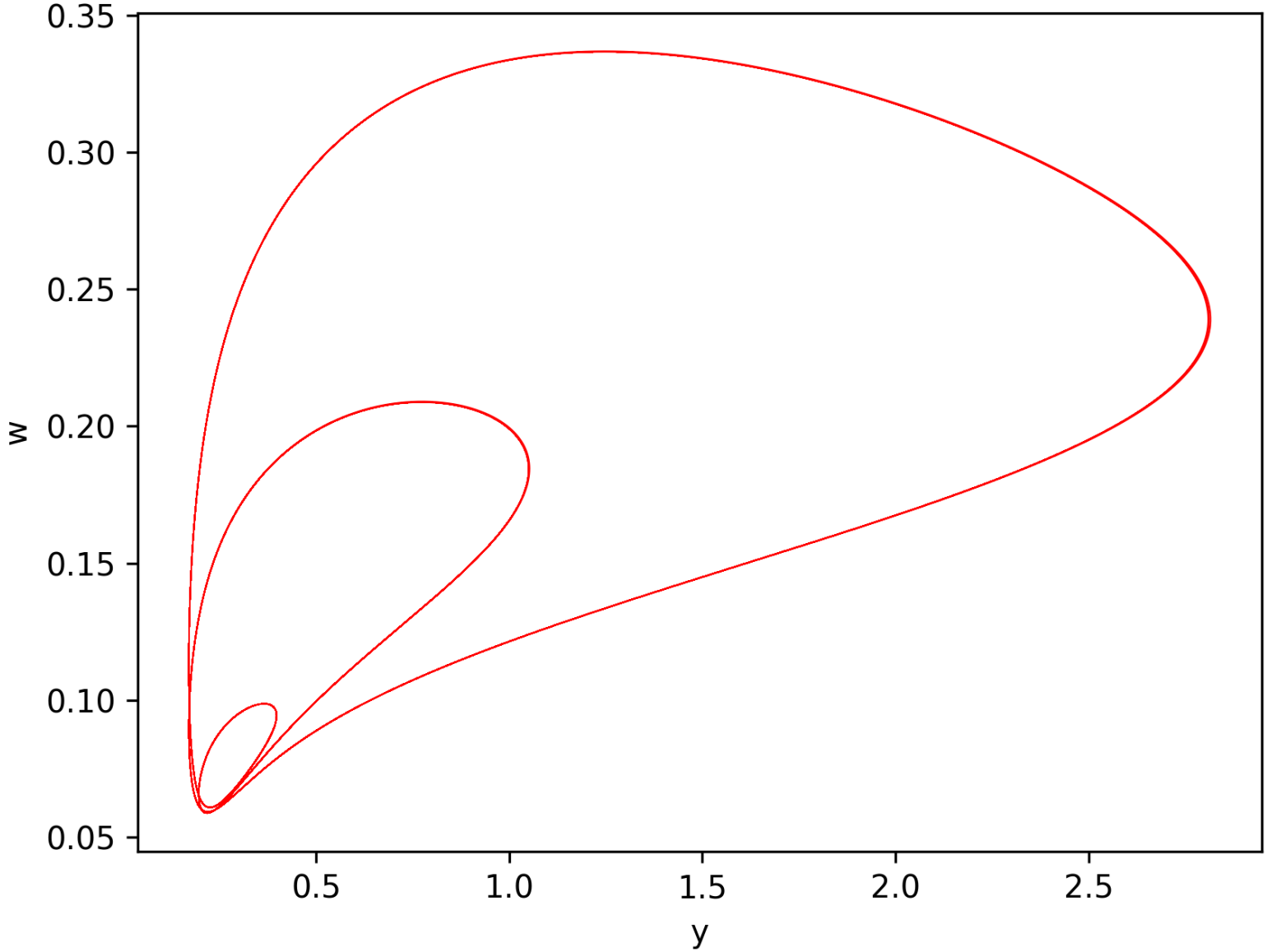
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.545, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.1452, 0.1719)
End=[0.7928, 0.4377, 1.742, 0.285]   Time=3000.0   Step=0.002   Start=2000



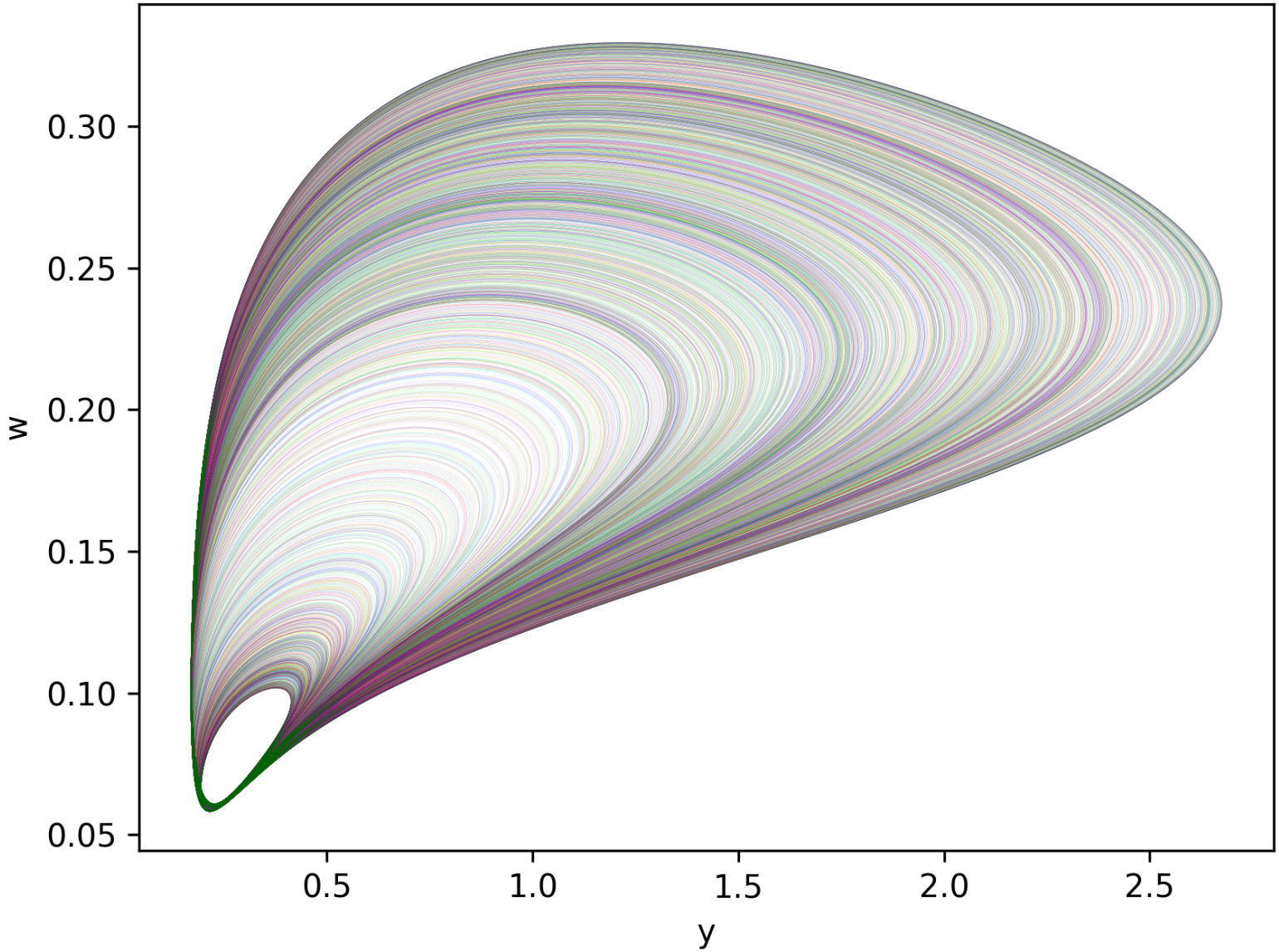
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.55, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.1494, 0.1719)
End=[1.8722, 0.3953, 1.612, 0.0958]   Time=6000.0   Step=0.002   Start=4000



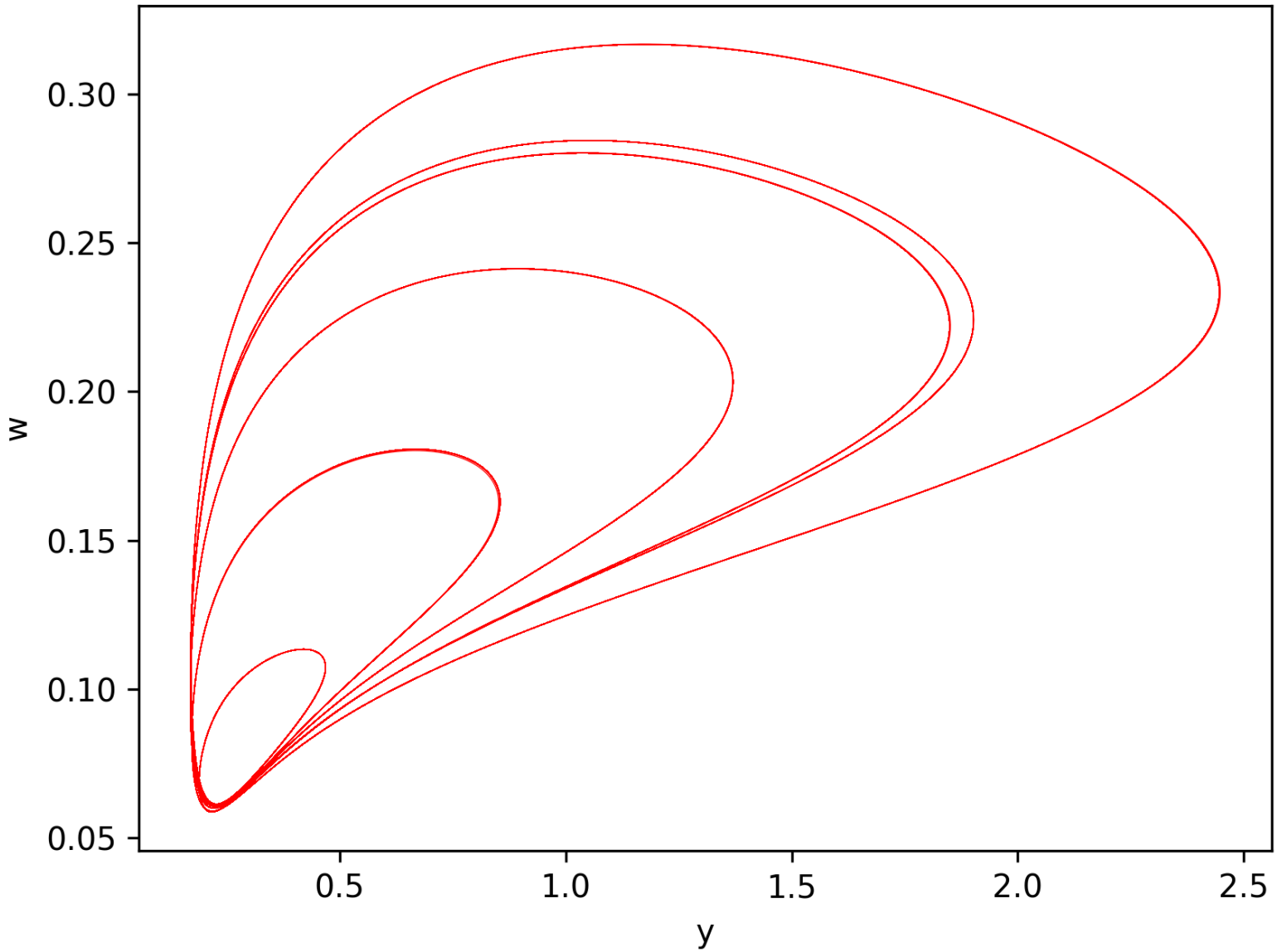
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.555, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.1536, 0.1719)
End=[1.3165, 0.2811, 1.7436, 0.1656]   Time=2000.0   Step=0.002   Start=4000



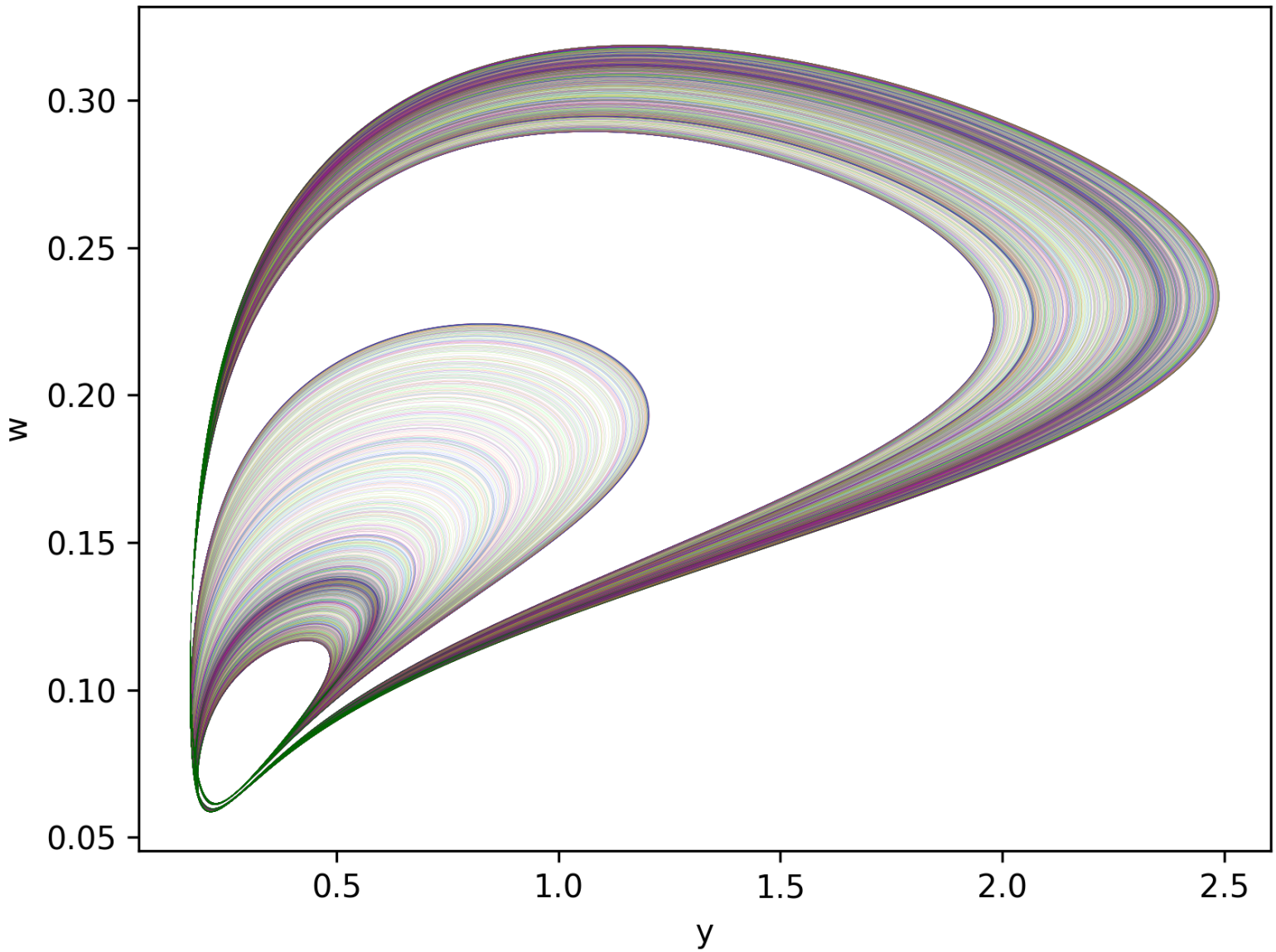
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1, e=2.58, f=0.2, g=0.27, h=1.33 StSt=(1.3242, 0.6365, 2.1747, 0.1719)
End=[1.3738, 0.75, 1.7198, 0.13] Time=3000.0 Step=0.002 Start=2000



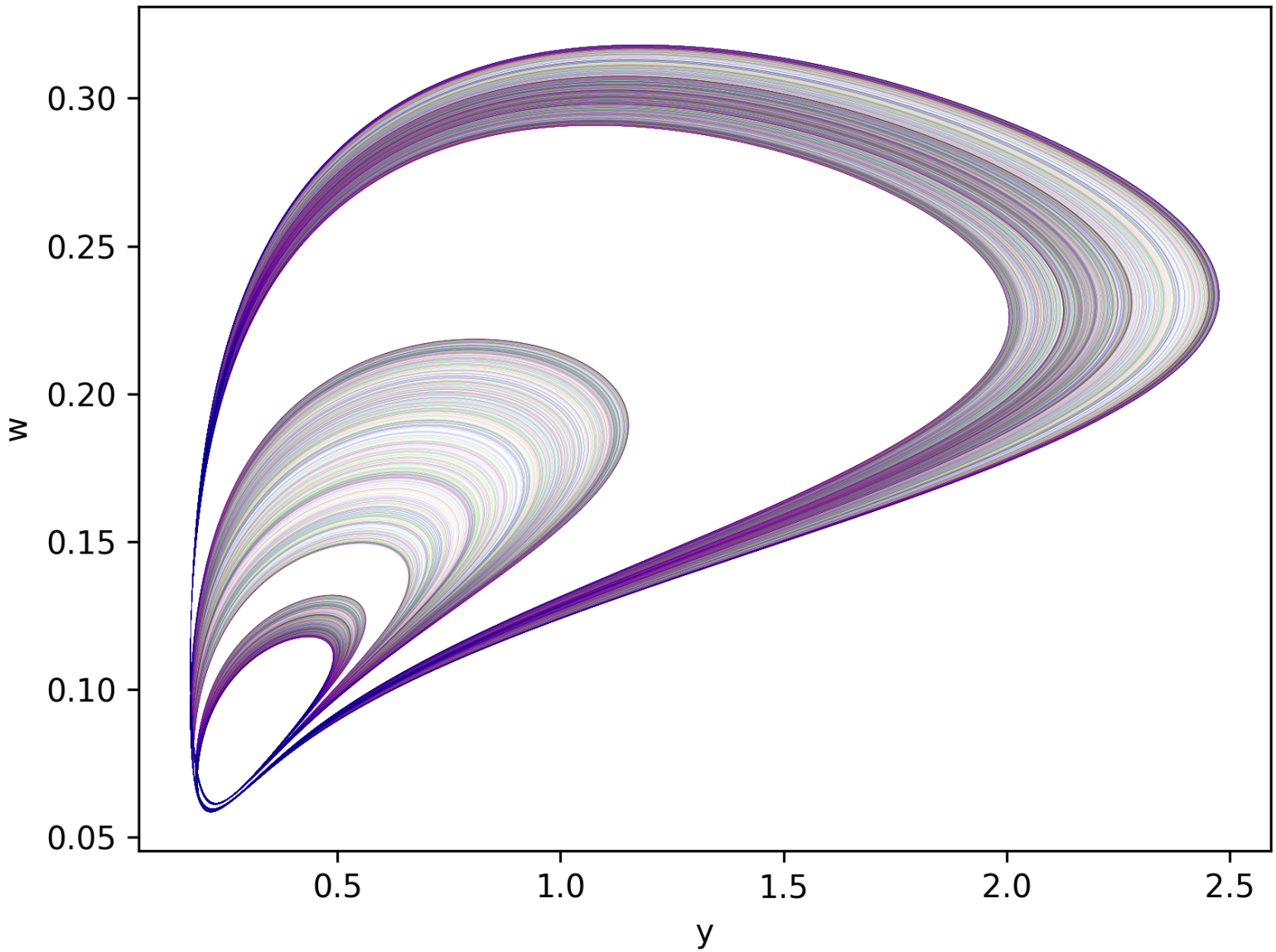
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.64, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2252, 0.1719)
End=[0.4042, 1.579, 1.8811, 0.2689]   Time=6000.0   Step=0.002   Start=4000



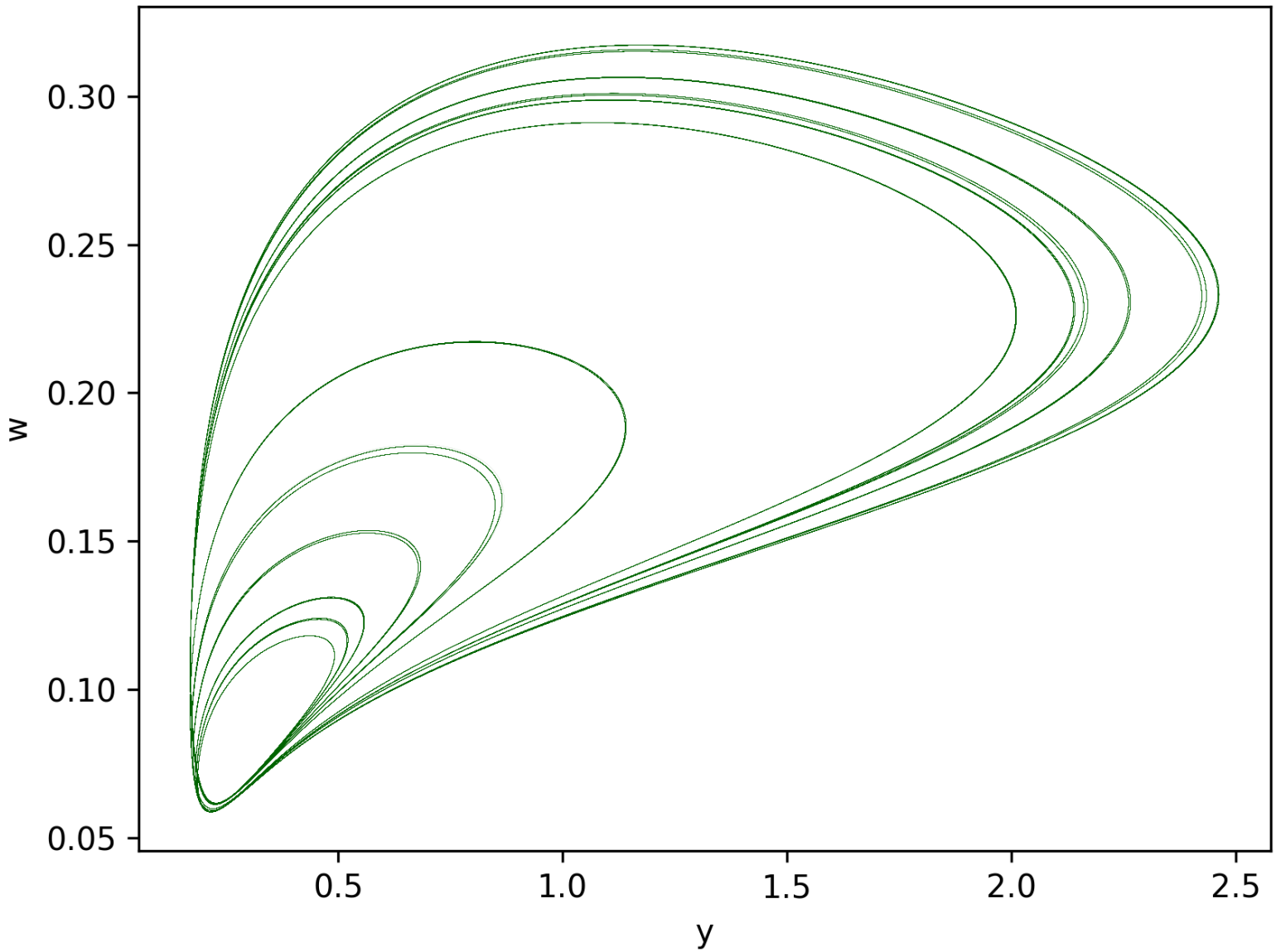
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1, e=2.6545, f=0.2, g=0.27, h=1.33 StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2375, 0.1719)
End=[1.9364, 0.455, 1.6767, 0.0919] Time=3000.0 Step=0.002 Start=2000



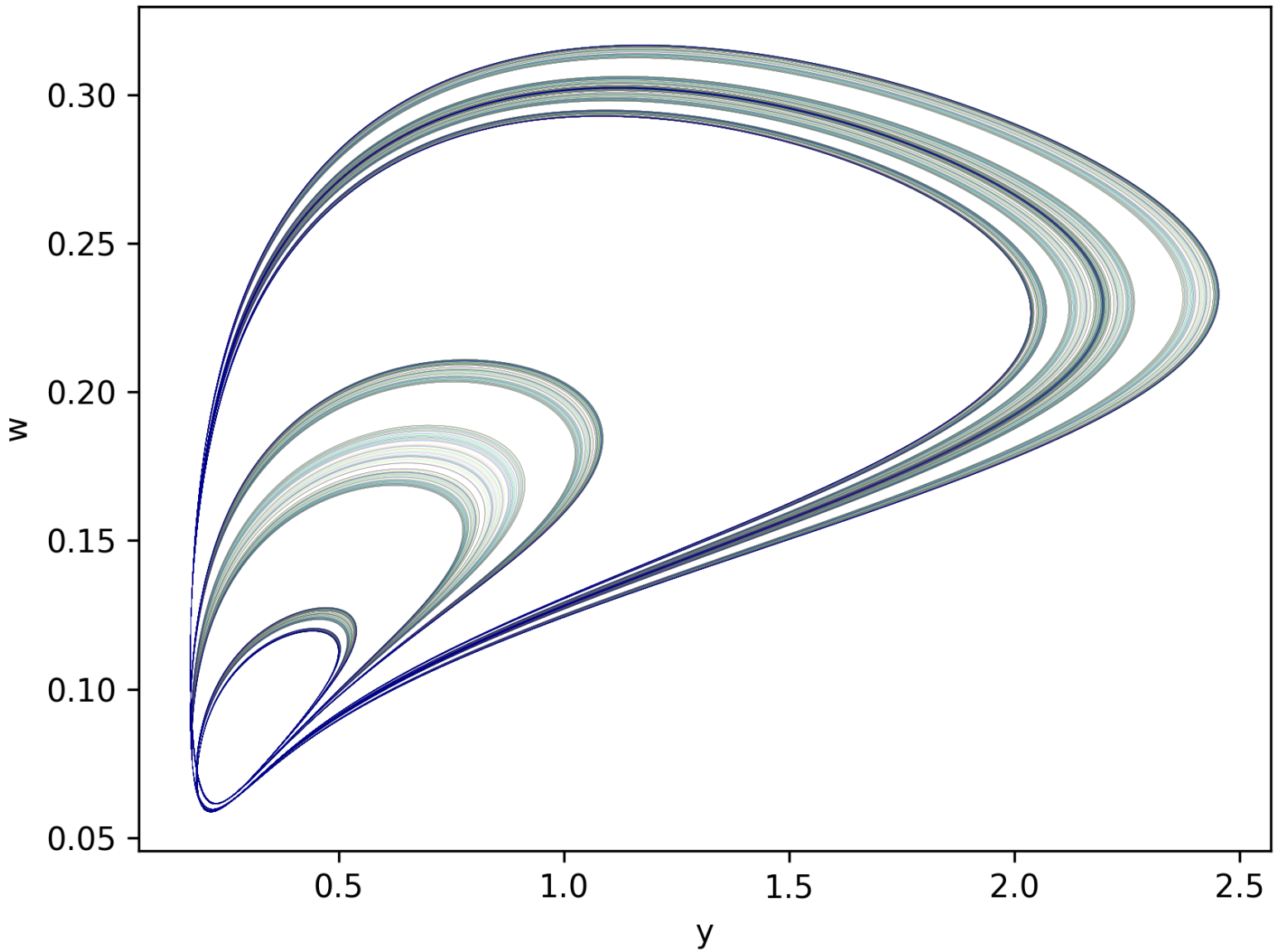
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1, e=2.659, f=0.2, g=0.27, h=1.33 StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2413, 0.1719)
End=[2.2966, 0.3578, 1.641, 0.0746] Time=3000.0 Step=0.002 Start=2000



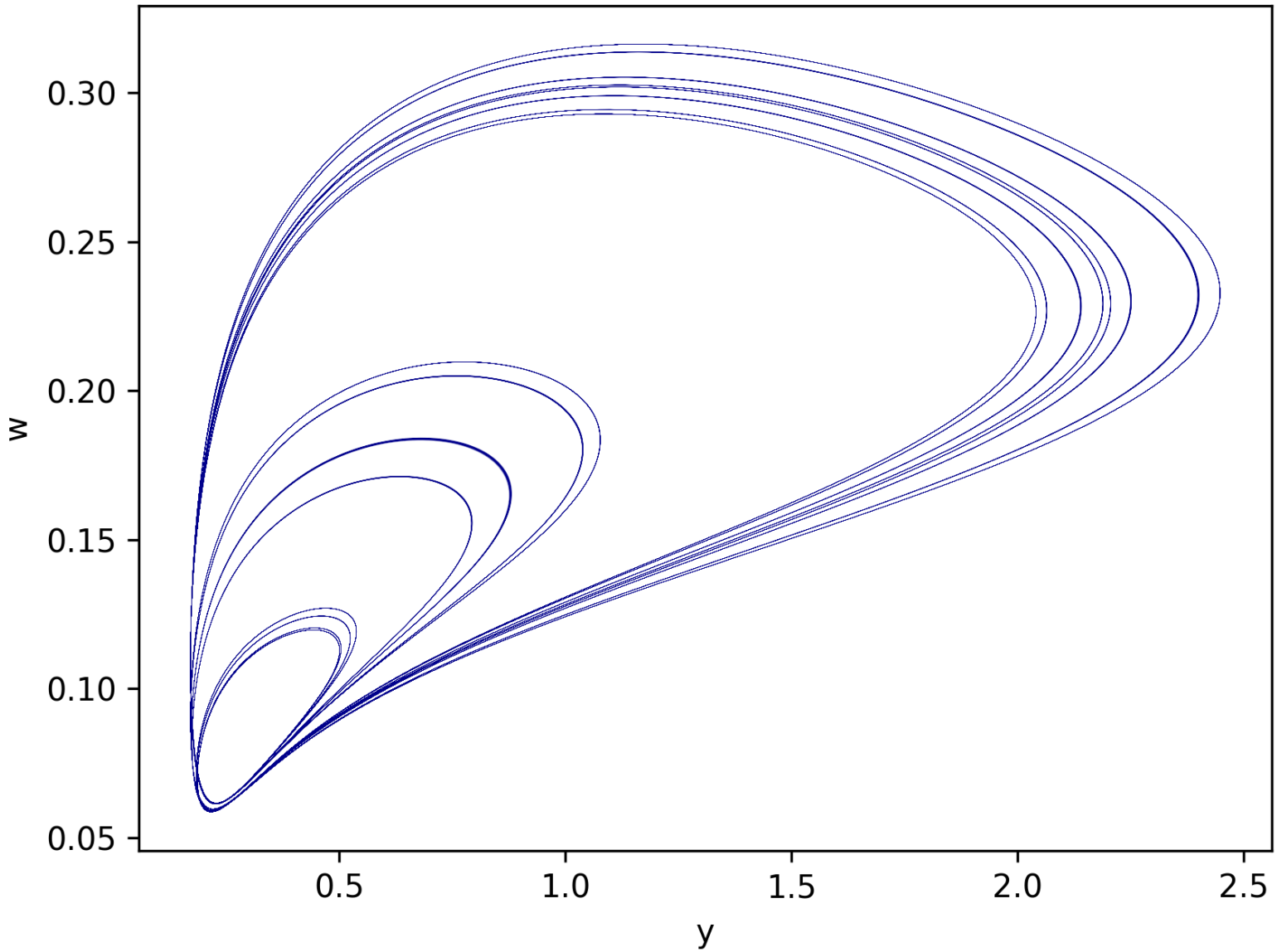
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.66, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2421, 0.1719)
End=[2.0397, 0.4641, 1.6905, 0.087]   Time=6000.0   Step=0.002   Start=4000



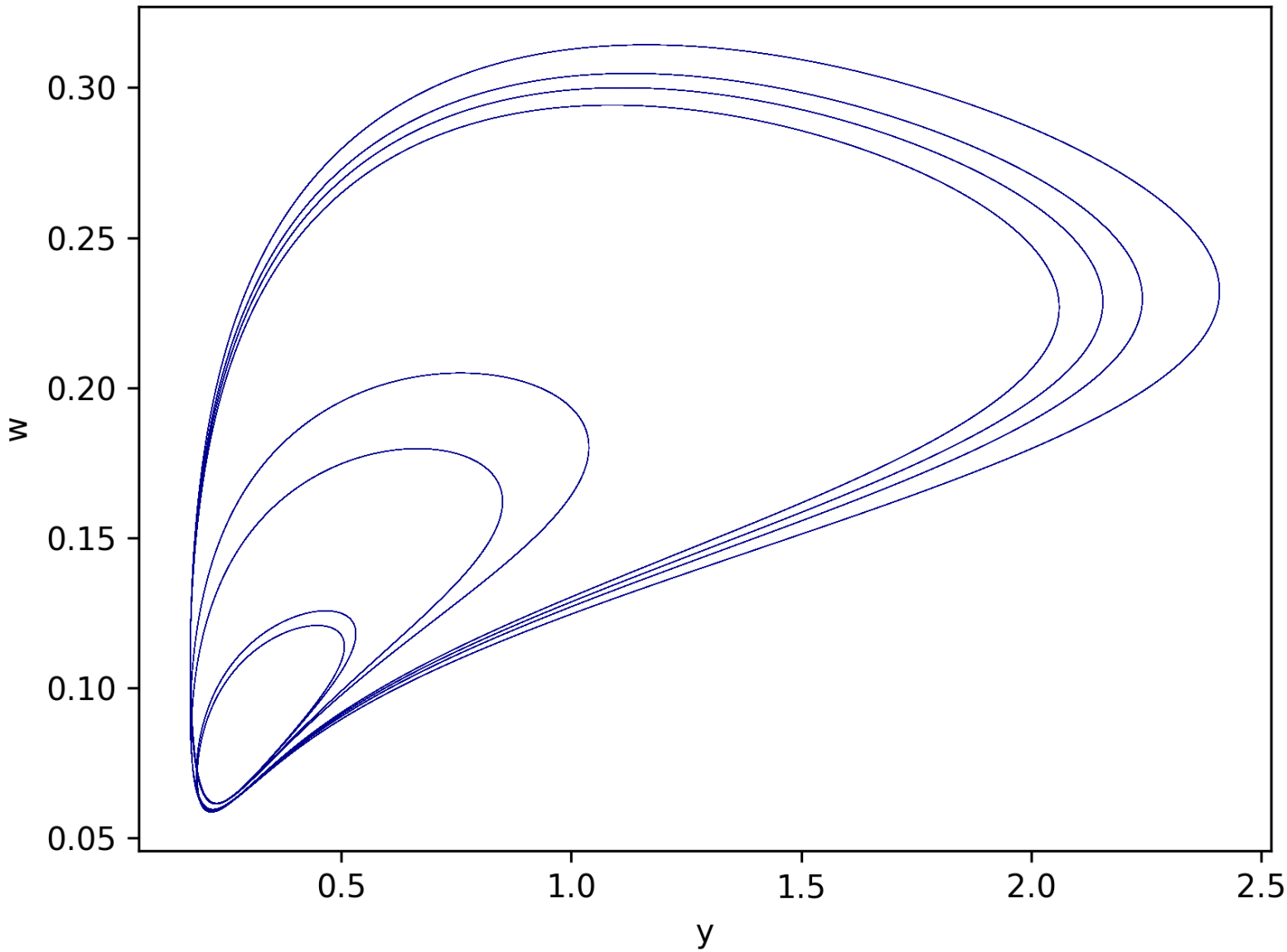
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1, e=2.6651, f=0.2, g=0.27, h=1.33 StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2464, 0.1719)
End=[2.6399, 0.204, 1.5707, 0.0635] Time=2000.0 Step=0.002 Start=2000



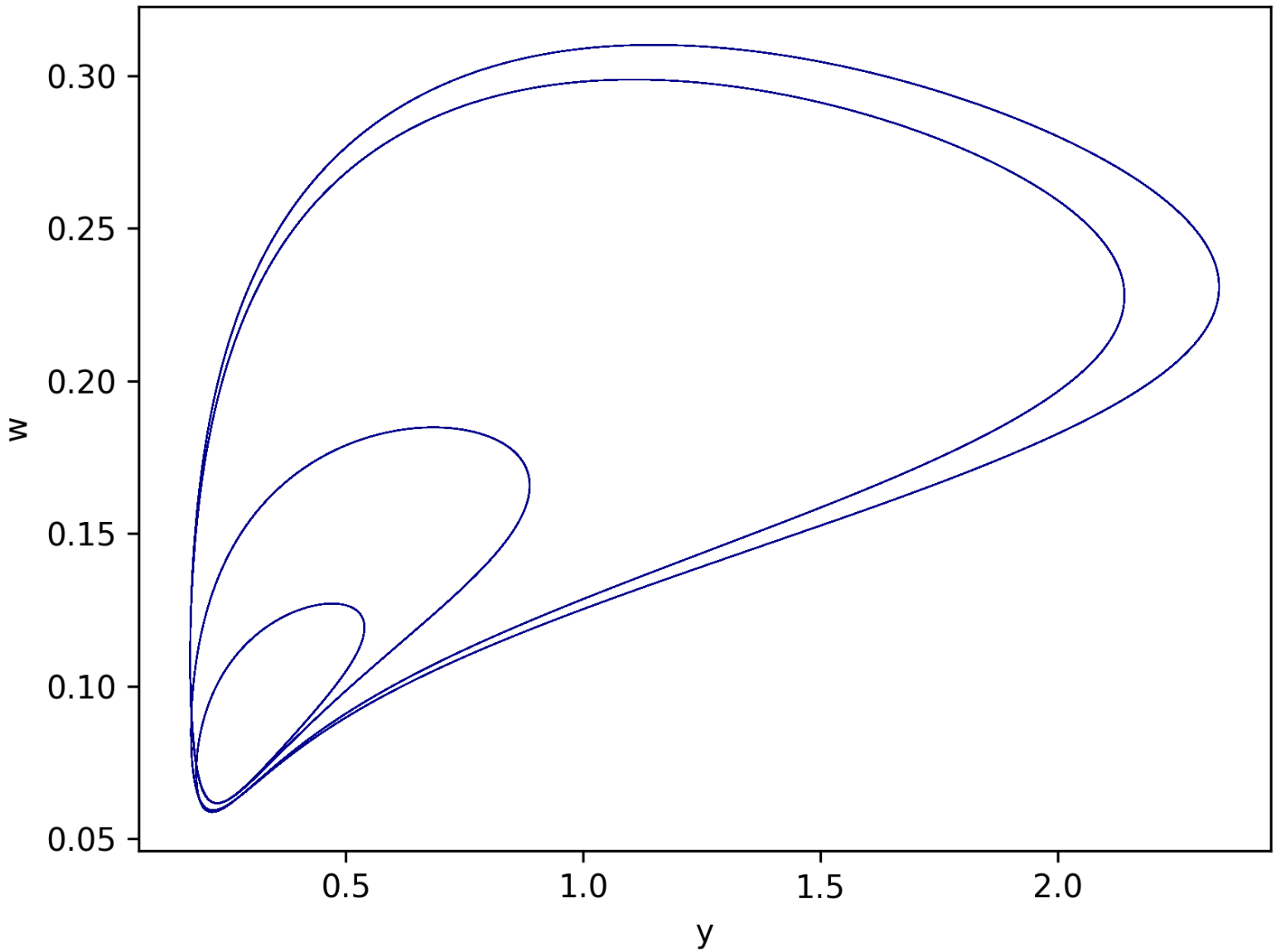
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.666, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2472, 0.1719)
End=[1.6487, 0.3153, 1.7581, 0.1154]   Time=4000.0   Step=0.002   Start=4000



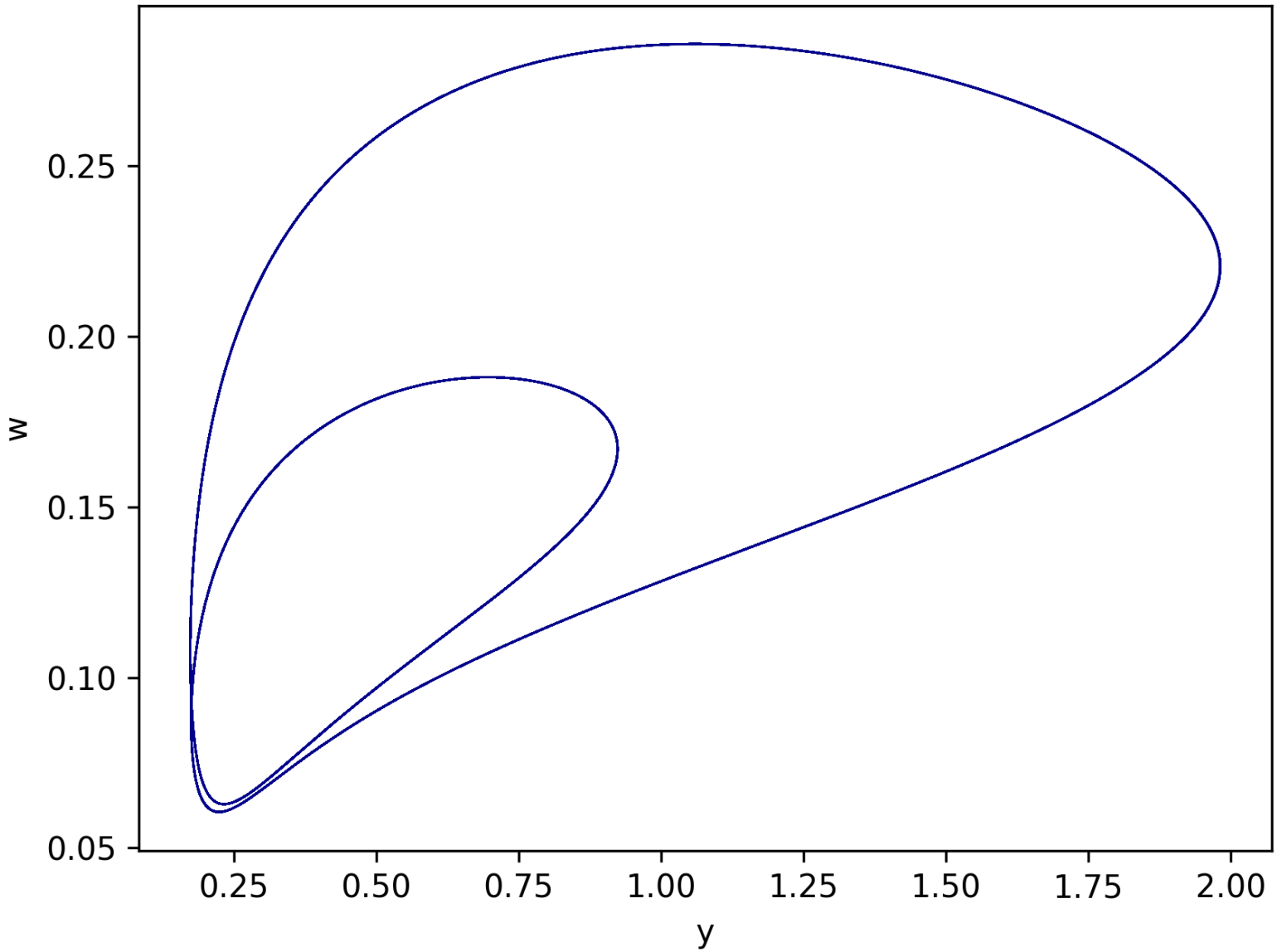
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1, e=2.67, f=0.2, g=0.27, h=1.33 StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2505, 0.1719)
End=[1.9638, 0.1728, 1.6891, 0.1232] Time=4000.0 Step=0.002 Start=4000



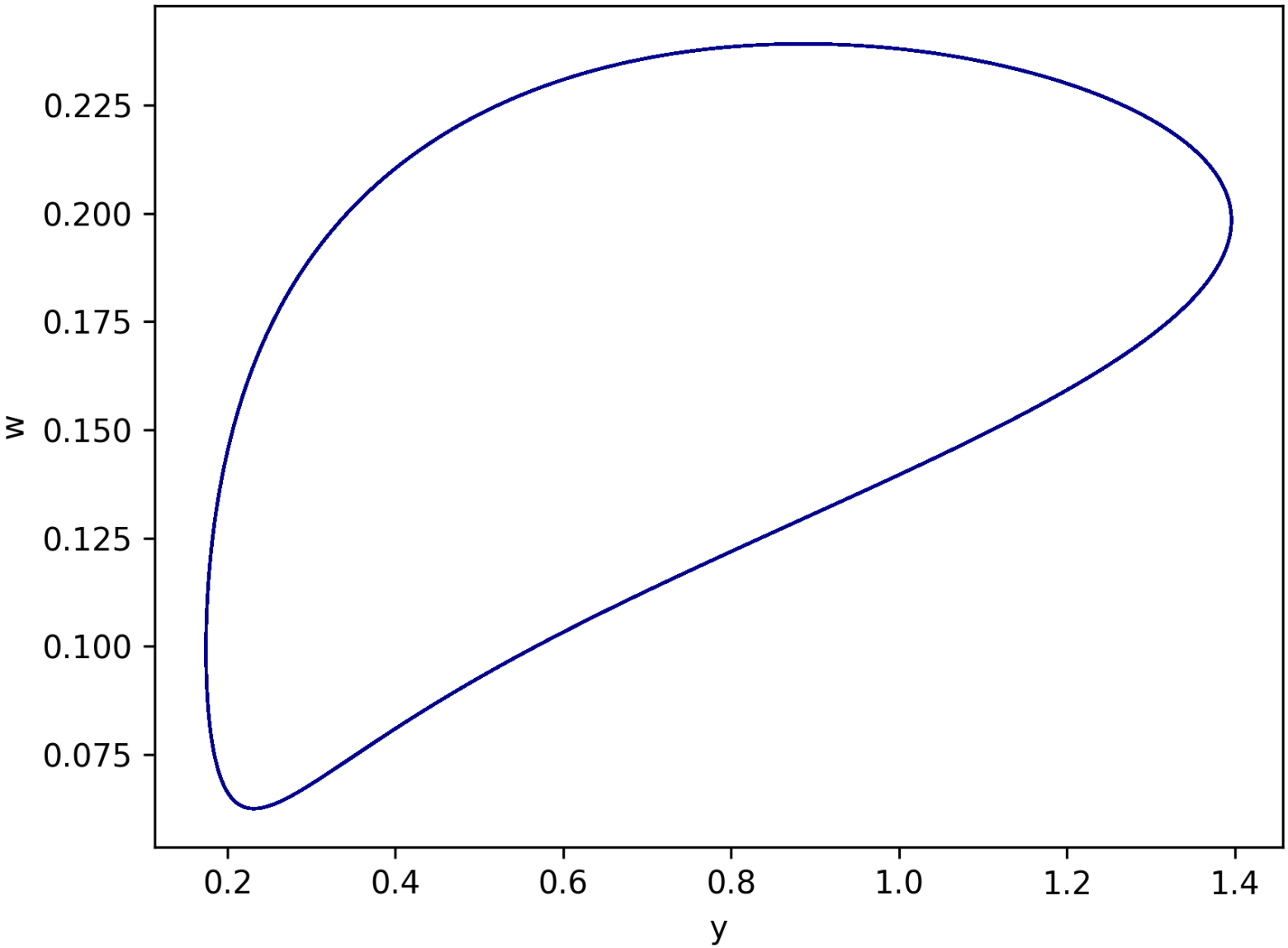
(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.69, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.2674, 0.1719)
End=[2.5502, 0.26, 1.5866, 0.0637]   Time=4000.0   Step=0.002   Start=4000

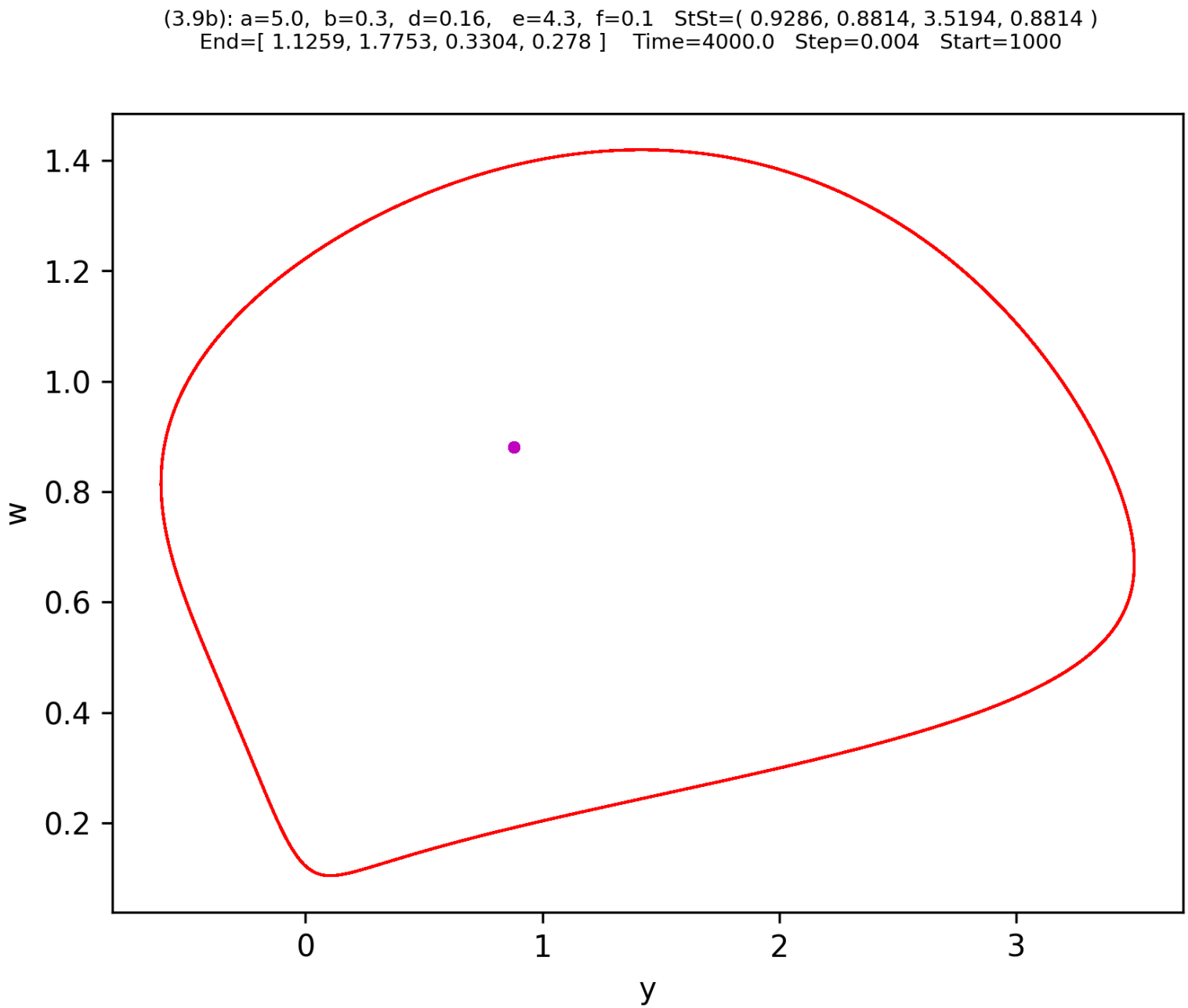


(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.85, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.4023, 0.1719)
End=[0.9013, 1.549, 1.9843, 0.1638]   Time=4000.0   Step=0.002   Start=4000

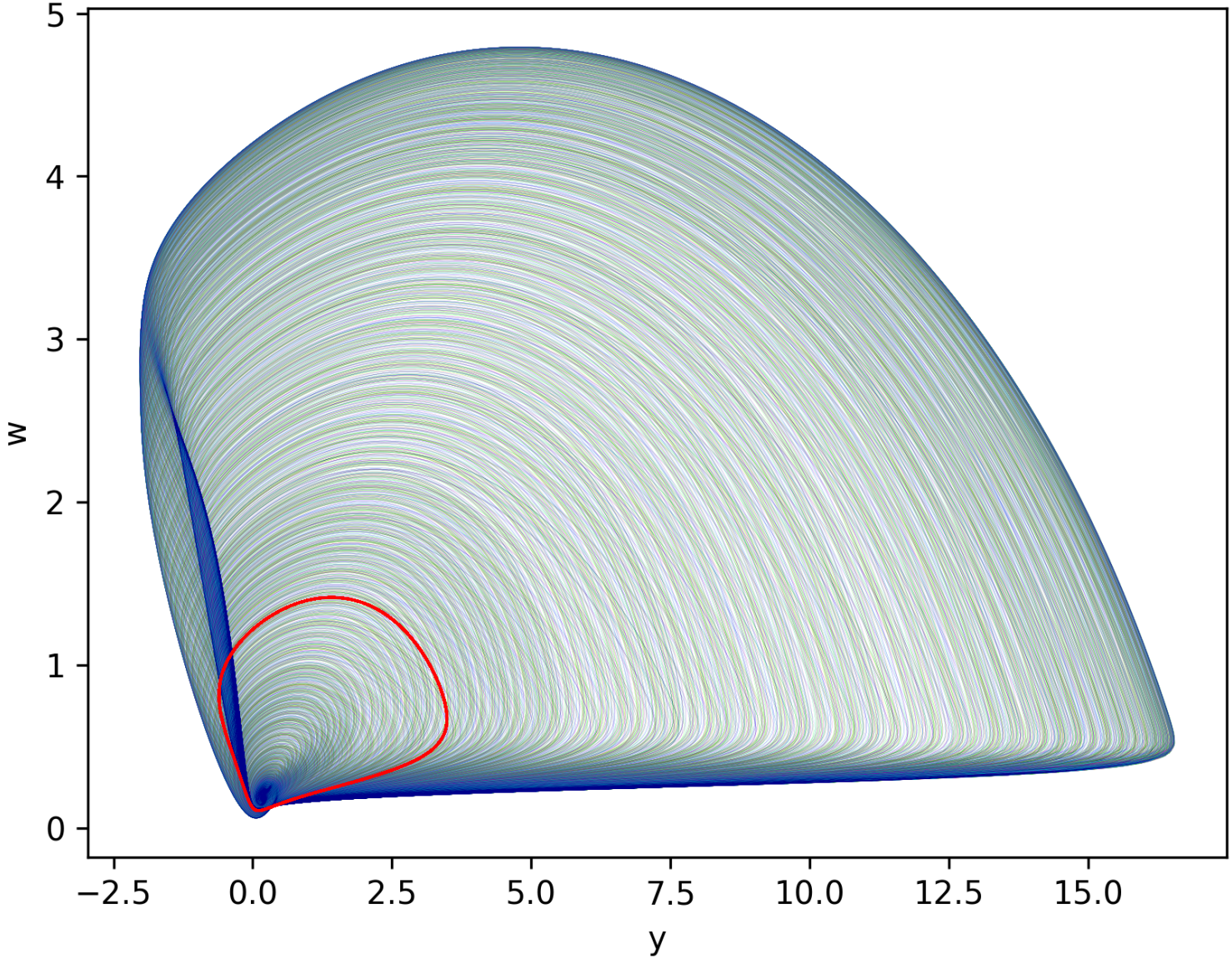


(3.9a): a=7.0, b=0.35, d=0.1,   e=2.95, f=0.2, g=0.27, h=1.33   StSt=(1.3242, 0.6365, 2.4865, 0.1719)
End=[2.4647, 0.2999, 1.8011, 0.0682]   Time=1000.0   Step=0.002   Start=1000

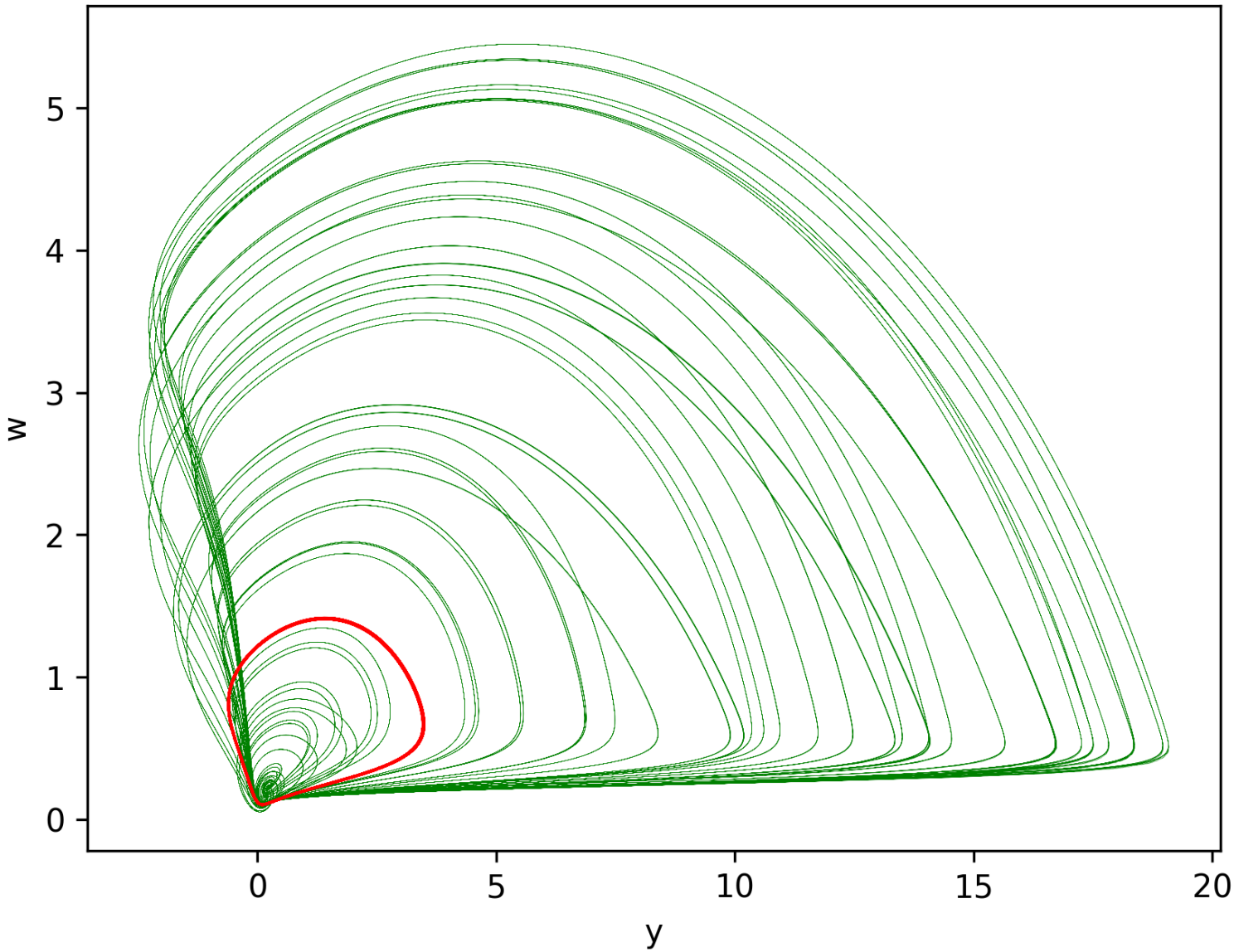



(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.3, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.5194, 0.8814)
End=[1.1259, 1.7753, 0.3304, 0.278] Time=4000.0 Step=0.004 Start=1000
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
w
0
1
2
3
y

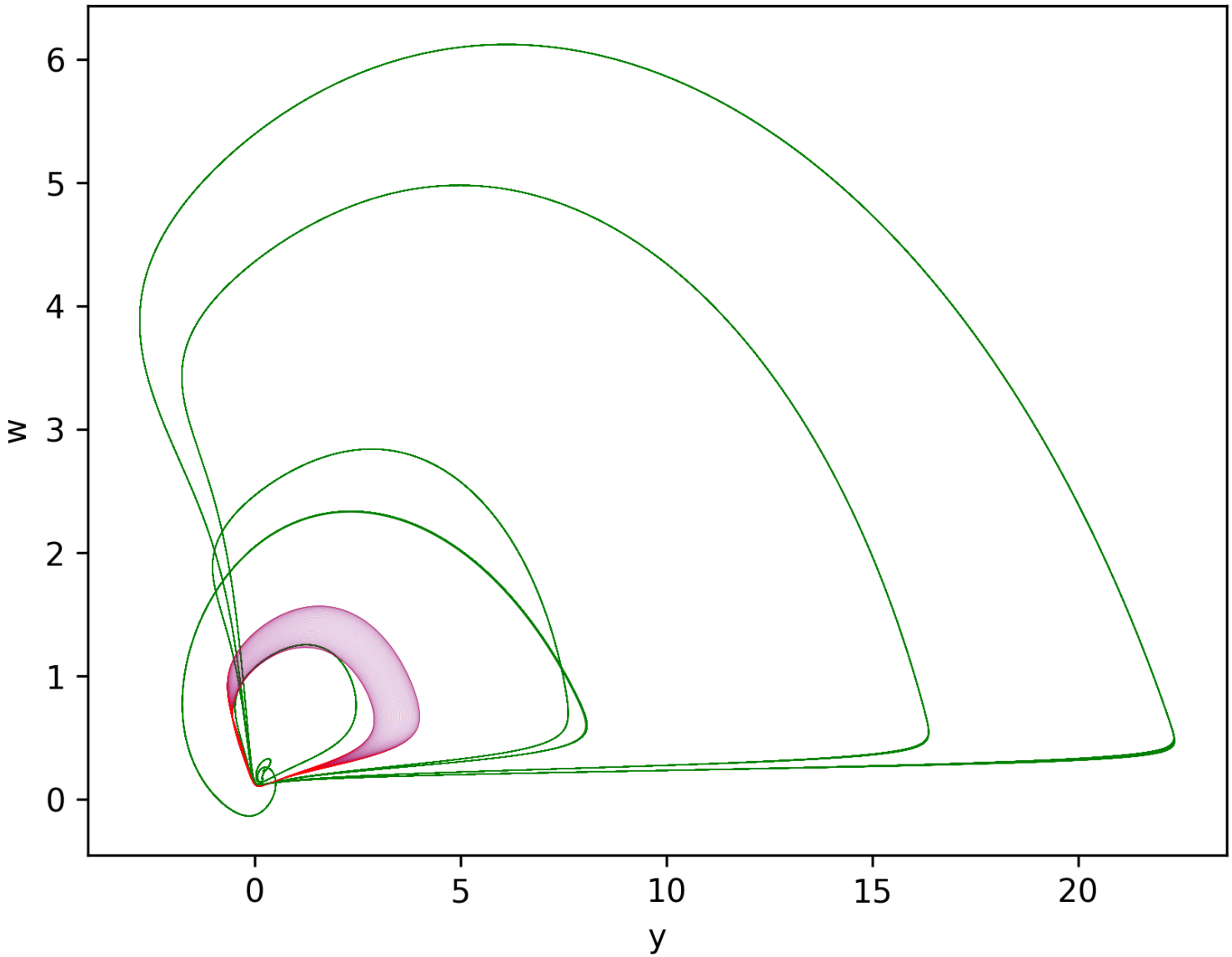
(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.32, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.5358, 0.8814)
End=[0.1448, 1.1826, 0.4261, 1.4093] Time=3000.0 Step=0.004 Start=3000



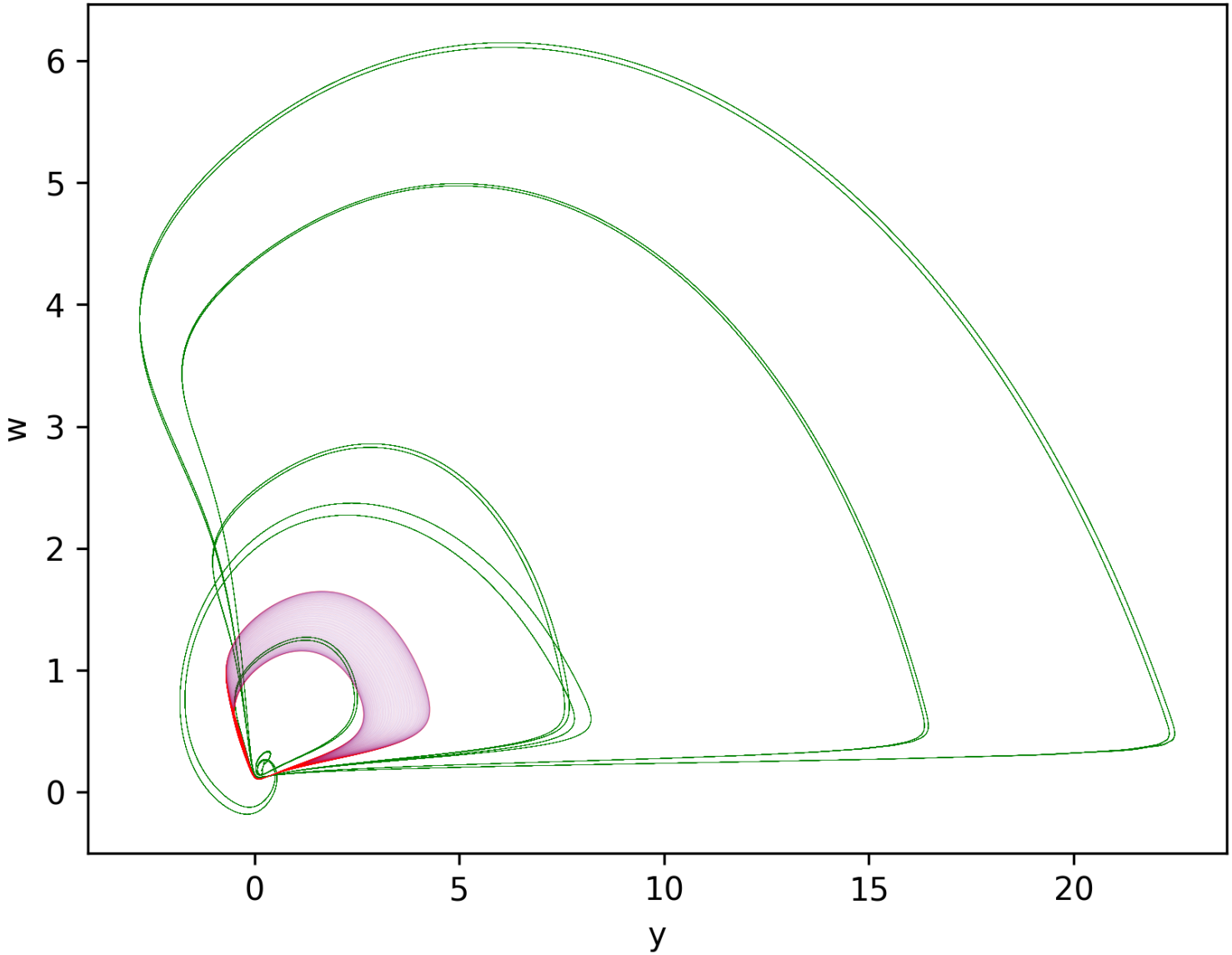
(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.33, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.544, 0.8814)
End=[3.8686, -0.045, 0.0942, 0.1465] Time=4000.0 Step=0.004 Start=4000



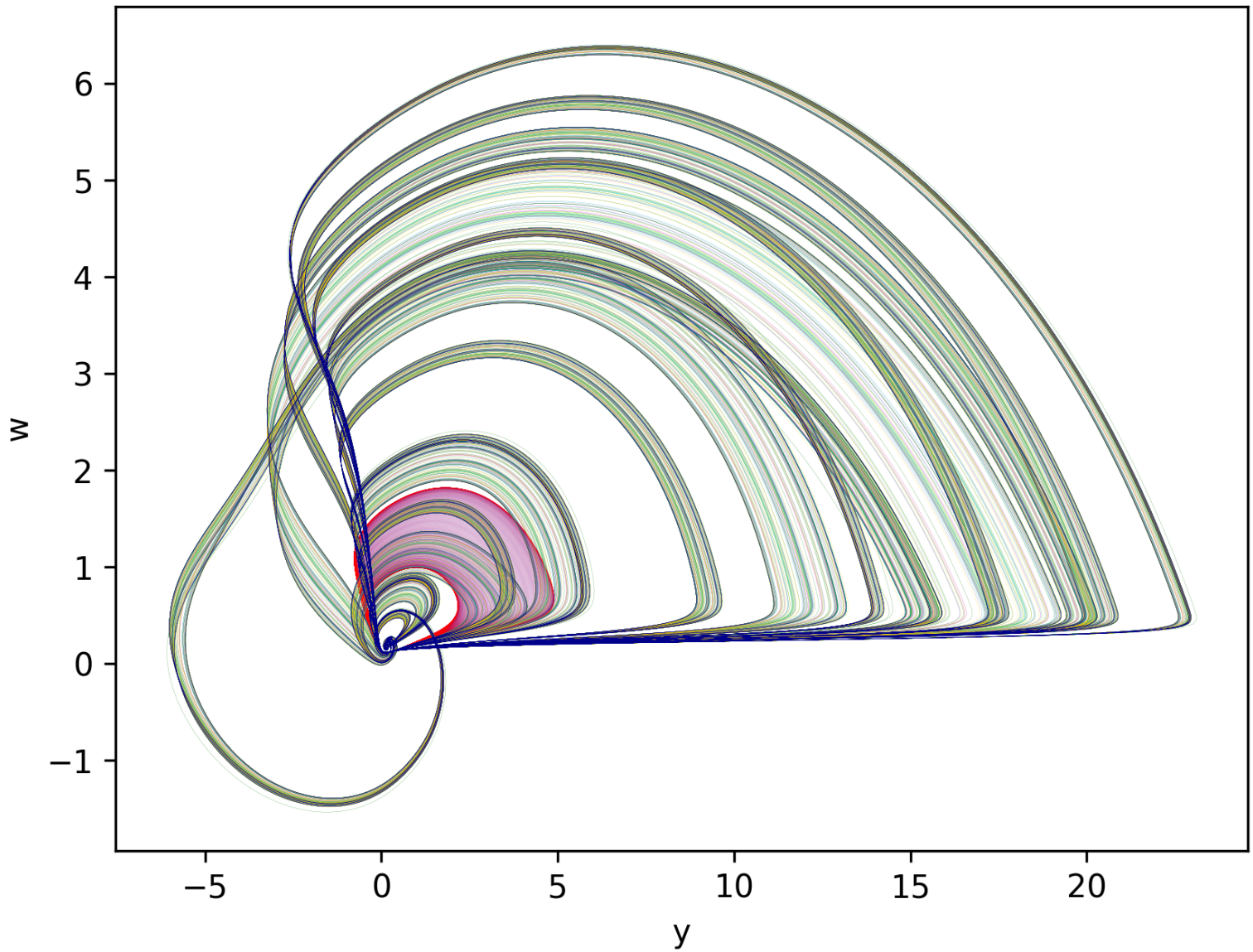
(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.4, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6013, 0.8814)
End=[3.5963, 0.0196, 0.1386, 0.1127] Time=3000.0 Step=0.004 Start=3000



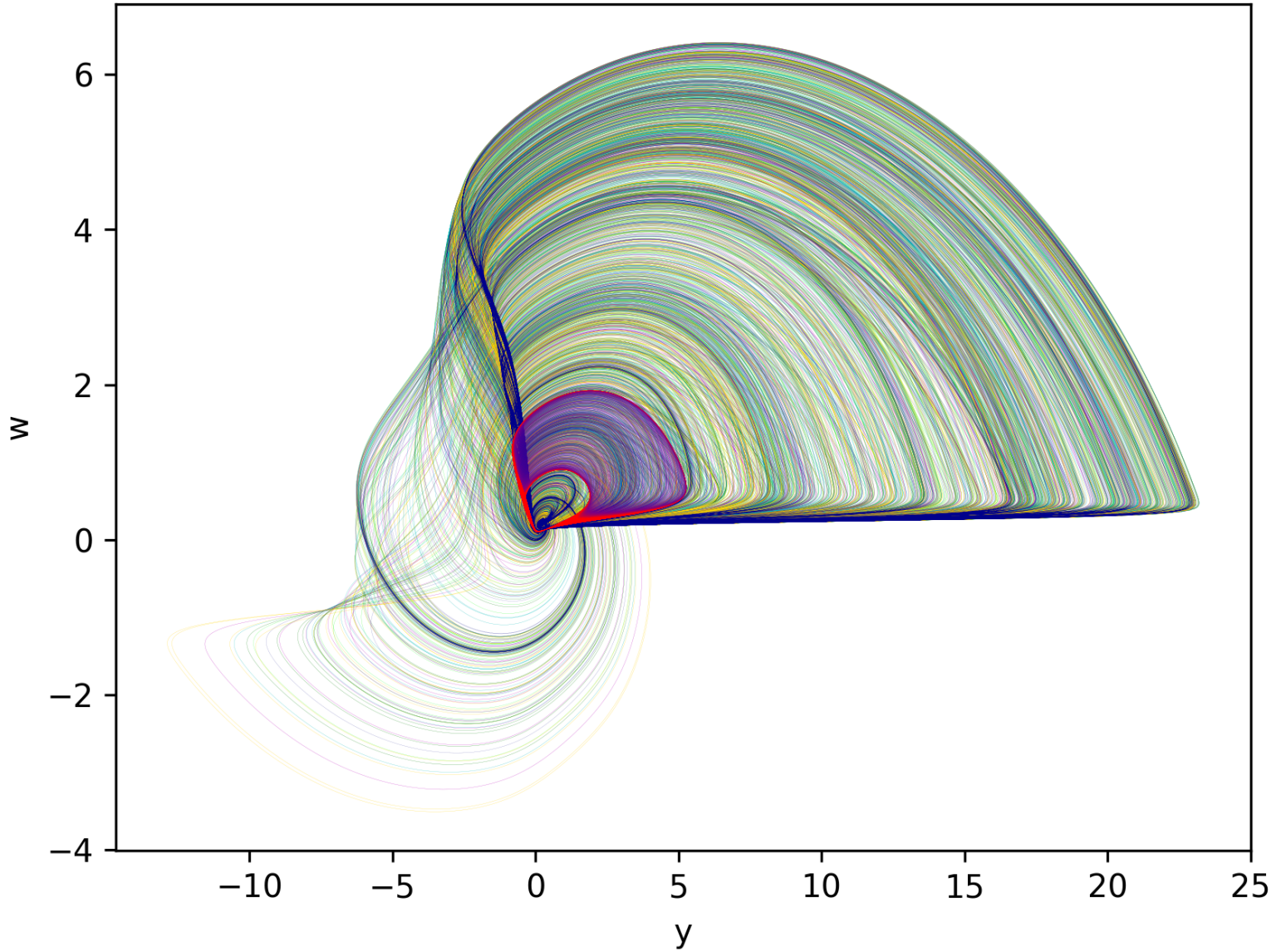
(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.405, f=0.1   StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6054, 0.8814)
End=[0.4785, 2.6385, 0.3024, 0.3953]   Time=2000.0   Step=0.002   Start=30000



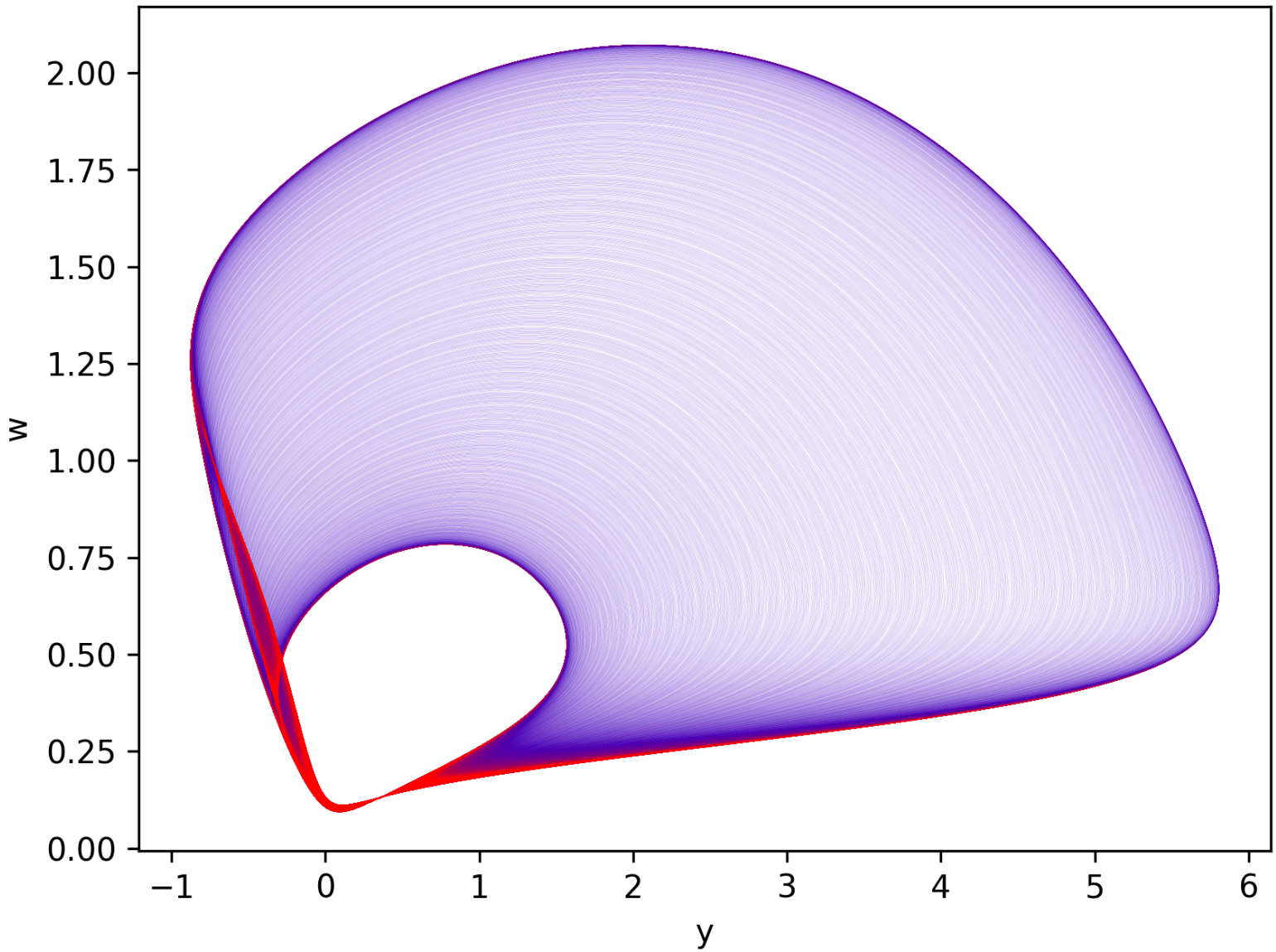
(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.42, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6177, 0.8814)
End=[8.4551, -0.1626, -0.0177, 0.4635] Time=4000.0 Step=0.002 Start=5000

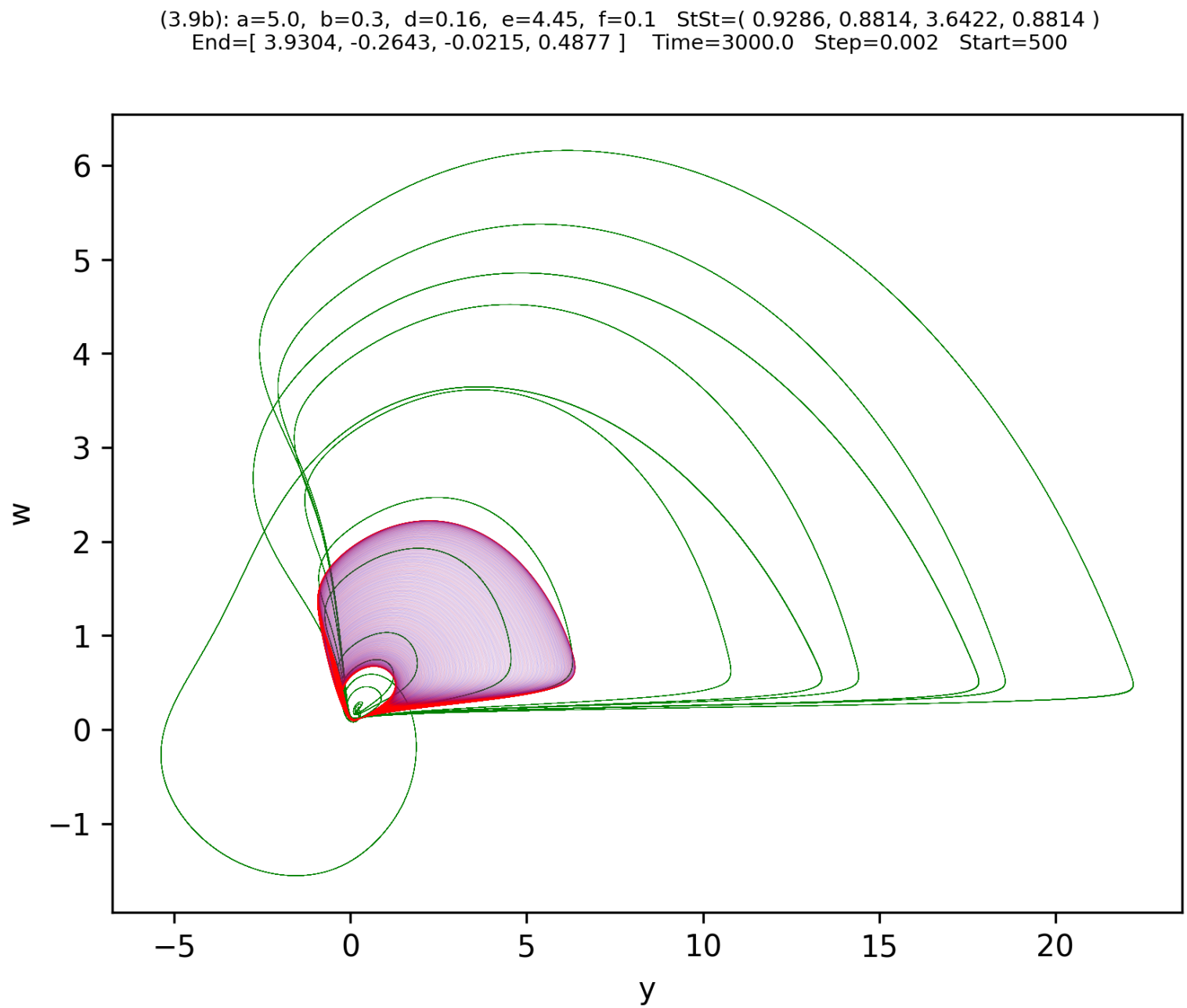


(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.43, f=0.1   StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6258, 0.8814)
End=[2.4056, 0.4016, 0.374, 0.1363]   Time=5000.0   Step=0.002   Start=500

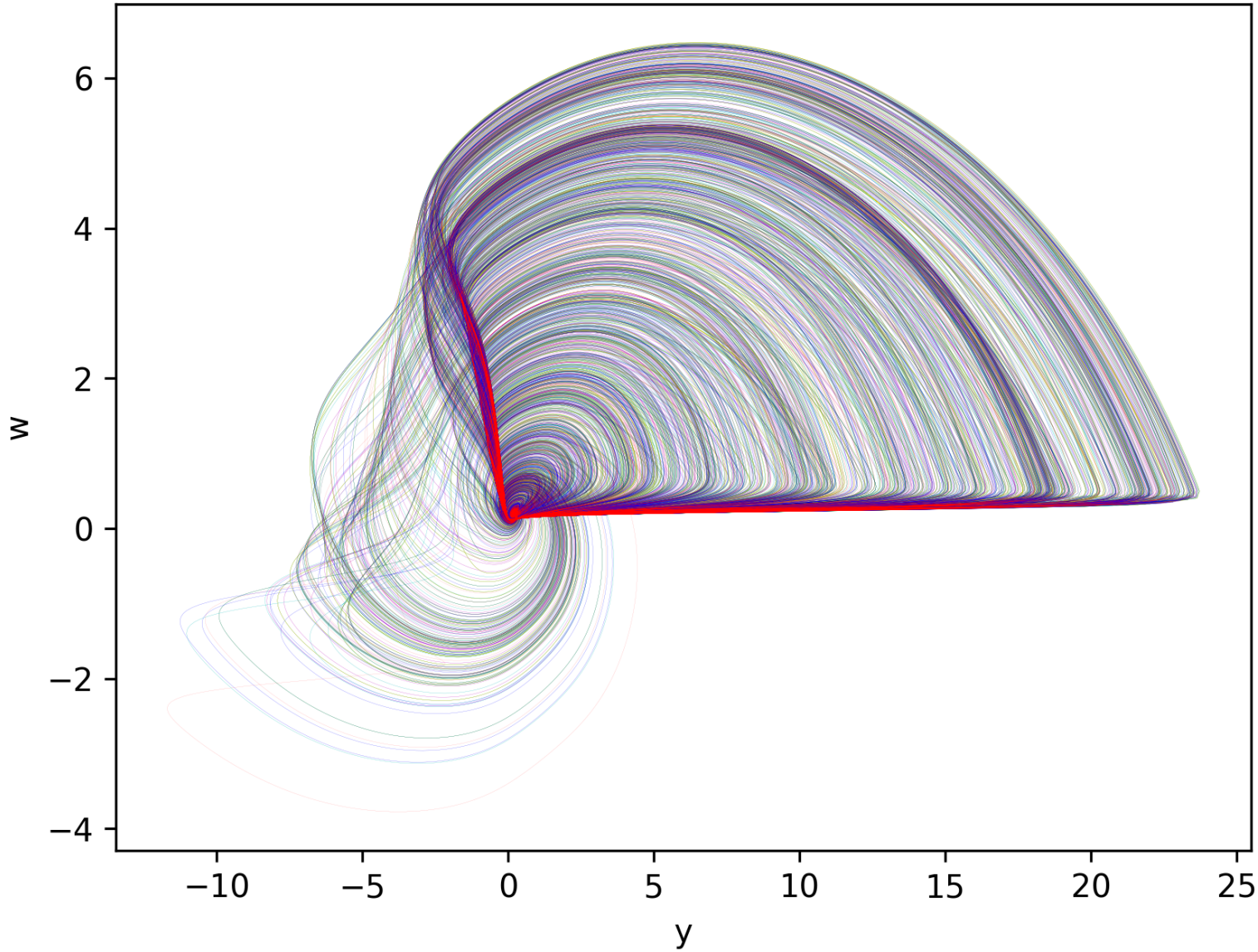


(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.442, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6357, 0.8814)
End=[2.5297, 0.1517, 0.103, 0.0974] Time=4000.0 Step=0.004 Start=500

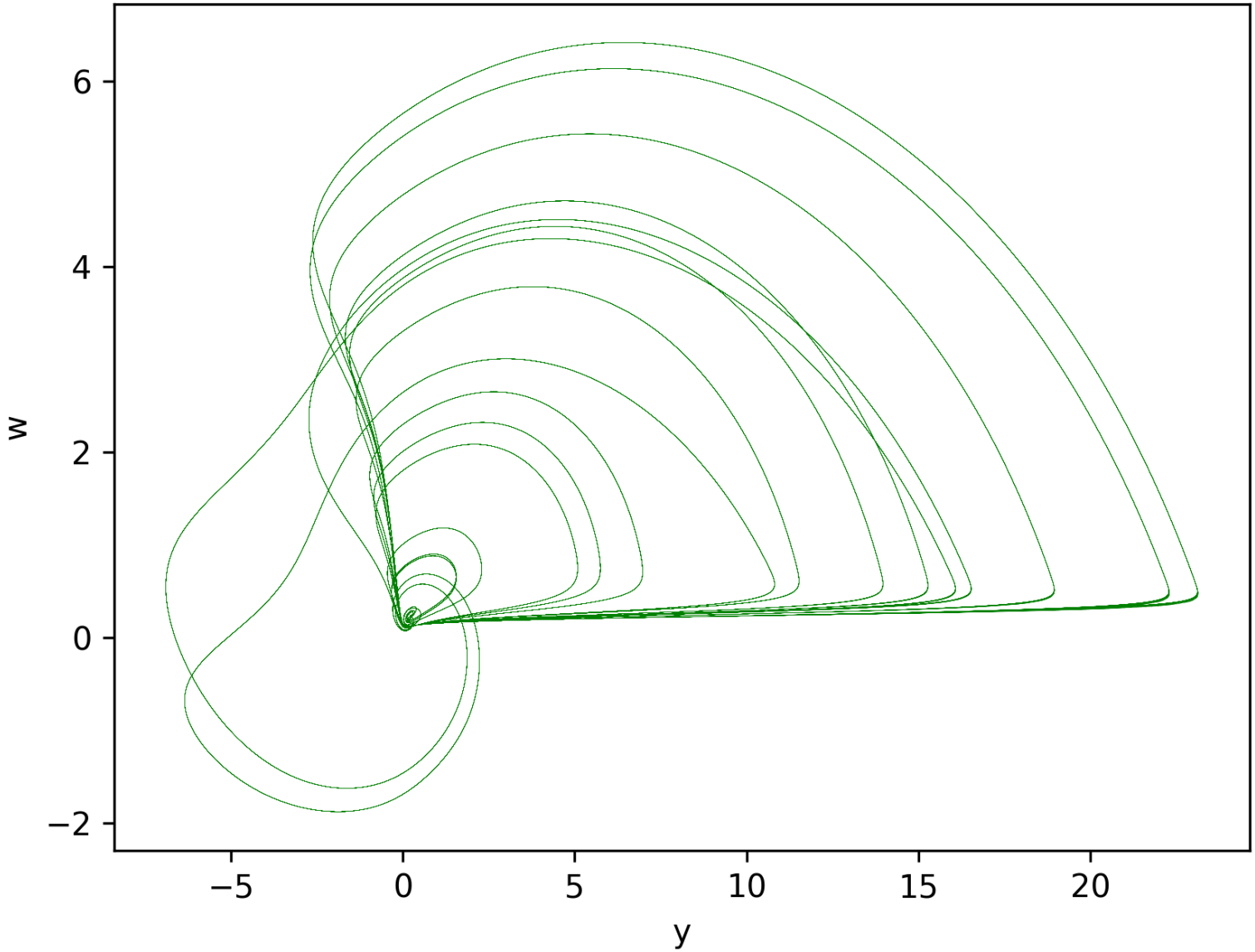


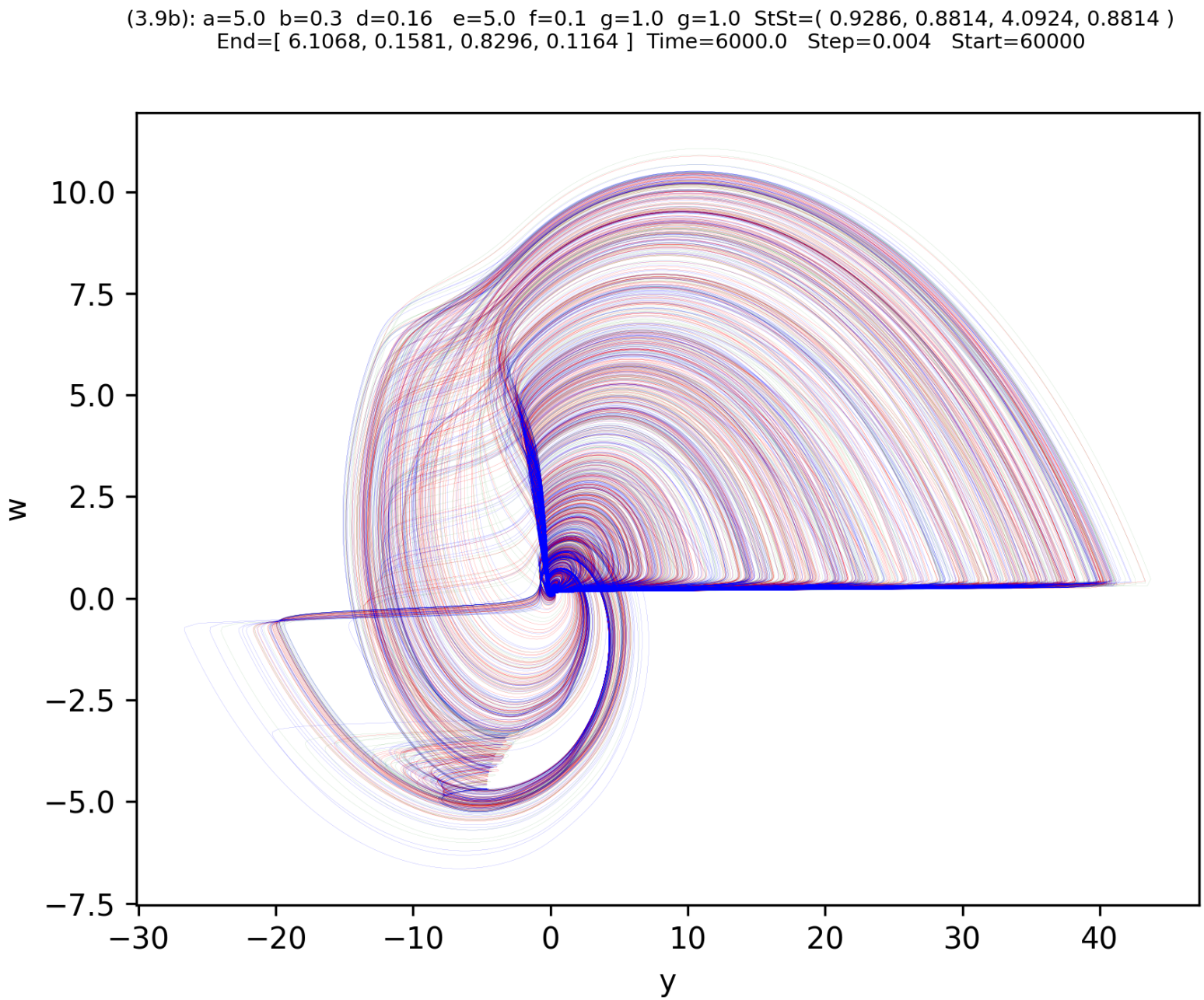

(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.45, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6422, 0.8814)
End=[3.9304, -0.2643, -0.0215, 0.4877] Time=3000.0 Step=0.002 Start=500
w
y
6
5
4
3
2
1
0
−1
−5
0
5
10
15
20

(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.455, f=0.1   StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6463, 0.8814)
End=[1.8049, -0.6517, -1.0173, 0.9023]   Time=3000.0   Step=0.004   Start=500



(3.9b): a=5.0, b=0.3, d=0.16, e=4.48, f=0.1 StSt=(0.9286, 0.8814, 3.6668, 0.8814)
End=[1.3319, 0.2035, 0.8245, 0.224] Time=3000.0 Step=0.004 Start=500




(3.9b): a=5.0 b=0.3 d=0.16 e=5.0 f=0.1 g=1.0 g=1.0 StSt=(0.9286, 0.8814, 4.0924, 0.8814)
End=[6.1068, 0.1581, 0.8296, 0.1164] Time=6000.0 Step=0.004 Start=60000
w
y
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−30
−20
−10
0
10
20
30
40